Stanisław J. Surma

W duchu Tarskiego: o alternatywach teorio-dowodowej metalogiki

Filozofia Nauki 1/1, 49-65

1993

Filozofia Nauki
Rok I, 1993, Nr 1

Stanisław J. Surma

W duchu Tarskiego: o alternatywach teorio-dowodowej metalogiki

1. Wstęp. Logikę traktuje się często jako intuicyjnie pierwotną, prostą i skrajnie ogólną ramę pojęciową. Tak rozumiana, nadaje się ona do analizy i wyjaśniania pojęć metalogicznych, takich jak np.:

(i) dowód, dedukcja lub konsekwencja;
(ii) teoria dedukcyjna lub system zamknięty dedukcyjnie;
(iii) dedukcyjna niesprzeczność lub wzajemna zgodność;
(iv) dedukcyjna separowalność lub omijanie;
(v) dedukcyjna zupełność lub pewnego rodzaju maksymalność, *etc.*

Punktem wyjścia niniejszego artykułu jest fakt, że relacja powyższa — prowadząca od intuicyjnie prostej i pierwotnej logiki do pochodnej i zlożonej metalogiki — jest odwracalna. Logikę można bowiem potraktować rownież jako kompleks złożony, rozkładalny na składniki prostsze, intuicyjnie bardziej pierwotne, z których daje się ona złożyć z powrotem i przy pomocy których można ją w pełni zdefiniować. Fakt, że każda z idei (i) - (v), wzięta z osobna, pozwala skonstruować (tę samą) logikę, jest interesujący, a może i pożyteczny. Wyrażając się ścislej, na każdą z idei (i) - (v) można nałożyć pewien zespół warunków takich, że logika, która jest przez nie wyznaczona, pokrywa się dokładnie z logiką klasyczną. Można też pytać w tym kontekście o wzajemną równoważność uzyskanych na tej drodze charakterystyk poszczególnych idei (i) - (v). Charakterystyki poszczególnych idei (i) - (v), jakie tu przedstawiamy, są w rzeczy samej parami równoważne, ą logika, którą każda z nich wyznacza, jest dokładnie logiką klasyczną. Dlatego właśnie nazywamy je charakterystykami klasycznymi. Oczywiście, zespół warunków charakteryzujących każdą z idei (i) - (v) można modyfikować tak, żeby logika, która jest przez ten zespół wyznaczona, pokrywała się z pewną, z góry ustaloną, logiką nieklasyczną. Kwestii tej nie podejmujemy jednak w tym artykule.

Rozważenie każdego z punktów (i) - (v) odbywa się w dwu kolejnych etapach. Na etapie pierwszym — absolutnym (teoriomnogościowym) — abstrahujemy w ogóle od struktury wewnętrznej języka przedmiotowego. Język ten traktujemy na tym etapie po prostu jako niepusty zbior zdań o nieznanej strukturze. Jedyne co zakładamy o tych zdaniach to to, że istnieją. Na etapie drugim — logicznym — analiza zależy również od struktury języka przedmiotowego, wyznaczonej przez jego relatywizację do pewnego ustalonego zbioru stałych logicznych. Pozwala to traktować poszczególne zdania rozważanego języka jako zdania zbudowane z pewnych stałych logicznych, a więc jako zdania złożone.

Konstrukcja logiki opierająca się na idei (i) jest intuicyjnie najbardziej oczywista. Nic więc dziwnego, że standardowe systemy metalogiki są systemami teorio-dowodowymi. Najbardziej znanym systemem tego typu jest Tarskiego teoria konsekwencji zbudowana przez niego w pracach [9], [10] i [11]. Szczegółowe zestawienie późniejszych wyników badawczych w obrębie tej dobrze dziś znanej teorii zawiera praca [12] (por. również [1]). Pewien wariant teorii konsekwencji Tarskiego zarysowany jest również w dalszym ciągu tego artykułu.

Druga rama pojęciowa metalogiki jest oparta na idei (ii). Absolutny, teoriomnogościowy składnik tego programu jest inspirowany przez Tarskiego teorie systemów (por. [11]), jak również przez algebraiczną charakterystykę systemów domknięcia (por. [6] i [2]). Uzupełnienie tego programu o składnik logiczny, zależny od struktury rozważanego języka przedmiotowego, nie nastręcza trudności.

Rama metalogiczna oparta na idei (iii) jako na idei pierwotnej, jest również, jak się zdaje, intuicyjna. Mniej oczywista jest jedynie konsekwentna realizacja tego programu, a zwłaszcza próba realizacji jego składnika absolutnego. Źródłem trudności jest tu fakt, że w praktyce niesprzeczność zdaje się występować zawsze w kontekstach zawierających stałe logiczne, a przynajmniej zawierających negację. Można jednak podać przynajmniej dwa powody, dla których, w punkcie wyjścia, pojęcie niesprzeczności powinno być traktowane niezależnie od jakichkolwiek stałych logicznych. Po pierwsze, wymaga tego program konstrukcji wyjaśnienia stałych logicznych za pomocą pojęcia „niesprzeczności". Po drugie, absolutna, niezależna od struktury rozważanego języka charakterystyka niesprzeczności powinna zawierać warunki konieczne i wystarczające dla jej równoważności z teorią konsekwencji, z teorią systemów dedukcyjnych, z teorią separowalności lub z teorią zupełności. Poniżej scharakteryzujemy zarówno absolutne, jak i względne własności pojęcia niesprzeczności, i wskażemy na równoważność tej charakterystyki z teorią konsekwencji Tarskiego.

Idea (iv), intuicyjnie mniej oczywista niż idee wcześniejsze, prowadzi do kolejnej alternatywy metalogicznej, w ramach której podajemy pewien system charakteryzujący zarówno własności absolutne, jak i własności względne operacji separacji, i pokazujemy równoważność tego systemu z systemem opartym na idei niesprzeczności.

Metalogika oparta na idei (v), jako na idei pierwotnej, jest chyba jeszcze mniej intuicyjna. Jedyna pewna intuicja związana z zupełnością jest taka, że własność ta przysługuje zbiorom dużym. Ponadto próba wyjaśnienia logiki w terminach zupełności jest, jak się zdaje zakłócona również przez fakt, że pojęcie to można artykułować na więcej niż jeden sposób. Poniżej eksperymentujemy z dwiema kategoryzacjami, traktując (v) raz jako pewien operator rozszerzania (nazywamy go tu operatorem Lindenbauma), a drugi raz jako pewną rodzinę maksymalnie rozszerzonych zbiorów.

Omawiane w tym artykule alternatywy metalogiczne sa modelowane na Tarskiego konceptualizacji idei konsekwencji, tj. są one tu potraktowane «w duchu Tarskiego». Jak się wydaje, alternatywy te nie były dotąd przedmiotem odrębnych badań. Próbę ich systematycznej analizy przedstawiłem w pracy [8]. Spośród prac wcześniejszych o podobnej tematyce wymienić należy [5], [7] i [13].

2. Język. Przez S oznaczamy zbiór wszystkich zdań pewnego ustalonego języka przedmiotowego. O zbiorze tym zakładamy jedynie, że jest zbiorem niepustym. Elementy S i podzbiory S symbolizujemy jako A, B, C,..., oraz, odpowiednio, jako X, Y, Z,..., ze wskaźnikami lub bez. Wyrażenia typu $\Phi(X\cup\{A_1, A_2,..., A_n\})$ piszemy, prościej, jako $\Phi(X, A_1, A_2,..., A_n)$. Zbiór potęgowy zbioru X, tj. zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X, oznaczamy przez 2^X. Odpowiednik dualny zbioru potęgowego, tj. zbiór wszystkich nadzbiorów (w obrębie S) zbioru X oznaczamy i definiujemy jako $2_X = \{Y \subseteq \subseteq S: X \subseteq Y\}$. Oczywiscie, $X \in 2^Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \in 2_X$; $2_X \subseteq 2_Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2^Y \subseteq 2^X$; oraz $2^S \subseteq 2_\varnothing$. W dalszym ciągu używamy też wyrażenia „wtw" jako skrótu dla wyrażenia „wtedy i tylko wtedy, gdy".

