Józef Beluch

Ocena dokładności w transformacji współrzędnych sposobem Helmerta

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 27, 17-25

2007

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Józef Beluch

OCENA DOKŁADNOŚCI W TRANSFORMACJI WSPÓŁRZĘDNYCH SPOSOBEM HELMERTA

Wprowadzenie

Problem oceny dokładności w transformacjach współrzędnych traktowany jest najczęściej w literaturze bardzo ogólnie i niejednoznacznie. Zwykle ocenę transformacji wykonuje się na podstawie odchyłek współrzędnych punktów dostosowania przed i po transformacji, pomijając ścisłą charakterystykę dokładności pozostałych transformowanych punktów. Oczywiście nie w każdym przypadku istnieje potrzeba ścisłej oceny dokładności; to między innymi zależy od wzajemnej dokładności współrzędnych w układach pierwotnych oraz wtórnych, a także od celu transformacji i funkcji jaką będą pełniły współrzędne punktów po transformacji. Na przykład transformujemy współrzędne punktów osnowy realizacyjnej wyznaczonej bardzo dokładnie w układzie lokalnym-pierwotnym do układu państwowego, w którym punkty dostosowania w tym wtórnym układzie są wyznaczone ze znacznie mniejszą dokładnością wówczas problem transformacji i oceny dokładności może być przedstawiony w sposób niżej opisany. Założymy przy tym, że znane są średnie błędy współrzędnych w układzie wtórnym do którego będą transformowane współrzędne z układu pierwotnego. Aby transformacja z punktu widzenia operacji matematycznej była możliwa do przeprowadzenia to powinien być spełniony warunek:

$$2n \geq u \qquad (1)$$

gdzie

n – liczba punktów dostosowania,

u – liczba parametrów transformacji.

W transformacji Helmerta wstępują cztery parametry, w następujących związkach funkcyjnych:

$$\begin{aligned} X_i &= c + bx_i - ay_i \\ Y_i &= d + ax_i - by_i \end{aligned} \qquad (2)$$

gdzie:

x_i, y_i - współrzędne układu pierwotnego i-tego punktu,

X_i, Y_i - współrzędne układu wtórnego i-tego punktu,

c, d – parametry translacji,

a, b – parametry będące funkcją skali s i kąta obrotu układu pierwotnego względem wtórnego.

$$a = s \sin \varphi$$

$$b = s \cos \varphi \tag{3}$$

Z tych związków możemy wyznaczyć skalę

$$s^2 = a^2 + b^2 \tag{4}$$

oraz kąt skręcenia układów

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} \tag{5}$$

W procesie transformacji możemy wydzielić następujące etapy postępowania:

- wyznaczenie parametrów transformacji,
- ocena dokładności parametrów transformacji i punktów dostosowania,
- ewentualne ponowne wyznaczenie parametrów transformacji i oceny dokładności, po zmianie liczby punktów dostosowania lub zmianie wag współrzędnych,
- transformacja współrzędnych wszystkich punktów z układu pierwotnego x, y do wtórnego X, Y,
- ocena dokładności przetransformowanych współrzędnych punktów do układu wtórnego,
- korekta współrzędnych, wyznaczenie tzw. poprawki Hausbrandta.

Wyznaczenie parametrów transformacji

Parametry transformacji wyznaczymy na podstawie związków (1) dla znanych współrzędnych punktów dostosowania.

Gdy $2n > u$ wówczas liczba równań będzie większa od liczby niewiadomych. Wyliczone najprawdopodobniejsze wartości parametrów transformacji nie będą mogły spełniać dokładnie tego układu. Dalsza procedura obliczeń wymaga wprowadzenia do układu równań poprawek. Poprawki te zdefiniujemy jako różnicę pomiędzy danymi współrzędnymi wtórnymi $\overline{X}_i, \overline{Y}_i$ punktów dostosowania, a współrzędnymi $\overline{X}_i', \overline{Y}_i'$ tych punktów wyznaczonymi z transformacji (kreski nad współrzędnymi oznaczają, że są to współrzędne punktów dostosowania w układzie pierwotnym bądź wtórnym). Zatem:

$$V_{\overline{X}_i} = \overline{X}_i^t - \overline{X}_i$$
$$V_{\overline{Y}_i} = \overline{Y}_i^t - \overline{Y}_i \qquad (6)$$

gdzie

$$\overline{X}_i^t = c + b\overline{x}_i - a\overline{y}_i$$
$$\overline{Y}_i^t = d + a\overline{x}_i + b\overline{y}_i \qquad (7)$$

