

Elżbieta Maksymiak

Macierze brzegowe w niektórych metodach wykrywania oraz mierzenia natężenia współliniowości

Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska. Sectio H, Oeconomia 24, 311-317

1990

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Zakład Nauk Ekonomicznych
Filii UMCS w Rzeszowie

Elżbieta MAKSYMIAK

**Macierze brzegowe w niektórych metodach wykrywania oraz
mierzenia natężenia współliniowości**

The Borderline Matrix in Selected Methods of Detecting and Measuring the
Intensity of Collineation

Niech χ oraz X oznaczają zbiór zmiennych X_1, X_2, \dots, X_k oraz macierz (o wymiarach $n \times k$), której element x_{ij} jest wartością j -tej zmiennej dla i -tej obserwacji ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, k$), czyli

$$\chi = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$$

zaś

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

W literaturze przedmiotu rozróżnia się dwa rodzaje współliniowości; współliniowość algebraiczną oraz statystyczną.

Definicja 1

Zmienne X_1, X_2, \dots, X_k są współliniowe algebraicznie wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rz}(X) < k$, gdzie $\text{rz}(X)$ oznacza rząd macierzy X . Definicja

ta jest równoważna stwierdzeniu, że zjawisko współliniowości algebraicznej w zbiorze χ występuje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{\substack{\beta \in R^k \\ \beta \neq 0}} \bigwedge_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} = 0$$

gdzie β_j jest j -tą współrzędną wektora β .

Definicja 2

Zmienne X_1, X_2, \dots, X_k są współliniowe statystycznie wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z nich jest silnie skorelowana z pozostałymi.

Specyficzny charakter zmiennych ekonomicznych sprawia, że w ekonometrii przydatna jest przede wszystkim definicja współliniowości statystycznej. Dane empiryczne najczęściej mają postać szeregów czasowych. Dla takich danych współliniowość jest zjawiskiem typowym, gdyż często mają one tendencję do podobnego kształtowania się w czasie. W przypadku danych przekrojowych występowanie współliniowości tłumaczy się najczęściej tendencją do dość proporcjonalnego zmieniania się obserwowanych wielkości na skutek zmian jednostki obserwacji.

W niniejszym artykule przedstawiamy zastosowanie macierzy brzegowych w wybranych metodach współliniowości, jak metoda Farrara-Glaubera, Schipsa-Stiera oraz Theila.

Niech $R = [r_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$) będzie macierzą korelacji dla zmiennych zbioru $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$.

D. E. Farrar i R. R. Glauber¹ proponują taką metodę wykrywania współliniowości w której określają miarę ϑ_j postaci:

$$\vartheta_j = R_{j,1\dots j-1 j+1\dots k} - R_{0,1\dots k} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1)$$

gdzie $R_{j,1\dots j-1 j+1\dots k}$ oznacza współczynnik korelacji wielorakiej między zmienną X_j a pozostałymi zmiennymi zbioru χ , zaś $R_{0,1\dots k}$ jest współczynnikiem korelacji wielorakiej między zmienną objaśnianą Y a zmiennymi objaśniającymi X_1, X_2, \dots, X_k . Jeżeli

$$\bigvee_{j \in \{1, 2, \dots, k\}} \vartheta_j < 0,$$

¹D.E. Farrar, R.R. Glauber: Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revised "Review of Economics and Statistics 1967, vol. 49; Theil H.: Principles of Econometrics North - Holland Publishing Company, Amsterdam - London 1971.

to w zbiorze χ nie występuje zjawisko współliniowości. Jeżeli

$$\bigwedge_{j \in \{1, 2, \dots, k\}} \vartheta_j \geq,$$

to zmienne zbiory χ są współliniowe.

Wiadomo, że współczynniki $R_{j,1\dots j-1 j+1\dots k} - R_{0,1\dots k}$ wyrażają się odpowiednio wzorami:

$$R_{j,1\dots j-1 j+1\dots k} = \sqrt{(R_j)^T R_{jj}^{-1} R_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2)$$

$$R_{0,1\dots k} = \sqrt{(R^0)^T R^{-1} R^0}, \quad (3)$$

gdzie R_{jj} jest podmacierzą macierzy R powstałą przez skreślenie j -tego wiersza oraz j -tej kolumny,

$$(R)^T = [r_{j1} \dots r_{jj-1} r_{jj+1} \dots r_{jk}],$$

$$(R^0)^T = [r_{YX_1} r_{YX_2} \dots r_{YX_k}]$$

zaś r_{YX_j} oznacza współczynnik korelacji między zmienną objaśniającą Y i zmienną X_j .