Jeśli # jest n-argumentowym spójnikiem zdaniowym oraz $A_1, A_2,..., A_n \in$ S, to również $\#A_1, A_2,...,A_n \in$ S. Innymi słowy, zbiór wszystkich zdań rozważanego języka jest zamknięty na spójnik #, ilekroć spójnik ten jest ustalony. Jeśli # jest spójnikiem dwuargumentowym, to zamiast pisać $\#AB$ piszemy, zgodnie z przyjętym zwyczajem, $A\#B$. Dla prostoty, w dalszym ciągu zajmujemy się głównie spójnikami standardowymi negacji ($\neg$) i implikacji ($\rightarrow$).

Powiemy, że X jest zbiorem ($\rightarrow$)-pełnym wtw, dla dowolnych A i B, to, że $A\rightarrow B\in$ S jest równoważne temu, że jeśli $A \in X$, to $B \in X$. Oczywiście, występujacy w ostatnim zdaniu spójnik „jeśli..., to..." jest korelatem metajęzykowym spójnika $\rightarrow$ z rozważanego języka przedmiotowego. Oznaczając ten korelat symbolem $\rightarrow^*$, możemy przepisać powyższą definicję jak następuje: X jest zbiorem ($\rightarrow$)-pełnym wtw, dla dowolnych A i B, to, że $A\rightarrow B \in$ X jest równoważne temu, że $(A\in X)\rightarrow^* (B \in X)$. Podobnie, powiemy, że X jest zbiorem ($\neg$)-pełnym wtw, dla dowolnego A, to, że $\neg A \in X$, jest równoważne temu, że $\neg^*(A \in X)$, tj. temu, że $A \notin X$, ponieważ $\neg^*$ jest korelatem metajęzykowym spójnika z języka przedmiotowego. W ten sposób dochodzimy do następującej definicji ogólnej.

Niech # będzie n-argumentowym spójnikiem zdaniowym. X jest zbiorem (#)- pełnym wtw, dla dowolnych $A_1, A_2,..., A_n$, poniższe warunki są równoważne:

i. $\#A_1 A_2 ... A_n \in X$;

ii. $\#^*(A_1 \in X)(A_2 \in X)...(A_n \in X)$.

Dla uproszczenia notacji wygodnie będzie, jeśli nie doprowadzi to do nieporozumień, opuszczać wskaźnik górny * w wyrażeniu #*. Zgodnie z tą konwencją warunek (ii) można będzie wtedy zapisać jak następuje:

ii′ $\#(A_1 \in X)(A_2 \in X)...(A_n \in X)$.

Mówiąc swobodnie, zbiór X jest pełny ze względu na pewien spójnik wtw, spójnik ten «robi» w X dokładnie to, co sam «mówi, że robi».

3. Operacja konsekwencji. Definicja operacji konsekwencji przy pomocy logiki języka S. Pojęcie konsekwencji, w sensie używanym w tym artykule, wprowadził Tarski. W artykułach ogłoszonych w latach trzydziestych zbudował on teorię konsekwencji, którą zastosował w rozległych badaniach nad takimi własnościami syntaktycznymi systemów dedukcyjnych jak niesprzeczność, zupełność, aksjomatyzowalność, niezależność, definiowalność i rozstrzygalność.

Jak wiadomo, operację konsekwencji można zdefiniować w języku logiki, jeśli logika jest zadana wcześniej i niezależnie od tej operacji. Literatura przedmiotu podaje szereg definicji tego typu (por. np. [4]). Załóżmy, że $X \subseteq \mathbf{S}$ i oznaczmy przez **L** logikę języka **S**. Oznaczmy przez $\mathbf{Pr}(X)$ zbiór wszystkich konsekwencji wszystkich zdań zbioru X, zdefiniowanych przy pomocy **L**. Oto niektóre bardziej znane definicje $\mathbf{Pr}(X)$ w języku logiki **L**.

i. $A \in \mathbf{Pr}(X)$ wtw, A jest prawem logiki **L** lub $A \in X$ lub A wynika z X na podstawie reguł logiki **L**.

ii. $A \in \mathbf{Pr}(X)$ wtw, $A \in \mathbf{Pr}^k(X)$, dla pewnego $k \geq 1$, gdzie $A \in \mathbf{Pr}^k(X)$ jest zdefiniowane przez poniższą rekursję:

a. $A \in \mathbf{Pr}^1(X)$ wtw, $A \in X$ lub A jest prawem logiki L;

b. $A \in \mathbf{Pr}^{n+1}(X)$ wtw, $A \in \mathbf{Pr}^n(X)$ lub istnieją $m \geq 1$ oraz $A_1, A_2,..., A_m \in A \in \mathbf{Pr}^k(X)$ takie, że A wynika z $A_1, A_2,..., A_m$ na podstawie reguł logiki **L**.

(Jest to tzw. definicja z dołu - w górę.)

iii. $A \in \mathbf{Pr}(X)$ wtw, $A \in Y$, dla dowolnego $Y \in 2_X$ zamkniętego na reguły logiki **L**.

(Jest to tzw. definicja z góry - w dół.)

iv. $A \in \mathbf{Pr}(X)$ wtw, istnieją $A_1, A_2,..., A_n \in X$ takie, że $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (... (A_n \rightarrow A)...))$ jest prawem logiki **L**.

(Oczywiście, ta definicja zakłada, że w **S** występuje spójnik $\rightarrow$, lub przynajmniej, że jest on definiowalny przy pomocy spójników pierwotnych języka **S**.)

Z kontekstu powyższego wynika, że **Pr** jest operatorem na zbiorze potęgowym 2^{S} języka S, tj. że jest on operatorem typu $2^{S} \to 2^{S}$, odwzorowującym podzbiory zbioru S na podzbiorach S.

4. Podejście aksjomatyczne do operacji konsekwencji. Konsekwencja jako operator domknięcia. Wprowadzona w poprzednim paragrafie operacja konsekwencji **Pr** jest pewnym konkretnym operatorem na zbiorze potęgowym 2^{S} języka S, a znaczenie tego operatora jest zdeterminowane całkowicie przez którąś z definicji **Pr** przytoczonych w tej sekcji. Od definicji tej zależy cała powstała na tej drodze teoria konsekwencji **Pr**, tj. od definicji tej zależy każde twierdzenie teorii konsekwencji **Pr**.

Formalnie biorąc, wszystkie twierdzenia teorii konsekwencji **Pr** są wypowiedziami o pojęciach **Pr** i S. W tym sensie można je wszystkie traktować jako (S, **Pr**)--twierdzenia. Niektóre spośród tych (S, **Pr**)-twierdzeń, ze względu na ich specjalne własności, zasługują na szczególną uwagę. Analiza względnej mocy dedukcyjnej i ekspresyjnej poszczególnych twierdzeń tego typu wymaga jednak uniezależnienia tych twierdzeń od definicji **Pr**, i potraktowania pojęć S i **Pr** jako pojęć pierwotnych. Dla podkreślenia faktu, że pewne (S, **Pr**)-twierdzenie jest traktowane niezależnie od kontekstu teorii **Pr**, będziemy oznaczać je jako (S, **Cn**)-twierdzenie, gdzie **Cn** oznacza dowolny operator na 2^{S}. Celem tego paragrafu jest analiza względnej siły takich właśnie (S, **Cn**)-twierdzeń.