Wprowadzając (7) do (6) otrzymamy

$$\begin{aligned}
V_{\overline{X}_1} &= -\overline{y}_1 a + \overline{x}_1 b + c + 0\cdot d - \overline{X}_1 \\
V_{\overline{Y}_1} &= \overline{x}_1 a + \overline{y}_1 b + 0\cdot c + d - \overline{Y}_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (8) \\
V_{\overline{X}_n} &= -\overline{y}_n a + \overline{x}_n b + c + 0\cdot d - \overline{X}_n \\
V_{\overline{Y}_n} &= \overline{x}_n a + \overline{y}_n b + 0\cdot c + d - \overline{Y}_n
\end{aligned}$$

lub w ogólnej formie macierzowej:

$$\mathrm{V=AX-L} \qquad (9)$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} V_{\overline{X}_1} \\ V_{\overline{Y}_1} \\ \vdots \\ V_{\overline{X}_n} \\ V_{\overline{Y}_n} \end{bmatrix} = \mathbf{V} \quad \begin{bmatrix} -\overline{y}_1 & \overline{x}_1 & 1 & 0 \\ \overline{x}_1 & \overline{y}_1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\overline{y}_n & \overline{x}_n & 1 & 0 \\ \overline{x}_n & \overline{y}_n & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \mathbf{X} \quad \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{Y}_1 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \\ \overline{Y}_n \end{bmatrix} = \mathbf{L} \qquad (10)$$

Pseudoobserwacjom $\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \dots, \overline{X}_n, \overline{Y}_n$ możemy przypisać macierz wariancyjno-kowariancyjną. W praktyce najczęściej jednak znamy diagonalną macierz wariancyjną, a jej odwrotność możemy uznać za macierz wagową

$$P = diag\left[m^2_{\overline{X}_1}\ m^2_{\overline{Y}_1} \dots m^2_{\overline{X}_n}\ m^2_{\overline{Y}_n}\right]^{-1} \qquad (11)$$

Niewiadome X (*a*, *b*, *c*, *d*) wyznaczymy z rozwiązania układu równań normalnych:

$$\mathrm{X} = (\mathrm{A}^T\mathrm{PA})^{-1}\mathrm{A}^T\mathrm{PL} \qquad (12)$$

Weryfikacja wyników wyrównania

Podstawiając (12) do (9) obliczymy poprawki V, których wartości powinny stać się przedmiotem analizy. Gdy przekraczają one ustaloną graniczną wartość wówczas w dalszym postępowaniu obliczeniowym możemy: zrezygnować z punktów dostosowania dla których poprawki przekraczają wartości dopuszczalne albo pozostawić tego typu punkty ponawiając procedurę obliczeniową z wagami odwrotnie proporcjonalnymi do kwadratów poprawek czyli

$$p_i = \frac{1}{v_i^2} \tag{13}$$

Pierwszy sposób postępowania stosujemy gdy w procesie transformacji występuje duża liczba punktów dostosowania, natomiast drugi sposób postępowania wybieramy gdy punktów dostosowania jest mało.

Ocenę wielkości poprawek wykonamy stosując kryterium:

$$v \leq k\, m_v \tag{14}$$

gdzie

k – wielokrotność błędu średniego (zwykle $k = 2$ lub $k = 3$),

m_v - przeciętna wartość średniego błędu poprawki v.

