Jarosław Mrozek

Powstanie i perspektywy rozwoju dowodu matematycznego

Filozofia Nauki 8/1, 21-33

2000

Filozofia Nauki
Rok VIII, 2000, Nr 1(29)

Jarosław Mrozek

Powstanie i perspektywy rozwoju dowodu matematycznego

Istniejące źródła historyczne, a mam tu na myśli papirusy staroegipskie i babilońskie tabliczki klinowe, wskazują, że już w kulturach poprzedzających czasy greckie istniała pewna ilość wiadomości typu matematycznego. Zagadnienia matematyczne zawarte w tych źródłach pojawiają się w kontekście zastosowań praktycznych. Wiele rozwiązań znajdowano drogą prób i błędów, metodą badań empirycznych, a niektóre zapewne odgadnięto. Współczesna analiza najważniejszych z tych źródeł[1] uwidacznia dogmatyczny styl przekazywania treści — zarówno wykładu, jak i nauczania. Brak w nich na ogół objaśnień, reguł ogólnych — w gruncie rzeczy składają się one z przykładów do naśladowania.[2]

Historycy matematyki są na ogół zgodni, iż matematyka przed Grekami obywała się bez pojęcia dowodu, była raczej zbiorem przepisów i instrukcji do rozwiązywania konkretnych zagadnień. W myśl przedstawionej w tym artykule koncepcji matematyki osiągnięcia rachunkowe czy miernicze kultur dogreckich nie są jeszcze samą matematyką— lecz umiejętnościami matematycznymi typu praktycznego. Dopiero pod wpływem filozofii, którą Grecy stworzyli w VII w. p.n.e., w tej empirycznej matematyce nastąpiło «cięcie epistemologiczne», w wyniku którego matematyka przekroczyła Rubikon teoretyczności.

Powstanie dowodu jest ściśle związane z «narodzinami» samej matematyki. Można rzec, iż matematyka powstała wraz z pojawieniem się idei dowodu. Dowód matematyczny, w moim przekonaniu, jest wynikiem zastosowania powstałej na gruncie filozofii metody dyskursywnej do praktycznych umiejętności typu matematycznego,

---

[1] Por. S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki Greckiej*, Warszawa 1973, s. 15.

[2] *Ibidem*, s. 16.

wypracowanych w cywilizacjach: sumeryjskiej, babilońskiej i egipskiej. Zastosowanie to polegało na próbach uzasadniania, podawania motywacji, a nawet racji dla tego, co było «empirycznie» znane. Już prawdopodobnie Tales, a na pewno Pitagoras, byli świadomi potrzeby dowodzenia formułowanych twierdzeń w taki sposób, aby każdy zdrów na umyśle śmiertelnik mógł się na podany dowód zgodzić.[3] Grecy w niedługim stosunkowo czasie zawładnęli dziedzictwem poprzedników, gromadzonym przez tysiąclecia. Wyjściowy materiał swej matematyki przejęli oni od innych, lecz sposób obróbki tego tworzywa był już oryginalnym pomysłem greckim — powtórzmy: polegającym na wprowadzeniu dyskursywnej metody filozoficznej do rozważań praktycznych typu matematycznego.

W epoce antycznej, dzięki skoncentrowaniu się na problemie dowodzenia, matematycy coraz mniej interesowali się zastosowaniami. Matematyka zaczęła rozwijać się autonomicznie przekształcając się w naukę teoretyczną, w której dowód stał się jedyną instancją uprawomocniającą twierdzenia. Potocznie twierdzenie raz udowodnione uznaje się za prawdziwe już na zawsze. Okazuje się jednak, że takie ujęcie problemu dowodzenia jest dużym uproszczeniem. To, co było ściśle dowiedzione dla Euklidesa, nie było takie dla Kartezjusza czy Leibniza. Dowody tych ostatnich nie zadowalały Cauchy'ego czy Weierstrassa, którzy z kolei okazywali się niedostatecznie precyzyjni dla Russella i Hilberta.