Obliczenie współczynnika $R_{j,1\dots j-1 j+1\dots k}$ oraz $R_{0,1\dots k}$ odpowiednio ze wzorów (2), (3) sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia macierzy odwrotnych $(R_{jj})^{-1}$ i R^{-1} .

Aby tego uniknąć współczynniki te można w prosty sposób wyznaczyć korzystając z macierzy brzegowych w oparciu o następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 1²

Jeżeli macierz wewnętrzna A macierzy brzegowej A_1 zdefiniowanej następująco

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & f \\ g & z \end{bmatrix}_{(k+1) \times (k+1)}, \quad (4)$$

gdzie $A = [a_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, k)$,

$g = [g_1, g_2, \dots, g_k]$,

$f^T = [f_1, f_2, \dots, f_k]$,

$z \in R$ (R - zbiór liczb rzeczywistych)

jest nieosobliwa, to

$$\frac{\det A_1}{\det A} = z - g A^{-1} f. \quad (5)$$

²M. Kolupa: Macierze brzegowe w badaniach ekonometrycznych, PWE Warszawa 1982.

Twierdzenie 2³

Jeżeli macierz brzegową A_1 daną wzorem (4), której macierz wewnętrzna A jest nieosobliwa, sprowadzamy do górnej macierzy trójkątnej D , to

$$\frac{\det A_1}{\det A} = d, \quad (6)$$

gdzie d jest elementem macierzy D stojącym w jej prawym dolnym rogu.

Na mocy twierdzenia 1 oraz wzorów (2) i (3) współczynniki:

$R_{j,1\dots j-1 j_1\dots k}$, $R_{0,1\dots k}$ wyrażają się wzorami:

$$R_{j,1\dots j-1 j_1\dots k} = \sqrt{\frac{\det R^{11}}{\det R_{jj}}} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (7)$$

$$R_{0,1\dots k} = \sqrt{\frac{\det R'}{\det R}}, \quad (8)$$

gdzie

$$R^{11} = \begin{bmatrix} R_{jj} & R_j \\ -(R_j)^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$R' = \begin{bmatrix} R & R^0 \\ -(R^0)^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Obliczanie ilorazu $\sqrt{\frac{\det R^{11}}{\det R_{jj}}}$ i $\sqrt{\frac{\det R'}{\det R}}$ wykonujemy zgodnie z twierdzeniem 2. W tym celu należy sprowadzić macierze R^{11} , R' do górnych macierzy trójkątnych wykonując odpowiednie przekształcenia elementarne. Wówczas elementy stojące w prawych dolnych rogach tak otrzymanych macierzy są równe wspomnianym wyżej ilorazom, czyli współczynnikowi $R_{j,1\dots j-1 j_1\dots k}^2$ oraz $R_{0,1\dots k}^2$.

B. Schips i W. Stier⁴ jako miarę natężenia współliniowości proponują współczynnik λ określony wzorem

$$\lambda = R_{0,1\dots k}^2 - \sum_{j=1}^k r_{YX_j}^2. \quad 11$$

³Ibidem.

⁴B. Schips, W. Stier: Bestimmung der Answirkung von Multikollinearität zwischen den erklärenden Variablen in linearen Regressionsmodellen auf Kleinst-Quadrat-Schätzwerte durch Simulation, "Statistische Hefte" 1971, nr 2.

Współczynnik ten przyjmuje wartości z przedziału $\langle -k + 1, 0 \rangle$. Schips i Stier twierdzą, że jeżeli $\lambda = 0$, to zmienne X_1, X_2, \dots, X_k nie są skorelowane. W przeciwnym wypadku, gdy $\lambda \neq 0$ zmienne X_1, X_2, \dots, X_k są skorelowane. Natężenie współliniowości w zbiorze χ jest tym większe, im bardziej λ różni się od zera. W powyższej metodzie współczynnik $R_{0.1\dots k}$ również można obliczyć na podstawie wzoru (8) i twierdzenia 2.

W pracach Gruszczyńskiego⁵ i Theila, jako miarę natężenia współliniowości proponuje się współczynnik

$$\vartheta = R_{0.1\dots k}^2 - \sum_{j=1}^k (R_{0.1\dots k}^2 - R_{0.1\dots j-1 j+1\dots k}^2).$$

Współczynnik ϑ podobnie λ jest miarą należącą do przedziału $\langle -k + 1, 0 \rangle$ i jego mała wartość świadczy o silnej współliniowości w zbiorze χ . Do obliczania współczynnika ϑ można również wykorzystać twierdzenie 1 i 2.