Mówiąc ściślej, główny problem polega na znalezieniu pewnego (skończonego lub rekursywnego) zespołu (S, **Cn**)-twierdzeń i na udowodnieniu, że twierdzenia tak obranego zespołu stają się prawdziwe po zastąpieniu każdego wystąpienia symbolu **Cn** przez **Pr**, a zespół ten, ze swej strony, pociąga definicję **Pr**.

Jak powiedzieliśmy już wcześniej, analiza tego problemu jest dwuetapowa. Na etapie absolutnym, teoriomnogościowym, występują tylko dwa pojęcia pierwotne: pojęcie zbioru S wszystkich zdań pewnego języka przedmiotowego, oraz pojęcie operatora **Cn** na zbiorze potęgowym zbioru S. Na tym etapie zakładamy o S jedynie to, że jest niepusty, a więc że zawiera pewne zdania, ale nie zakładamy niczego o strukturze tych zdań. Dalsza analiza własności **Cn** zależy już w sposób jawny od struktury syntaktycznej zdań zbioru S. Uwzględniamy ten fakt na etapie drugim, logicznym, na którym zakładamy, że S zawiera zdania złożone, zbudowane z pewnych stałych logicznych. Dla prostoty rozważań ograniczamy się w tym artykule wyłącznie do dwóch spójnikow zdaniowych: negacji ($\neg$) oraz implikacji ($\to$). Czasami jednak będziemy rozważać dowolny n-argumentowy spójnik #. Własności **Cn** zależne od spójnika # nazywamy własnościami relatywnymi do # lub po prostu (#)-własnościami. W celu ściślejszego przedstawienia naszego problemu oraz jego rozwiązania, zaczynamy od następującej definicji.

i. **Cn** jest operatorem domknięcia wtw: **Cn** jest operatorem jałowym na X (tj. $\mathbf{Cn}(X) \subseteq S$), dla dowolnego X; **Cn** jest operatorem zwrotnym (tj. $X \subseteq \mathbf{Cn}(X)$, dla dowolnego X); **Cn** jest operatorem monotonicznym (tj. $X \subseteq Y$ implikuje $\mathbf{Cn}(X) \subseteq \mathbf{Cn}(Y)$, dla dowolnych X i Y); oraz **Cn** jest operatorem idempotentnym (tj. $\mathbf{Cn}(\mathbf{Cn}(X)) \subseteq \mathbf{Cn}(X)$, dla dowolnego X).

ii. **Cn** jest operatorem regularnym wtw, dla dowolnych A i X, to, że $A \notin \mathbf{Cn}(X)$, implikuje istnienie $Y \in 2_X$, dla którego $A \notin \mathbf{Cn}(Y)$, oraz $A \in \mathbf{Cn}(Y, B)$ dla dowolnego $B \notin Y$, tj. wtw, dla dowolnego A, każdy zbiór izolujący A można rozszerzyć do zbioru, który nie posiada nadzbioru właściwego izolującego A.

Cn jest operatorem mocno regularnym wtw, dla dowolnych A i X, to, że $A \notin \mathbf{Cn}(X)$ implikuje istnienie $Y \in 2_X$, dla którego $A \notin \mathbf{Cn}(Y)$, oraz $\mathbf{Cn}(Y, B) = \mathbf{S}$ dla dowolnego $B \notin Y$.

X jest **Cn**-maksymalny (lub, krótko, maksymalny) pod względem izolowania A wtw, $A \notin \mathbf{Cn}(X)$ ale $A \in \mathbf{Cn}(X, B)$ dla dowolnego $B \notin X$, tj. wtw, X izoluje A, ale nie posiada A-izolującego nadzbioru właściwego.

X jest mocno maksymalny wtw, $\mathbf{Cn}(X) \neq \mathbf{S}$ oraz $\mathbf{Cn}(X, B) = \mathbf{S}$ dla dowolnego $B \notin X$.

iii. **Cn** jest operatorem (#)-nasyconym wtw, dla dowolnych A i X, to, że X jest **Cn**-maksymalny pod względem izolowania A, implikuje, że X jest (#) -pełny.

Cn jest operatorem (Δ)-nasyconym wtw, **Cn** jest (#)-nasycony dla dowolnego $\# \in \Delta$, gdzie Δ jest pewnym zbiorem spójnikow zdaniowych.

iv. **Cn** jest operatorem ($\neg$)-zwartym wtw, $\mathbf{Cn}(A, \neg A) = \mathbf{S}$, dla dowolnego A.

v. **Cn** dopuszcza ($\neg$)-cięcia wtw, $\mathbf{Cn}(X, A) \cap \mathbf{Cn}(X, \neg A) \subseteq \mathbf{Cn}(X)$, dla dowolnych A i X.

vi. **Cn** jest operatorem ($\neg$)-klasycznym wtw, dla dowolnych A i X, to, że $A \in \mathbf{Cn}(X)$, jest równoważne temu, że $\mathbf{Cn}(X, \neg A) = \mathbf{S}$.

vii. **Cn** ma własność ($\rightarrow$)-dedukcji wtw, dla dowolnych A, B i X, to, że $A \rightarrow B \in \mathbf{Cn}(X)$ jest równoważne temu, że $B \in \mathbf{Cn}(X, A)$.

viii. **Cn** dopuszcza ($\rightarrow$)-cięcia wtw, $\mathbf{Cn}(X, A) \cap \mathbf{Cn}(X, A \rightarrow B) \subseteq \mathbf{Cn}(X)$, dla dowolnych A, B i X.

ix. **Cn** jest operatorem ($\rightarrow$)-klasycznym wtw, **Cn** ma własność ($\rightarrow$)-dedukcji oraz dopuszcza ($\rightarrow$)-cięcia

x. **Cn** jest operatorem ($\rightarrow, \neg$)-klasycznym wtw, dla dowolnego $m \geq 0$, dowolnych $A_1, A_2, \ldots, A_m, B$, oraz dowolnego X, to, że $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots(A_m \rightarrow B)\ldots) \in \mathbf{Cn}(X)$ jest równoważny tęmu, że $\mathbf{Cn}(X, A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B) = \mathbf{S}$.

Opis ramy pojęciowej dla metalogiki teorio-dowodowej jest w ten sposób zakończony. Jednakże, teoria konsekwencji nie jest głównym tematem tego artykułu. Koncentrujemy się tu raczej na niektórych aspektach relacji zachodzącej między teorią konsekwencji, z jednej strony, a pewnymi alternatywnymi ramami metalogicznymi opartymi na ideach innych niż idea konsekwencji, z drugiej strony. Toteż zamkniemy tę część naszych rozważań raczej pobieżną ilustracją (bez dowodów) pewnych bezpośrednich własności pojęć wprowadzonych w powyższych definicjach, oraz kilku prostych związków między tymi pojęciami.

Uwaga 1.

i. Jeśli **Cn** jest operatorem monotonicznym, to to, że **Cn** jest jałowy na **S**, jest równoważne temu, że jest on jałowy na każdym zbiorze, tj. temu, że **Cn**: $2^{\mathbf{S}} \to 2^{\mathbf{S}}$.

ii. Każdy mocno maksymalny zbiór jest maksymalny pod względem izolowania pewnego zdania A.

iii. Jeśli **Cn** jest operatorem monotonicznym, to dla dowolnego zbioru X, to, że X jest mocno maksymalny, jest równoważne temu, że $\mathbf{Cn}(X) \neq \mathbf{S}$, oraz że $Y = X$ dla dowolnego $Y \in 2^X$, dla którego $\mathbf{Cn}(Y) \neq \mathbf{S}$.

iv. Jeśli **Cn** jest operatorem monotonicznym, to dla dowolnych A i X, to, że X jest maksymalny pod względem separacji A jest równoważne temu, że $A \notin \mathbf{Cn}(X)$, oraz że $Y = X$, dla każdego $Y \in 2^X$, dla którego $A \notin \mathbf{Cn}(Y)$.

v. Jeśli **Cn** jest operatorem domknięcia oraz X jest zbiorem maksymalnym pod względem izolowania pewnego zdania A, to $\mathbf{Cn}(X) = X$.

vi. Jeśli **Cn** jest regularnym operatorem domknięcia oraz $\Delta \subseteq \{\neg, \to\}$, to to, że **Cn** jest operatorem (Δ)-nasyconym, jest równoważne temu, że **Cn** jest operatorem (Δ)-klasycznym.