„Aż do XIX wieku — twierdzi Tarski — pojęcie dowodu miało w przeważającej mierze charakter psychologiczny. Dowód pojmowany był jako czynność umysłowa, zmierzająca do przekonania siebie samego lub innych o prawdziwości rozważanego zdania. [...] Rozumowania używane w dowodach musiały być intuicyjnie przekonywające, ale poza tym nie były poddawane żadnym ograniczeniom".[4] Do tych uwag Tarskiego dodajmy, iż w tym okresie w matematyce ograniczano się do **dowodów treściowych**, to znaczy takich, które operowały pojęciami już zinterpretowanymi (w zasadzie ograniczały się do arytmetyki i geometrii). Wśród dowodów treściowych można wyróżnić: dowody **intuicyjno-psychologiczne, dowody konstrukcyjne** i **eksperymenty myślowe**.

Pierwszy typ dowodów polegał na argumentacji na podstawie pewnych prawd, powszechnie uznanych za oczywiste (do czasów Euklidesa nawet nie wymienianych *explicite*), a także opierał się na założeniu ogólnej zrozumiałości używanych pojęć. Takimi dowodami były dowody znanych i sławnych twierdzeń starożytności: twierdzenia, że *w trójkącie prostokątnym, pole kwadratu zbudowanego na boku przeciwległym do kąta prostego, jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na bokach przyległych do kąta prostego*[5] — przypisywanego Pitagorasowi lub twierdzenia o *istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych* — sformułowanego i udowodnionego

---

[3] Por. C. V. Newson, *Istota matematyki*, Warszawa 1967, s. 25.
[4] A. Tarski, „Prawda i dowód", *Studia Filozoficzne*, 1984, nr 2, s. 24.
[5] Por. P.J. Davis, R. Hersh, *Świat matematyki*, Warszawa 1994, s. 133.

przez Euklidesa w jego sławnych *Elementach*[6]. Ten typ dowodu spotykamy powszechnie w praktyce matematycznej po dzień dzisiejszy wszędzie tam, gdzie nie ma miejsca, czasu lub potrzeby, aby przedstawiać kompletny, w świetle wymogów współczesnych, dowód wygłaszanej tezy.

Dowody konstrukcyjne z kolei wskazywały na konkretne procedury pozwalające rozwiązać zadany problem, czy to istnienia pewnych obiektów, czy też ich równości, przystawania itp. Były to chyba najczęściej spotykane dowody w starożytności, związane z zadaniami konstrukcyjnymi dopuszczającymi wykorzystanie jedynie cyrkla i liniału (linijki bez podziałki). Tego typu problemom poświęcano całe traktaty. Dla przykładu: Apoloniusz z Pergi[7] (około 260—170) podjął szeroko zakrojone badania poświęcone problemom typu: *Dane są proste **a** i **b** i na nich punkty **A** i **B**. Przez dany punkt **C** przeprowadzić taką prostą przecinającą dwie poprzednie w A_1 i B_1, aby stosunek $AA_1 : BB_1$ miał daną wartość.*

Natomiast eksperyment myślowy jest taką formą uzasadniania twierdzeń, która nie daje się sprowadzić do logicznych wywodów z założeń wyjściowych; przeprowadza się operacje mające charakter abstrakcyjnych manipulacji na odpowiednich obiektach i następnie interpretuje się je wyciągając wnioski lub też indukcyjnie uogólnia się wynik. Przykładem eksperymentu myślowego może być rozumowanie uzasadniające twierdzenie Eulera[8]: *W każdym wypukłym wielościanie suma liczby ścian **S** i liczby wierzchołków **W** jest o dwa większa od liczby jego krawędzi **K***, tzn. $S + W - K = 2$ — pochodzące od Cauchy'ego. Przedstawmy pokrótce ideę jego rozumowania, aby dokonać egzemplifikacji tej formy dowodzenia.

Cauchy proponuje, aby założyć, że rozpatrywany dowolny wypukły wielościan jest rozciągliwy tak, że po usunięciu jednej ze ścian da się go — deformując, ale nie gubiąc już ani ścian, ani krawędzi, ani wierzchołków — rozciągnąć na płaszczyźnie. Skoro usunęliśmy jedną ścianę, nasz wzór dla tej płaskiej sieci przedstawia się następująco: $S + W - K = 1$. Następnie Cauchy proponuje, by zdeformowaną siatkę wielościanu podzielić na równie zdeformowane trójkąty. Zauważmy przy tym, że każda dodana przekątna zwiększa jednakowo zbiór krawędzi K i zbiór ścian S, tak że wyrażenie $S + W - K$ nie zmienia się. Gdy następnie będziemy «wyjmować» trójkąty, to za każdym razem albo usuwamy jedną krawędź i wypada jedna ściana — wyrażenie $S + W - K$ nie zmienia się, albo usuwamy dwie krawędzie i jeden wierzchołek, wtedy wypada jedna ściana, więc również wyrażenie $S + W - K$ nie zmienia się. Na końcu tej procedury myślowej, którą nazwaliśmy „eksperymentem matematycznym", zostaje nam jeden trójkąt, dla którego oczywiście zachodzi wzór $S + W - K = 1$. Pamiętając o usuniętej na początku procedury ścianie, otrzymujemy wzór $S + W - K = 2$. Za-