Wiadomo, że

$$R_{0.1\dots j-1 j+1\dots k} = (R_j^0)^T (R_{jj})^{-1} R_j^0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

stąd na mocy twierdzenia 1 współczynnik $R_{0.1\dots j-1 j+1\dots k}$ wyraża się wzorem

$$R_{0.1\dots j-1 j+1\dots k} = \sqrt{\frac{\det R^{11}}{\det R_{jj}}},$$

gdzie

$$R'_{jj} = \begin{bmatrix} R_{jj} & R_j^0 \\ -(R_j^0)^T & 0 \end{bmatrix},$$

przy czym R_j^0 oznacza wektor postaci

$$[r_{YX_1} \dots r_{YX_{j-1}} \quad r_{YX_{j+1}} \dots r_{YX_k}].$$

Z kolei aby wyznaczyć iloraz $\frac{\det R_{jj}}{\det R_{jj}}$ należy wykorzystać twierdzenie 2 i sprowadzić macierz R'_{jj} (wykonując przekształcenia elementarne) do postaci górnej macierzy trójkątnej. Element stojący w prawym dolnym rogu tak otrzymanej macierzy będzie równy kwadratowi współczynnika $R_{0.1\dots j-1 j+1\dots k}$. Współczynnik $R_{0.1\dots k}$ można również obliczyć korzystając z wzoru (8) i twierdzenia 2.

⁵H. Gruszczyński: Współliniowość zmiennych i jej wpływ na estymację modeli ekonometrycznych. Praca doktorska, maszynopis, SGPiS, Warszawa 1977.

Poniżej przedstawiamy przykład liczbowy ilustrujący zastosowanie macierzy brzegowych w metodzie Farrara-Glaubera.

Przykład:

Niech $\chi = \{X_1, X_2, X_3\}$ oraz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, R^0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Najpierw obliczmy ϑ_j dla $j = 2$ przy pomocy wzorów (2) i (3) a później stosując macierze brzegowe, tzn. korzystając z twierdzenia 1 i 2. Na mocy (1) mamy równość:

$$\vartheta_2 = R_{2.13} - R_{0.123}$$

Aby wyznaczyć $R_{2.13}$ i $R_{0.123}$ przy pomocy wzorów (2) i (3) należy obliczyć (R_{22}^{-1}) i R^{-1} . Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy, że:

$$(R_{22}^{-1}) = \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 18/13 & 5/13 & -1 \\ 5/13 & 75/26 & -5/2 \\ -1 & 5/2 & 91/26 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$(R_{2.13}^2 = [3/10 \ 8/10]) \cdot \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \\ 3/10 \end{bmatrix} = 0.36$$

$$(R_{0.123}^2 = [5/3 \ 1/5 \ 3/10]) \cdot \begin{bmatrix} 18/13 & 5/13 & -1 \\ 5/13 & 75/26 & -5/2 \\ -1 & -5/2 & 91/26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \\ 3/10 \end{bmatrix} = 0.36$$

czyli $(\vartheta_2 = \sqrt{0.65} - \sqrt{0.36} \sim 0.8 - 0.6 = 0.2$

Z kolei obliczamy ϑ_2 wykorzystując macierze brzegowe.

Korzystając z wzorów (9), (10) i (12) otrzymujemy macierze R^{11} , R' następującej postaci:

$$R^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 1 & 0.8 \\ -0.3 & -0.8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ -0.6 & -0.2 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z twierdzeniem 2 przekształcamy macierz R^{11} oraz R' do postaci górnej macierzy trójkątnej. W wyniku tych przekształceń otrzymujemy:

$$R^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.75 & 0.65 \\ 0 & -0.65 & 0.09 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.75 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0.65 \end{bmatrix},$$

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0 & 0.91 & 0.65 & 0.02 \\ 0 & 0.65 & 0.75 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 & 0.36 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0 & 0.91 & 0.65 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.36 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0 & 0.91 & 0.65 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0.36 \end{bmatrix},$$

czyli $R_{2,13} = \sqrt{0.65} \sim 0.8$ oraz $R_{0,123} = \sqrt{0.36} \sim 0.6$. Stąd $\vartheta_2 = 0.2$.

Podsumowując należy stwierdzić, że macierze brzegowe wykorzystane w wyżej omawianych metodach badania współliniowości zmiennych objaśniających w znacznym stopniu ułatwiają obliczenie występujących w nich współczynników.

SUMMARY

The present article is devoted to the application of the borderline matrix in three methods of studying collineation; the methods of Farrar-Glauber, Schips-Stier and Theil. Certain properties of these matrixes make it possible to calculate the values of different coefficient applied in these methods.