Obserwacje powyższe mogą być pomocne przy lekturze dalszych części artykułu.

5. Niesprzeczność.

5.1. Definicja niesprzeczności. W tym paragrafie pokazujemy, że teoria mocno regularnych konsekwencji, tj. mocno regularnych operatorów domknięcia na zbiorze potęgowym zbioru wszystkich zdań ustalonego języka przedmiotowego, z jednej strony, oraz teoria regularnych klas (własności) niesprzeczności, z drugiej strony, są wzajem równoważne.

Zazwyczaj pojęcie „niesprzeczności" jest definiowane za pomocą pojęcia „konsekwencji". Podamy najpierw dobrze znaną definicję pochodzącą od Posta. Oznaczmy przez $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Pr}}$ klasę wszystkich niesprzecznych zbiorów zdań, jakie można zdefiniować w obrębie zbioru **S** wszystkich zdań rozważanego języka za pomocą pojęcia **Pr** wprowadzonego w poprzednim paragrafie. Definicja $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Pr}}$ brzmi jak następuje:

i. Jeśli **Pr** jest operacją konsekwencji, zdefiniowaną w poprzednim paragrafie, to $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Pr}} = \{X : \mathbf{Pr}(X) \neq \mathbf{S}\}$.

Wedle tej definicji, $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Pr}}$ jest klasą wszystkich **Pr**-zamkniętych podzbiorów właściwych zbioru **S**. Wyraża ona więc podstawową intuicję niesprzecznosci jako własności zbiorów małych. Widzimy też, że wedle tej definicji $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Pr}}$ nie zależy w ogóle od żadnych stałych logicznych. Najczęściej spotykana w praktyce definicja „niesprzeczności", jako pojęcia zależnego od stałych logicznych, jest definicją „niesprzeczności" za pomocą pojęcia „negacji". Oznaczmy klasę wszystkich niesprzecznych zbiorów zdań, jakie można zdefiniować w obrębie zbioru **S** za pomocą pojęcia **Pr** i $\neg$, przez $\mathbf{Cons}_{(\mathbf{Pr},\ \neg)}$. Definicja tej klasy brzmi następująco:

ii. Jeśli **Pr** jest operacją konsekwencji, zdefiniowaną w poprzedniej sekcji, to $\mathbf{Cons}_{(\mathbf{Pr},\ \neg)} = \{X: \neg A \notin \mathbf{Cn}(X, A)$, dla dowolnego $A\} = \{X$: to, że $A \in \mathbf{Cn}(X)$, implikuje, że $A \notin \mathbf{Cn}(X)$, dla dowolnego $A\}$.

5.2. Aksjomatyzacja pojęcia niesprzeczności. Jasne jest, że jeśli przyjmiemy jakieś konkretne twierdzenie o niesprzeczności w charakterze aksjomatu charakteryzującego „niesprzeczność" jako pojęcie pierwotne, to musimy twierdzenie to nie tylko odizolować od kontekstu teorii konsekwencji, ale również, przynajmniej na etapie absolutnym, pokazać możliwość podania jego charakterystyki niezależnie od jakichkolwiek stałych logicznych. Musimy też być w stanie efektywnie rozpoznać występujące w tym twierdzeniu pojęcie „niesprzeczności" jako pojęcie pierwotne, a więc jako różne od $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Pr}}$ lub od $\mathbf{Cons}_{(\mathbf{Pr},\ \neg)}$. Zgodnie z tym wymogiem, pojęcie „niesprzeczności", potraktowane jako pojęcie pierwotne, oznaczamy odtąd symbolem **Cons**. Analizę problemu aksjomatyzacji **Cons** poprzedzimy definicją, która pozwala uściślić wszystkie użyte tu pojęcia pomocnicze.

i. **Cons** jest klasą (własnością) niesprzeczności wtw: **Cons** jest klasą nietrywialną (tj. $\mathbf{S} \notin \mathbf{Cons}$); oraz **Cons** jest klasą dziedziczną (tj. to, że $Y \in \mathbf{Cons} \cap 2^X$, implikuje $X \in \mathbf{Cons}$, dla dowolnych X i Y).

ii. X jest **Cons**-maksymalny (lub, krócej, maksymalny) wtw, X jest maksymalnym (ze względu na inkluzję) elementem klasy **Cons**, tj. wtw, $X \in \mathbf{Cons}$ oraz $Y = X$, dla dowolnego $Y \in \mathbf{Cons} \cap 2^X$.

iii. **Cons** jest klasą regularną wtw, dla dowolnego X, to, że $X \in \mathbf{Cons}$, implikuje istnienie **Cons**-maksymalnego rozszerzenia zbioru X, tj. wtw, wszystkie elementy klasy **Cons** są inkluzja-maksymalizowalne.

iv. **Cons** jest klasą (#)-nasyconą wtw, dla dowolnego X, to, że X jest **Cons**-maksymalny, implikuje, że jest on (#)-pełny.

Cons jest klasą (Δ)-nasyconą wtw, **Cons** jest klasą (#)-nasyconą, dla dowolnego $\# \in \Delta$, gdzie Δ jest pewnym zbiorem spójników.

v. **Cons** jest klasą ($\neg$)-zwartą wtw, $\{A, \neg A\} \notin \mathbf{Cons}$, dla dowolnego A.

vi. **Cons** dopuszcza ($\neg$)-ekspansję wtw, to, że $X \in \mathbf{Cons}$, implikuje, że $X \cup \{A\} \in \mathbf{Cons}$ lub $X \cup \{\neg A\} \in \mathbf{Cons}$, dla dowolnych A i X.

vii. **Cons** jest klasą ($\neg$)-klasyczną wtw, **Cons** jest klasą ($\neg$)-zwartą i dopuszczającą ($\neg$)-ekspansję.

viii. **Cons** jest klasą ($\rightarrow$)-analityczną wtw, to, że $X \cup \{A \rightarrow B, A\} \in \mathbf{Cons}$, implikuje, że $X \cup \{A, B\} \in \mathbf{Cons}$, dla dowolnych A, B i X.

ix. **Cons** jest klasą ($\rightarrow$)-syntetyczną wtw, to, że $X \cup \{B\} \in$ **Cons**, implikuje, że $X \cup \{A \rightarrow B\} \in$ **Cons**, dla dowolnych A, B i X.

x. **Cons** dopuszcza ($\rightarrow$)-ekspansję wtw, to, że $X \in$ **Cons**, implikuje, że $X \cup \{A\} \in$ **Cons** lub $X \cup \{A \rightarrow B\} \in$ **Cons**, dla dowolnych A, B i X.

xi. **Cons** jest klasą ($\rightarrow$)-klasyczną wtw, **Cons** jest klasą ($\rightarrow$)-analityczną, ($\rightarrow$)-syntetyczną, dopuszczającą ($\rightarrow$)-ekspansję.

xii. **Cons** jest klasą ($\rightarrow$, $\neg$)-klasyczną wtw, to, że $X \cup \{A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots (A_m \rightarrow B)\ldots))\} \in$ **Cons**, jest równoważne temu, że $X \cup \{A_1, A_2, \ldots, A_m, B\} \notin$ **Cons**, dla dowolnego $m \geq 0$, dowolnych A_1, $A_2, \ldots, A_m$, B, i dowolnego **Cons**-maksymalnego zbioru X.