Dla określenia błędu m_v można zaproponować wzór wyprowadzony w oparciu o twierdzenie Otrębskiego [1]

$$m_v = m_w \sqrt{\frac{q}{r}} \tag{15}$$

gdzie

m_w - średni błąd współrzędnych $m_{\overline{X}_i}$ lub $m_{\overline{Y}_i}$,

q – liczba obserwacji nadliczbowych,

r – liczba równań poprawek.

Biorąc po uwagę wzory (14) i (15) napiszemy ostatecznie

$$v \leq k\, m_w \sqrt{\frac{q}{n}} \tag{16}$$

Ocena dokładności

Podstawowym, a równocześnie ogólnym parametrem oceny dokładności transformacji jest średni błąd m_0 wyznaczany wzorem:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}}{r-u}} \tag{17}$$

gdzie: u – liczba niewiadomych.

W rozpatrywanym przypadku transformacji $r = 2n$, $u = 4$, n – liczba punktów dostosowania, stąd

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}}{2n-4}} \tag{18}$$

W literaturze geodezyjnej ocena dokładności w procesie transformacji ograniczona jest najczęściej do wyznaczenia błędu m_0 lub średnich błędów współrzędnych:

$$m_X = \sqrt{\frac{\mathbf{V}_X^T\mathbf{V}_X}{n}}\ ;\ m_Y = \sqrt{\frac{\mathbf{V}_Y^T\mathbf{V}_Y}{n}} \tag{19}$$

gdzie: $\mathbf{V}_X$, $\mathbf{V}_Y$ - macierze poprawek do współrzędnych X oraz Y punktów dostosowania,
n - liczba punktów dostosowania,

natomiast brak informacji o średnich błędach współrzędnych pozostałych punktów, nie tylko punktów dostosowania. Możliwość taka istnieje; wystarczy zastosować znane wzory na średnie błędy dowolnej funkcji. W rozważanym przypadku funkcje są wyrażone wzorami (2). Dla tych funkcji średnie błędy wyznaczymy wzorami

$$\begin{aligned} m_{X_i} &= m_0\sqrt{\mathbf{F}_{X_i}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{F}_{X_i}^T} \\ m_{Y_i} &= m_0\sqrt{\mathbf{F}_{Y_i}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{F}_{Y_i}^T} \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{X_i} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_i}{\partial a} & \dfrac{\partial X_i}{\partial b} & \dfrac{\partial X_i}{\partial c} & \dfrac{\partial X_i}{\partial d} \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{Y_i} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Y_i}{\partial a} & \dfrac{\partial Y_i}{\partial b} & \dfrac{\partial Y_i}{\partial c} & \dfrac{\partial Y_i}{\partial d} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

Po wyznaczeniu pochodnych cząstkowych występujących we wzorach (23) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{X_i} &= \begin{bmatrix} -y_i & x_i & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{Y_i} &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (22)$$

Podstawiając do (20) macierze (22) oraz $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{PA}\right)^{-1}$ wyznaczone przy realizacji wzoru (12) policzymy średnie błędy każdego przetransformowanego punktu. Następnie można policzyć średnie błędy położenia punktów

$$m_{p_i} = \sqrt{m_{X_i}^2 + m_{Y_i}^2} \qquad (23)$$

Jeśli współrzędne punktów dostosowania nie były obarczone błędami systematycznymi bądź grubymi to:

$$m_{p_i} \leq m_{p\,\mathrm{dop}} \qquad (24)$$

Średni błąd $m_{p\,\mathrm{dop}}$ ustalamy w zależności od celu transformacji i dalszego wykorzystania współrzędnych przetransformowanych punktów. Jeśli współrzędne te mają spełniać warunki dokładnościowe punktów osnowy zaliczanych do określonej klasy dokładnościowej to na przykład dla osnowy szczegółowej III klasy należałoby przyjąć $m_{p\,\mathrm{dop}} = 0{,}10$ m.