---

[6] Por. Lars Garding, *Spotkania z matematyką*, Warszawa 1993, s. 19.

[7] Por. S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*, Warszawa 1973, s. 72.

[8] Por. W. Krysicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, *Z geometrią za pan brat*, Warszawa 1992, s. 106—110

uważmy, iż jest to rozumowanie, które można zastosować do dowolnego wypukłego wielościanu; wobec tego twierdzenie Eulera możemy uznać za uzasadnione.[9]

Do końca XIX wieku matematyka uchodziła za domenę prawdy, a dowody treściowe za wiarygodne. Matematycy w większości byli przekonani, że ich dowody odkrywają prawdy absolutne i w tym sensie dla nich matematyka ma cechy *episteme*. Uważali oni, że twierdzenia matematyki powinny być zrozumiałe (przynajmniej dla specjalistów) i bezpośrednio dostępne intuicji, ponieważ niezapośredniczone przez cokolwiek mają kontakt się z prawdą — przynajmniej w zasadzie. Dowody treściowe oprócz posiłkowania się intuicją odwołują się również do wyobraźni czy zdrowego rozsądku. Prawie we wszystkich bez wyjątku (z pewnego punktu widzenia[10] właściwie we wszystkich) jest wiele ukrytych założeń. Są więc to dowody entymematyczne, przy czym nie chodzi jedynie o przesłanki niejawne lecz także o nieobecne, można je bowiem różnie dobierać.[11] Język takich dowodów jest językiem potocznym, wzbogaconym o terminy matematyczne. Jako taki jest wieloznaczny, rozmyty semantycznie, często odwołujący się do niejasnych wyrażeń. Konsekwencją tego stanu rzeczy jest to, że dowody treściowe operują, na równi z matematycznymi, również kategoriami pozamatematycznymi, takimi jak: rozcięcie, deformacja, ruch. Poza tym, nagminnym procederem stosowanym w dowodach treściowych jest odwoływanie się do czynników pozalogicznych — między innymi do poczucia oczywistości, jasności, intuicyjnej zrozumiałości, a ponadto występują w nich luki jeżeli chodzi o ciąg logicznych wynikań (mówimy wtedy, że dowody te nie stanowią *continuum* logicznego). Mimo wielu «rewolucji ścisłości» — Euklidesa[12], Kartezjusza[13] czy Cauchy'ego[14] albo Weierstrassa[15] — ten stan rzeczy utrzymał się aż do pojawienia się teorii aksjomatycznych.

Dopiero wraz z aksjomatyzacją arytmetyki dokonaną przez Peana oraz nową ścisłą aksjomatyzacją geometrii zaproponowaną przez Hilberta, a zwłaszcza wraz z aktem aksjomatyzacji teorii mnogości — uznawanej za nową teorię bazową całej matematyki — dokonał się przełom w rozumieniu procesu dowodzenia. Przez **dowód** twierdzenia zaczęto rozumieć jego **wywód z wcześniej przyjętych aksjomatów**. Można zadać pytanie: Co jest przełomowego w takim postawieniu sprawy, skoro już dawno Euklides dowodził swych twierdzeń na podstawie aksjomatów? Otóż w stosunku do tego, co proponował Euklides, zachodzi pewna drobna, lecz niezwykle bogata w konsekwencje dla poruszanej tu kwestii różnica. Dowody Euklidesa, mimo że opierają się na aksjomatach, są dowodami treściowymi, bowiem Euklides jedynie skatalogował oczywiste, jak się wydawało starożytnym, prawdy i wymienił je

---

[9] Por. także I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge 1976.

[10] Chodzi o formalistyczny punkt widzenia.