Obserwacja poniższa uwidacznia jedną z ważniejszych własności logicznych (klasycznego) pojęcia niesprzeczności **Cn**.

Uwaga 2.

Jeśli **Cons** jest regularną klasą niesprzeczności oraz $\Delta \subseteq \{\neg, \rightarrow\}$, to jest ona klasą ($\Delta$)-nasyconą wtw, jest klasą (Δ)-klasyczną.

5.3. Regularne klasy niesprzeczności a mocno regularne operatory domknięcia. Twierdzenie poniższe, które przytaczamy tu bez dowodu (szczegółowy dowód tego twierdzenia znajduje się w [8]), podaje warunki (definicyjnej lub ekspresyjnej) równoważności teorii niesprzeczności **Cons** i klasycznej teorii konsekwencji.

Twierdzenie 1.

i. Jeśli **Cn** jest mocno regularnym operatorem domknięcia i jeśli przyjmiemy, że $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Cn}} = \{X \subseteq S: \mathbf{Cn}(X) \neq S\}$, to $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Cn}}$ jest regularną klasą niesprzeczności.
Jeśli **Cons** jest regularną klasą niesprzeczności i dla dowolnych A i X przyjmiemy, że:
$A \in \mathbf{Cn}_{\mathbf{Cons}}(X)$ wtw, $Y \cup \{A\} \in$ **Cons**, dla dowolnego $Y \in \mathbf{Cons} \cup 2_X$,
to $\mathbf{Cn}_{\mathbf{Cons}}$ jest mocno regularnym operatorem domknięcia.

ii. Jeśli **Cn** jest mocno regularnym operatorem domknięcia, to $\mathbf{Cn}_{\mathbf{Cons}_{\mathbf{Cn}}} = \mathbf{Cn}$.
Jeśli **Cons** jest regularną klasą niesprzeczności, to $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Cn}_{\mathbf{Cons}}} = \mathbf{Cons}$.

iii. Jeśli operator **Cn** jest (#)-nasycony, to $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Cn}}$ jest klasą (#)-nasyconą. Jeśli klasa **Cons** jest (#)-nasycona, to $\mathbf{Cn}_{\mathbf{Cons}}$ jest operatorem (#)-nasyconym.

Z twierdzenia 1;ii wynika natychmiast, że definicja $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Cn}}$ za pomocą pojęcia **Cn** oraz definicja $\mathbf{Cn}_{\mathbf{Cons}}$ za pomocą pojęcia **Cons** ustalają odpowiedniość jedno-jednoznaczną pomiędzy mocno regularnymi operatorami domknięcia a regularnymi klasami niesprzeczności.

5.4. Kilka uwag na temat wzajemnego stosunku konsekwencji i niesprzeczności. W świetle twierdzenia 1, niesprzeczność i konsekwencja sa nawzajem definiowalne, i fakt ten daje się ustalić na poziomie absolutnym, niezależnym od struktury języka przedmiotowego. W rezultacie, klasyczna teoria niesprzeczności jest równoważna klasycznej teorii konsekwencji i każda z tych teorii determinuje tę samą (klasyczną) logikę. W tym miejscu warto wspomnieć, że składnik absolutny idei (iii) został zainspirowany przez Suszkę jeszcze w latach sześćdziesiątych (por. [13]).

Tradycyjna charakterystyka niesprzeczności zakłócona jest przez obecność spójnika negacji. W rzeczy samej, wedle definicji Arystotelesowkiej:

i. Zbiór zdań X pewnego języka jest niesprzeczny wtw, nie istnieje zdanie A w tym języku takie, że A i $\neg A$ sa jednocześnie konsekwencjami X.

Jest jasne, że przedstawiając niesprzeczność jako własność «pasożytującą» na negacji, definicja powyższa ogranicza w sposób istotny zakres stosowalności tego pojęcia. Tradycyjnie zdefiniowana niesprzeczność nie stosuje się do fragmentów pozytywnych (beznegacyjnych) ekspresyjnie pełnego języka. Dzięki dobrze znanemu rezultatowi Posta negacja daje się jednak wyeliminować całkowicie z definicji niesprzeczności.

Negacja bywa przedstawiana jako katalizator również w znanych obiegowych definicjach konsekwencji odwołujących się do niesprzeczności. Jedna z takich definicji, przypisywana Carnapowi, wygląda jak następuje:

ii. Zdanie A jest konsekwencją zbioru zdań X wtw, negacja A jest sprzeczna z X, tj. wtw, zbiór $X \cup \{\neg A\}$ jest sprzeczny.

Jednym z wyników niniejszego artykułu jest to, że adekwatna charakterystyka konsekwencji za pomocą niesprzeczności nie musi w ogóle zależeć od negacji. Jedną z takich możliwości realizuje właśnie definicja użyta w twierdzeniu 1, tj. definicja:

iii. A jest konsekwencją zbioru X wtw, dla dowolnego zbioru zdań Y, to, że X jest niesprzeczny z Y, implikuje, że A jest niesprzeczne z $X \cup Y$.

Warto może zauważyć, że w definicji powyższej nie można zastąpić zbioru zdań Y przez pojedyncze zdanie B, a przynajmniej nie można tego zrobić na poziomie absolutnym, niezależnym od struktury języka przedmiotowego. Jednakże, następująca definicja:

iv. A jest konsekwencją zbioru X wtw, A jest elementem każdego inkluzja-maksymalnego niesprzecznego rozszerzenia zbioru X

jest (absolutnie) równoważna definicji (iii).

Warto też zauważyć, że — jak to pokazuje wgląd w dowód równoważności ekspresywnej teorii niesprzeczności i teorii konsekwencji — dowód ten zależy istotnie od tego, co nazywamy „regularnością niesprzeczności" oraz od skorelowanej z regularnością niesprzeczności mocnej regularności konsekwencji. Zwykła, tj. słaba, regularność konsekwencji nie pozwala dowieść równoważności tych dwu teorii.

6. Separacja lub omijanie.

6.1. Operatory separacji a klasy niesprzeczne. Poziom absolutny. Zajmiemy się tu abstrakcyjną ideą separacji lub omijania. Podobnie jak w paragrafach poprzednich, podejście nasze do tej idei jest aksjomatyczne. Znaczy to, że traktujemy separację jako ideę pierwotną. Mówiąc dokładniej, traktujemy ją jako relację między zbiorami zdań języka przedmiotowego, z jednej strony, a zdaniami tego języka, z drugiej strony, zawartość tej relacji wyjaśniamy zaś za pomocą kilku prostych aksjomatów. Podobnie jak w wypadku wcześniej omawianych idei konsekwencji i niesprzeczności, wyjaśnianie to prowadzimy na dwu poziomach, absolutnym i logicznym.

W celu uzasadnienia uzyskanej w ten sposob aksjomatyzacji powołujemy się na fakt, że rama metalogiczna oparta na idei separacji daje sie zinterpretować jedno-jednoznacznie we wcześniej opisanej ramie opartej na klasycznej idei niesprzeczności oraz, że interpretacja ta zachowuje dowodliwość twierdzeń w obu kierunkach, tj. w kierunku od teorii niesprzeczności do teorii separacji oraz w kierunku od teorii separacji do teorii niesprzeczności. Dostarcza to dowodu «zewnętrznej» niesprzeczności dla opisanej poniżej teorii separacji oraz pokazuje, że logika, która jest przez tę teorię zdeterminowana, jest dokładnie logiką klasyczną. Powtórzmy, że pomijamy w tym artykule skądinąd interesująca kwestię dotyczącą tego, jak zmodyfikować warunki nałożone na separację, z jednej strony, oraz na niesprzeczność, z drugiej strony, aby logika, która jest przez każdą z tych teorii zdeterminowana, pokryła się z pewną z góry ustaloną logiką nieklasyczną.