Problem oceny dokładnościowej transformacji można by na tym zakończyć gdyby dla punktów dostosowania przyjąć współrzędne wtórne obliczone z transformacji. Najczęściej jednak dla punktów dostosowania pozostawia się tzw. współrzędne katalogowe. W tym przypadku, w celu zminimalizowania deformacji sieci po transformacji (naruszenie warunku podobieństwa), wyznacza się tzw. poprawki posttransformacyjne Hausbrandta dla punktów które posiadały tylko współrzędne pierwotne. Wzory te mają następującą postać:

$$V_{X_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ji}V_{\bar{X}_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} r_{ji}} \quad ; \quad V_{Y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ji}V_{\bar{Y}_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} r_{ji}} \qquad (25)$$

$j = (1, 2, \dots, e)$
$i = (1, 2, \dots, n)$
gdzie

e – liczba punktów posiadających tylko współrzędne pierwotne,
n – liczba punktów dostosowania,

$$r_{ji} = \frac{1}{d_{ji}^2} = \frac{1}{\left(X_i - X_j\right)^2 + \left(Y_i - Y_j\right)^2} \tag{26}$$

d_{ji} - odległość transformowanego j-tego punktu od i-tego punktu dostosowania.

Ostateczne współrzędne punktów wylicza się wzorami:

$$\underline{\underline{X}}_j = X_j - V_{X_j}$$

$$\underline{\underline{Y}}_j = Y_j - Y_{X_j} \tag{27}$$

W tym przypadku komplikuje się ocena dokładności, ale można ją wykonać.

W związku z tym napiszemy macierzową, szczegółową formę wzoru (27) dla wszystkich transformowanych punktów (z wyjątkiem punktów dostosowania):

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{X}}_1 \\ \underline{\underline{Y}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{X}}_e \\ \underline{\underline{Y}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 & x_1 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_e & x_e & 1 & 0 \\ x_e & y_e & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{1,1}^x & R_{1,2}^x & \cdots & R_{1,n}^x \\ R_{1,1}^y & R_{1,2}^y & \cdots & R_{1,n}^y \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{e,1}^x & R_{e,2}^x & \cdots & R_{e,n}^x \\ R_{e,1}^y & R_{e,2}^y & \cdots & R_{e,n}^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\overline{X}_1} \\ V_{\overline{Y}_1} \\ \vdots \\ V_{\overline{X}_n} \\ V_{\overline{Y}_n} \end{bmatrix} \tag{28}$$

gdzie

$$R_{ji} = \frac{r_{ji}}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_{ji}} \tag{29}$$

R_{ji}^x, R_{ji}^y - parametry związane z wyznaczeniem poprawki V_{X_j}, V_{Y_j}

Formę (28) możemy zapisać w następującej ogólnej postaci:

$$\mathrm{W} = \underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{X} - \mathrm{R}\,\mathrm{V} \tag{30}$$

Podstawiając (9) oraz (12) do (30) otrzymamy po przekształceniach:

$$\mathrm{W} = [(\underline{\mathrm{A}} - \mathrm{RA})\mathrm{N}^{-1}\,\mathrm{A}^T\mathrm{P} + \mathrm{R}]\,\mathrm{L} \tag{31}$$

gdzie

$$\mathrm{N}^{-1} = (\mathrm{A}^T\mathrm{PA})^{-1}$$

Stosując do funkcji (31) prawo kowariancji otrzymamy

$$\mathrm{C_W} = [(\underline{\mathrm{A}} - \mathrm{RA})\,\mathrm{N}^{-1}\,\mathrm{A}^T\mathrm{P} + \mathrm{R}]\,\mathrm{C_L}\,[\mathrm{PAN}^{-1}(\underline{\mathrm{A}}^T\text{-}\mathrm{A}^T\mathrm{R}^T)+\mathrm{R}^T] \tag{32}$$

$\mathrm{C_W}$ – macierz kowariancji wektora współrzędnych $\underline{\underline{\mathrm{X}}}_{\mathrm{j}}$, $\underline{\underline{\mathrm{Y}}}_{\mathrm{j}}$,

C_L – macierz kowariancji wektora współrzędnych $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$ punktów dostosowania.