Jak to już powiedzieliśmy wcześniej, będziemy tu definiować pojęcie „separacji" jako relację między podzbiorami zbioru $\mathbf{S}$, z jednej strony, a zdaniami tego zbioru, z drugiej strony. Dla uproszczenia dalszej analizy używamy wyrażenia „$X \in \mathrm{O}(A)$" aby powiedzieć, że zbiór zdań X separuje zdanie A lub że X omija A. Wynika stąd, że O jest odwzorowaniem takim, że $\mathrm{O}\colon \mathrm{S} \to 2^{2^{\mathrm{S}}}$. Analizę własności tak rozumianego odwzorowania O rozpoczynamy od jego własności absolutnych. W związku z tym przyjmujemy następującą definicję.

i. O jest operatorem trywialnym wtw, istnieje A takie, że $\mathrm{S} \in \mathrm{O}(A)$. W przeciwnym wypadku, tj. wtw, $\mathrm{S} \notin \mathrm{O}(A)$, dla każdego A, O jest operatorem nietrywialnym.

ii. O jest operatorem dziedzicznym wtw, to, że $X \subseteq Y \in \mathrm{O}(A)$, implikuje, że $X \in \mathrm{O}(A)$, dla dowolnych A, X oraz Y.

iii. O jest operatorem rozdzielczym wtw, to, że $X \in \mathrm{O}(A)$, implikuje, że $A \notin X$, dla dowolnych A i X.

iv. O jest operatorem separacyjnie-pełnym wtw, to, że $X \in \mathrm{O}(A)$, implikuje, że $\{B\colon X \notin \mathrm{O}(B)\} \in \mathrm{O}(A)$, dla dowolnych A i X. Innymi słowy, jeśli X separuje A, to zbiór wszystkich tych zdań, których X nie separuje, również separuje A.

v. O jest operatorem separacji wtw, O jest operatorem nietrywialnym, dziedzicznym i separacyjnie-pełnym.

vi. X jest zbiorem O-maksymalnym ze względu na A wtw, $X \in \mathrm{O}(A)$ oraz, dla dowolnych B i C to, że $X \cup \{B\} \in \mathrm{O}(C)$, implikuje, że $B \in X$.

X jest zbiorem O-maksymalnym wtw, X jest zbiorem O-maksymalnym ze względu na A, dla pewnego A.

vii. **O** jest operatorem regularnym wtw, dla dowolnych A i X, to, że $X \in \mathbf{O}(A)$, implikuje istnienie $Y \in \mathbf{O}(A) \cap 2_X$ takiego, że $B \in Y$, dla dowolnych B i C, dla których $Y \cup \{B\} \in \mathbf{O}(C)$.

Uwaga 3.

Jeśli **O** jest operatorem separacji, to dla dowolnego X to, że X jest zbiorem O-maksymalnym, implikuje, że $\{B: X \notin \mathbf{O}(B)\} = X$.

Można udowodnić następujące twierdzenie (równoległe do twierdzenia 1), które pokazuje, w jaki sposób własności regularnych operatorów separacji dają sie «odcyfrować» z własności regularnych klas niesprzeczności i *vice versa*.

Twierdzenie 2.

i. Niech **Cons** będzie regularną klasą niesprzeczności. Załóżmy, że dla dowolnych A i X, $X \in \mathbf{O}_{\mathbf{Cons}}(A)$ wtw, istnieje $Y \in \mathbf{Cons} \cap 2_X$ takie, że $Y \cup \{A\} \notin$ **Cons**. Wtedy $\mathbf{O}_{\mathbf{Cons}}$ jest regularnym operatorem separacji.

   Niech **O** będzie regularnym operatorem separacji. Załóżmy, że: $\mathbf{Cons_O} = \cup\{\mathbf{O}(A): A \in \mathbf{S}\}$. Wtedy $\mathbf{Cons_O}$ jest regularną klasą niesprzeczności.

ii. Jeśli **Cons** jest regularną klasą niesprzeczności, to $\mathbf{Cons}_{\mathbf{O}_{\mathbf{Cons}}} = \mathbf{Cons}$. Jeśli **O** jest regularnym operatorem separacji, to $\mathbf{O}_{\mathbf{Cons_O}} = \mathbf{O}$.

Z twierdzenia 2;ii wynika natychmiast, że definicja $\mathbf{O}_{\mathbf{Cons}}$ za pomocą **Cons** oraz definicja $\mathbf{Cons_O}$ za pomocą **O** ustala odpowiedniość jedno-jednoznaczną pomiędzy regularnymi operatorami separacji oraz regularnymi klasami niesprzeczności.

6.2. Własności logiczne operatorów separacji. Jak już powiedzieliśmy, analiza operatora separacji jest prowadzona na dwu poziomach: absolutnym i logicznym. Własności absolutne tego operatora omawialiśmy w paragrafie poprzednim. Dalsza analiza własności **O** zakłada, że w **S** istnieją zdania złożone, zbudowane z pewnych ustalonych spójników zdaniowych. Dwa takie spójniki zostały ustalone jako spójnik negacji $\neg$ i spójnik implikacji $\rightarrow$. W wypadkach, w których chcemy mówić o dowolnym spójniku, oznaczamy go przez # i zakładamy, że jest on n-argumentowy. Własności operatora **O** relatywne względem spójnika # nazywamy (#)-własnościami. Przyjmujemy też następującą definicję.

i. **O** jest operatorem (#)-nasyconym wtw, dla dowolnego X, to, że X jest zbiorem O-maksymalnym, implikuje, że X jest (#)-zupełny.

   O jest operatorem (Δ)-nasyconym wtw, **O** jest (#)-nasycony, dla każdego $\# \in \Delta$, gdzie Δ jest zbiorem spójników zdaniowych.

ii. **O** jest operatorem ($\neg$)-klasycznym wtw, dla dowolnych A i X, to, że $X \in \mathbf{O}(A)$, jest równoważne temu, że $X \cup \{\neg A\} \in \cup\{\mathbf{O}(B): B \in \mathbf{S}\}$.

iii. Operator **O** ma własność $(\rightarrow)$-dedukcji wtw, to, że $X \in \mathbf{O}(A \rightarrow B)$, jest równoważne temu, że $X \cup \{A\} \in \mathbf{O}(B)$, dla dowolnych A, B i X.

iv. **O** dopuszcza $(\rightarrow)$-ekspansję wtw, to, że $X \in \mathbf{O}(C)$, implikuje, że $X \cup \{A\} \in \mathbf{O}(C)$ lub $X \cup \{A \rightarrow B\} \in \mathbf{O}(C)$, dla dowolnych A, B, C i X.

v. **O** jest operatorem $(\rightarrow)$-klasycznym wtw, **O** ma własność $(\rightarrow)$-dedukcji i dopuszcza $(\rightarrow)$-ekspansję.

vi. **O** ma własność $(\rightarrow, \neg)$-dedukcji rzędu m wtw, to, że $X \in \mathbf{O}(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots(A_m \rightarrow B)\ldots)))$, jest równoważne temu, że $X \cup \{A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B\} \in \cup\{\mathbf{O}(C): C \in \mathbf{S}\}$, dla dowolnych $A_1, A_2, \ldots, A_m$ i B.

vii. **O** jest operatorem $(\rightarrow, \neg)$-klasycznym wtw, **O** ma własność $(\rightarrow, \neg)$-dedukcji rzędu m, dla dowolnego $m \geq 0$.

Zauważmy, ze **O** ma własność $(\rightarrow, \neg)$-dedukcji rzędu 0 wtw, **O** jest operatorem $(\neg)$-klasycznym.

Twierdzenie 3.

Niech **O** będzie regularnym operatorem separacji. Wtedy:

i. **O** jest $(\neg)$-nasycony wtw, **O** jest $(\neg)$-klasyczny.

ii. **O** jest $(\rightarrow)$-nasycony wtw, **O** jest $(\rightarrow)$-klasyczny.

iii. **O** jest $(\rightarrow, \neg)$-nasycony wtw, **O** jest $(\rightarrow, \neg)$-klasyczny wtw, **O** ma własność $(\rightarrow, \neg)$-dedukcji rzędu m, dla dowolnego m takiego, że $0 \leq m \leq 1$.

Uwaga 4.

Jeśli **O** jest regularnym operatorem separacji, to **O** jest operatorem (Δ)-nasyconym wtw, **O** jest operatorem (Δ)-klasycznym, dla każdego $\Delta \subseteq \{\neg, \rightarrow\}$.

Zauważmy, że uwaga 4 daje się uogólnić również na pozostałe spójniki standardowe, takie jak koniunkcja $(\wedge)$, alternatywa $(\vee)$ czy równoważność $(\equiv)$. W rzeczy samej, nie trudno jest tak scharakteryzować przymiotnik „klasyczny" w odniesieniu do tych spójników, ażeby również i w tych wypadkach przymiotnik ten był równozakresowy z przymiotnikiem „nasycony".

6.3. Separacja i niesprzeczność. Poziom logiczny. Paragraf poprzedni jest pewnym krokiem w kierunku bardziej systematycznego badania własności nasycenia klasycznego operatora separacji, tj. operatora separacji charakterystycznego dla logiki klasycznej. Systematyczne badanie separacji nie jest jednak głównym tematem tego artykułu. Toteż, zamykając rozważania poświęcone ramie metalogicznej opartej na separacji, przytoczymy twierdzenie, które przenosi rozważanie relacji między separacją, z jednej strony, a niesprzecznością, z drugiej strony, z poziomu absolutnego do poziomu logicznego.

Twierdzenie 4.

i. Jeśli **Cons** jest (#)-nasyconą regularną klasą niesprzeczności, to $\mathbf{O}_{\mathbf{Cons}}$ jest operatorem (#)-nasyconym.

ii. Jeśli **O** jest (#)-nasyconym regularnym operatorem separacji, to **Conso** jest klasą (#)-nasyconą.

Ostatnie dwa paragrafy, w których omawiamy dwa warianty aksjomatyzacji idei maksymalizacji, potraktujemy bardziej pobieżnie, tym bardziej, że są one skonstruowane wedle tego samego wzoru co paragrafy wcześniejsze.

7. Operatory Lindenbauma. Na mocy znanego lematu Lindenbauma o rozszerzeniach, każdy niesprzeczny podzbiór zbioru **S** wszystkich zdań ustalonego języka przedmiotowego daje się rozszerzyć do niesprzecznego i dedukcyjnie zupełnego podzbioru **S**. Jednakże rozszerzenie takie nie musi być jednoznaczne. Przejście od jakiegoś zbioru niesprzecznego do pewnego jego rozszerzenia zarazem niesprzecznego i zupełnego nie jest, w ogólnym przypadku, odwzorowaniem. Jeden ze sposobów wprowadzenia idei odwzorowania do analizy rozszerzeń tego typu polega na skorelowaniu z każdym podzbiorem **S**, sprzecznym lub niesprzecznym, rodziny wszystkich zarazem niesprzecznych i zupełnych rozszerzeń tego podzbioru. Oczywiście, uzyskane w ten sposób odwzorowania sa odwzorowaniami typu $2^{\mathbf{S}} \rightarrow 2^{2^{\mathbf{S}}}$.

Wszystkie omawiane w tym paragrafie operatory Lindenbauma są odwzorowaniami tego typu. Podobnie jak i w poprzednich paragrafach, analiza nasza jest prowadzona metodą aksjomatyczną. Znaczy to, że — na etapie absolutnym — operujemy dwoma pojęciami pierwotnymi, które oznaczamy jako **S** i **Lin**, gdzie **Lin**: $2^{\mathbf{S}} \rightarrow 2^{2^{\mathbf{S}}}$. Na etapie logicznym dodajemy do tej listy dwa specyficzne spójniki $\neg$ i $\rightarrow$ lub parametryczny spójnik #, reprezentujący dowolny n-argumentowy spójnik zdaniowy. Dla uproszczenia dalszego wywodu wprowadzamy definicję, której celem jest zwrócenie uwagi na pewne specjalne własności wymienionych pojęć pierwotnych.

i. **Lin** jest operatorem trywialnym na X wtw, $\mathbf{S} \in \mathbf{Lin}(X)$, dla każdego X.
   Lin jest operatorem trywialnym wtw, **Lin** jest operatorem trywialnym na X dla pewnego X. W przeciwnym wypadku, **Lin** jest operatorem nietrywialnym.
ii. **Lin** jest operatorem ekspansywnym wtw, $\mathbf{Lin}(X) \subseteq 2_X$, dla każdego X.
iii. **Lin** jest operatorem antymonotonicznym wtw, to, że $X \subseteq Y$, implikuje, że $\mathbf{Lin}(Y) \subseteq \mathbf{Lin}(X)$, dla dowolnych X, Y.
iv. **Lin** jest operatorem inkluzywnym wtw, $\mathbf{Lin}(\varnothing) \cap 2_X \subseteq \mathbf{Lin}(X)$, dla każdego X.
v. **Lin** jest operatorem Lindenbauma wtw, **Lin** jest operatorem nietrywialnym, ekspansywnym, antymonotonicznym i inkluzywnym.
vi. **Lin** jest operatorem regularnym wtw to, że $Y \in \mathbf{Lin}(X)$ oraz $X \in \mathbf{Lin}(\varnothing)$, implikuje, że $X = Y$, dla dowolnych X, Y.
vii. **Lin** jest operatorem (#)-nasyconym wtw, to, że $X \in \mathbf{Lin}(\varnothing)$, implikuje, że X jest zbiorem (#)-zupełnym, dla każdego X.
viii. **Lin** jest operatorem ($\neg$)-zwartym wtw, $\mathbf{Lin}(A) \cap \mathbf{Lin}(\neg A) = \varnothing$, dla każdego A.

ix. **Lin** jest operatorem $(\neg)$-ekspansywnym wtw, $\mathbf{Lin}(X, A) \cup \mathbf{Lin}(X, \neg A) = \mathbf{Lin}(X)$, dla dowolnych A i X.

x. **Lin** jest operatorem $(\neg)$-klasycznym wtw, **Lin** jest operatorem $(\neg)$-zwartym i $(\neg)$-ekspansywnym.

xi. **Lin** jest operatorem $(\rightarrow)$-analitycznym wtw, $\mathbf{Lin}(X, A \rightarrow B) \cap \mathbf{Lin}(X, A) \subseteq \mathbf{Lin}(X, B)$, dla dowolnych A, B i X.

xii. **Lin** jest operatorem $(\rightarrow)$-syntetycznym wtw, $\mathbf{Lin}(X, B) \subseteq \mathbf{Lin}(X, A \rightarrow B)$, dla dowolnych A, B i X.

xiii. **Lin** jest operatorem $(\rightarrow)$-ekspansywnym wtw, $\mathbf{Lin}(X, A) \cup \mathbf{Lin}(X, A \rightarrow B) = \mathbf{Lin}(X)$, dla dowolnych A, B i X.

xiv. **Lin** jest operatorem $(\rightarrow)$-klasycznym wtw, **Lin** jest operatorem $(\rightarrow)$-analitycznym, $(\rightarrow)$-syntetycznym i $(\rightarrow)$-ekspansywnym.

xv. **Lin** jest operatorem $(\rightarrow, \neg)$-klasycznym wtw, $\mathbf{Lin}(X, A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots (A_m \rightarrow B)\ldots))) \cap \mathbf{Lin}(X, A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B) = \varnothing$, i $\mathbf{Lin}(X, A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots (A_m \rightarrow B)\ldots))) \cup \mathbf{Lin}(X, A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B) = \mathbf{Lin}(\varnothing)$, dla dowolnego $m \geq 0$, dowolnych $A_1, A_2, \ldots, A_m, B$, oraz dla dowolnego **Cons**-maksymalnego zbioru X.