Uwzględniając w (32) związek

$$C_L = m_0 P^{-1} \tag{33}$$

po wykonaniu przekształceń dojdziemy do ostatecznej postaci:

$$C_W = m_0[\underline{A}N^{-1}\underline{A}^T - RA\,N^{-1}\,A^TP^T + RP^{-1}R^T] \tag{34}$$

gdzie

$$C_W = \begin{bmatrix} \Sigma_{\underline{X}_1} & C_{\underline{X}_1,\underline{Y}_1} & \cdots & C_{\underline{X}_1,\underline{X}_e} & C_{\underline{X}_1,\underline{Y}_e} \\ C_{\underline{Y}_1,\underline{X}_1} & \Sigma_{\underline{Y}_1} & \cdots & C_{\underline{Y}_1,\underline{X}_e} & C_{\underline{Y}_1,\underline{Y}_e} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ C_{\underline{X}_e,\underline{Y}_1} & C_{\underline{X}_e,\underline{Y}_1} & \cdots & \Sigma_{\underline{X}_e} & C_{\underline{X}_e,\underline{Y}_e} \\ C_{\underline{Y}_e,\underline{X}_1} & C_{\underline{Y}_e,\underline{Y}_1} & \cdots & C_{\underline{Y}_e,\underline{X}_e} & \Sigma_{\underline{Y}_e} \end{bmatrix} \tag{35}$$

$\Sigma_{\underline{X}_i}$, $\Sigma_{\underline{Y}_i}$ - wariancje współrzędnych $\underline{\underline{X}}_i$, $\underline{\underline{Y}}_i$,

$C_{\underline{X}_i \underline{Y}_i}$ - kowariancje pomiędzy współrzędnymi $\underline{\underline{X}}_i$, $\underline{\underline{Y}}_i$.

Pełna macierz wariancyjno-kowariancyjna C_W między innymi może być wykorzystana do wyznaczenia elementów elips błędów natomiast jeśli w ocenie dokładnościowej ograniczymy się wyłącznie do estymatorów wariancji tj. do średnich błędów współrzędnych to możemy je wyznaczyć wzorami:

$$m_{\underline{\underline{X}}_i} = m_0\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{X_i}\mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{A}}_{X_i}^T - \mathbf{R}_{X_i}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{R}_{X_i}^T + \mathbf{R}_{X_i}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}_{X_i}^T} \tag{36}$$

$$m_{\underline{Y}_i} = m_0\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{Y_i}\mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{A}}_{Y_i}^T - \mathbf{R}_{Y_i}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{R}_{Y_i}^T + \mathbf{R}_{Y_i}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}_{Y_i}^T} \tag{37}$$

gdzie

$\mathbf{A}_{X_i}$, $\mathbf{A}_{Y_i}$ $\mathbf{R}_{X_i}$, $\mathbf{R}_{Y_i}$ - i-te wiersze w macierzach $\underline{\mathbf{A}}$ oraz **R**.

Średni błąd położenia transformowanych punktów

$$m_{\underline{P}_i} = \sqrt{m_{\underline{X}_i}^2 + m_{\underline{Y}_i}^2} \tag{38}$$

Wnioski końcowe

Przy wyznaczeniu parametrów transformacji powinny być uwzględniane wagi współrzędnych punktów dostosowania, przynajmniej współrzędnych w układzie wtórnym. Szczególnie jest to zalecane, gdy wartości błędów współrzędnych są zróżnicowane.

Ocena dokładności transformacji nie powinna być ograniczona do wyznaczenia parametrów m_0 wzorem (18) bądź m_X, m_Y wzorami (19), ponieważ jest to ocena przybliżona.
Dokładniejszą ocenę możemy uzyskać stosując zaproponowane wzory (20) bądź (35÷37).

Literatura:

1. Hausbrandt S.: *Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne.* T. II, PPWK, Warszawa, 1971.