Uwaga poniższa daje pewien wgląd we własności, zarówno absolutne, jak i logiczne, ramy pojęciowej opartej na **Lin** jako na pojęciu pierwotnym.

Uwaga 5.

i. Jeśli **Lin** jest operatorem antymonotonicznym, to to, że jest on operatorem trywialnym jest równoważne temu, że jest on trywialny na zbiorze $\varnothing$.

ii. Jeśli **Lin** jest operatorem Lindenbauma, to **Lin** jest operatorem (Δ)-nasyconym wtw, jest on operatorem (Δ)-klasycznym.

Przechodząc teraz do charakterystyki relacji zachodzącej między ramą metalogiczną opartą na **Lin**, z jednej strony, a ramą opartą na **Cons**, z drugiej strony, mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.

i. Niech **Cons** będzie regularną klasą niesprzeczności. Dla dowolnych X i Y załóżmy, że: $Y \in \mathbf{Lin}_{\mathbf{Cons}}(X)$ wtw, $Y \in \mathbf{Cons} \cap 2_Y$ oraz $Z = Y$ dla dowolnych $Z \in \mathbf{Cons} \cap 2_Y$. Wtedy $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cons}}$ jest regularnym operatorem Lindenbauma.

   Niech **Lin** będzie regularnym operatorem Lindenbauma. Dla dowolnego X załóżmy, że: $X \in \mathbf{Cons}_{\mathbf{Lin}}$ wtw, $\mathbf{Lin}(\varnothing) \cap 2_X \neq \varnothing$. Wtedy $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Lin}}$ jest regularną klasą niesprzeczności.

ii. Jeśli **Cons** jest regularną klasą niesprzeczności, to $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cons}}} = \mathbf{Cons}$. Jeśli **Lin** jest regularnym operatorem Lindenbauma, to $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cons}_{\mathbf{Lin}}} = \mathbf{Lin}$.

iii. Jeśli klasa **Cons** jest (#)-nasycona, to $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cons}}$ jest operatorem (#)-nasyconym. Jesli operator **Lin** jest (#)-nasycony, to $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Lin}}$ jest klasą (#)-nasyconą.

Z twierdzenia 5;ii wynika natychmiast, że definicja $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cons}}$ za pomocą **Cons** oraz definicja $\mathbf{Cons}_{\mathbf{Lin}}$ za pomocą **Lin** ustalają odpowiedniość jedno-jednoznaczną pomiędzy regularnymi klasami niesprzeczności a regularnymi operatorami Lindenbauma.

8. Maksymalne rodziny zbiorów. Idea maksymalizacji daje się zaksjomatyzować nie tylko jako pewnego rodzaju odwzorowanie, tak jak np. operatory Lindenbauma z poprzedniego paragrafu, ale również przez odwołanie do rodzin maksymalnie rozszerzonych zbiorów zdań. Oznaczmy przez **Cpl** dowolną taką rodzinę i przyjmijmy następującą definicję, w której koncentrujemy się na pewnych aspektach tak rozumianej reprezentacji idei maksymalizacji.

i. **Cpl** jest rodziną trywialną wtw, $S \in \mathbf{Cpl}$.

ii. **Cpl** jest rodziną regularną wtw, to, że $X \in \mathbf{Cpl}$ oraz $Y \in \mathbf{Cpl} \cap 2_X$, implikuje, że $X = Y$, dla dowolnych X, Y.

iii. **Cpl** jest rodziną maksymalną wtw, jest ona zarazem rodziną nietrywialną i regularną.

iv. **Cpl** jest rodziną (#)-nasyconą wtw, to, że $X \in \mathbf{Cpl}$, implikuje, że X jest zbiorem (#)-zupełnym, dla dowolnego X.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.

i. Niech **Lin** będzie regularnym operatorem Lindenbauma. Załóżmy, że: $\mathbf{Cpl}_{\mathbf{Lin}} = \{X: X \in \mathbf{Lin}(\varnothing)\}$. Wtedy $\mathbf{Cpl}_{\mathbf{Lin}}$ jest rodziną maksymalną.

Niech **Cpl** będzie rodziną maksymalną. Dla dowolnego X załóżmy, że: $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cpl}}(X) = \{Y \in 2_X: Y \in \mathbf{Cpl}\}$. Wtedy $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cpl}}$ jest regularnym operatorem Lindenbauma.

ii. Jeśli **Lin** jest regularnym operatorem Lindenbauma, to $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cpl}_{\mathbf{Lin}}} = \mathbf{Lin}$.

Jeśli **Cpl** jest rodziną maksymalną, to $\mathbf{Cpl}_{\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cpl}}} = \mathbf{Cpl}$.

iii. Jeśli operator **Lin** jest (#)-nasycony, to $\mathbf{Cpl}_{\mathbf{Lin}}$ jest rodziną (#)-nasyconą. Jeśli rodzina **Cpl** jest (#)-nasycona, to $\mathbf{Lin}_{\mathbf{Cpl}}$ jest operatorem (#)-nasyconym.

Bibliografia

[1] Blok, W. J.; Pigozzi, D.; „Algebraizable Logics", *Memoirs of the American Mathematical Society*, 77(1989), s.78.

[2] Cohn, P. M.; *Universal Algebra*, New York, 1965.

[3] Łoś, J.; Suszko, R; „Remarks on Sentential Logics", *Proc. Kon. Nederl. Akad. van Wetenschappen*, Series A, 61(1958), s.177-183.

[4] Marciszewski, W. (ed.); *Dictionary of Logic*, The Hague, 1981.

[5] Pogorzelski, W. A.; Słupecki, J.; „Podstawowe własności systemów dedukcyjnych" , *Studia Logica*, 9(1960), s.163-176; 10(1960), s.77-95.

[6] Schmitd, J.; „Über die Rolle den transfiniten Schlussweisen in einer allgemeinen Idealtheorie", *Mathematische Nachrichten*, 7(1952), s.165-182.

[7] Surma, S. J.; „The Growth of Logic out of the Foundational Research in Mathematics", [w:] E. Agazzi (wyd.), *Modern Logic - A Survey*, Dordrecht 1980, s.15-33.

[8] Surma, S. J.; „Alternatives to the Consequence-theoretic Approach to Metalogic", *Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic, August 3 - 8, 1992. Notas de Logica Matematica, Bahia Blanca, Argentina* [w druku].

[9] Tarski, A.; „On Some Fundamental Concepts of Metamathematics" [w:] Tenże, *Logic, Semantics, Metamathematics*, 1983, s.30-37.

[10] Tarski, A.; „Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences", [w:] Tenże, *Logic, Semantics, Metamathematics*, 1983, s.60-109.

[11] Tarski, A.; „Foundationsof the Calculus of Systems", [w:] Tenże, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Second Edition. Hackett , 1983, s.342-383.

[12] Wójcicki, R.; *Theory of Logical Calculi*, Dordrecht, 1988.

[13] Żandarowska, W.; „O związkach pomiędzy wynikaniem, sprzecznością i zupełnością", *Studia Logica*, 18(1966), s.165-178.