[11] Chodzi na przykład o ogólne presupozycje dotyczące zakładanej logiki, reguł inferencji itp.

[12] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki*, Warszawa 1995, s. 32—33.

[13] Por. *ibidem*, s. 40.

[14] Por. D.J. Struik, *Krótki zarys historii matematyki*, Warszawa 1963, s. 226.

[15] Por. *ibidem* s. 246.

expressis verbis jako aksjomaty i postulaty. Natomiast aksjomaty współczesnych teorii matematycznych nie muszą i najczęściej nie są ani oczywiste, ani intuicyjne, ani prawdziwe w sensie klasycznym (tzn. zdające sprawę z czegoś, odnoszące się do czegoś). Muszą za to spełniać inne warunki — np. niesprzeczności, zupełności i ewentualnie niezależności.[16]

Dowodzenie na podstawie pewnych arbitralnie dobranych zdań, tak zwany dowód typu **półformalnego**, jest radykalnie odmienny metodologicznie od dowodów treściowych. Dowód przestaje być tu uważany za coś, co odkrywa prawdę jedyną i nieuwarunkowaną, a staje się procedurą wywodu typu: jeżeli przyjmiemy pewne aksjomaty, to możemy z nich wyprowadzić takie to a takie twierdzenia. Dowody półformalne są przeprowadzane na podstawie *explicite* wymienionych aksjomatów, lecz nie posiadają jeszcze ściśle skodyfikowanych reguł inferencji. Procedura dowodzenia odwołuje się do intuicji i rozumienia terminów pierwotnych, posiada twórczy charakter oraz u swoich podstaw ma zespół przekonań podmiotowych — co można, a czego nie można robić przy dowodzeniu twierdzeń. Chodzi na przykład o zestaw dopuszczalnych sposobów rozumowania, o wybór obiektów, które mogą być wykorzystywane, i o sposób operowania tymi obiektami. Tego typu dowody pojawiły się przy konstrukcji geometrii nieeuklidesowych oraz we wcześniejszych wersjach teoriach mnogości, np. teorii Zermela.

Zauważmy, iż powstanie geometrii nieeuklidesowych można zinterpretować jako wynik rozważań typu: jakie otrzymalibyśmy twierdzenia geometryczne, gdyby do zestawu aksjomatów zamiast aksjomatu Euklidesa wprowadzić jego zaprzeczenie. Historycznie rzecz ujmując, matematycy chcieli wyeliminować piąty postulat wyprowadzając go z czterech pozostałych; gdy nie udawało się tego zrobić wprost, próbowano doprowadzić do sprzeczności, wyprowadzając wnioski z pierwszych czterech i zaprzeczenia piątego aksjomatu.[17] W ten sposób uzyskano szereg twierdzeń, które później złożyły się na nową teorię, bowiem wbrew powszechnym oczekiwaniom sprzeczności nie udało się otrzymać.

Na gruncie teorii mnogości, ideą tradycyjnego dowodu, czyli dowodu treściowego, zachwiała między innymi sprawa przyjęcia i stosowania w dowodzeniu pewnego spornego aksjomatu, zwanego **pewnikiem wyboru**. Głosi on, że *dla dowolnej rodziny parami rozłącznych, niepustych zbiorów istnieje zbiór, który zawiera po dokładnie elemencie z każdego zbioru.* Nie wszyscy akceptują ten aksjomat, ale nie jest on również powszechnie odrzucany, więc matematycy zaznaczają zawsze, czy dane twierdzenie udowodniono przy jego wykorzystaniu, czy też nie.[18] Konsekwencje stosowania tego aksjomatu są tak wielkie,[19] że matematycy nie chcą i nie mogą tak po prostu

[16] Por. W. A. Pogorzelski, J. Słupecki, *O dowodzie matematycznym*, Warszawa 1970, rozdz. III.

[17] Por. P. J. Davis, R. Hersh, *Świat matematyki*, Warszawa 1994, s. 193.

[18] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki*, Warszawa 1995, s.180—181.

[19] Stosowanie pewnika wyboru może prowadzić do wysoce nieintuicyjnych wyników. Znane jest twierdzenie Banacha—Tarskiego, które pokazuje, jak trójwymiarową sferę rozłożyć na części, z których da się przy pomocy przesunięć i obrotów zbudować **dwie** takie same sfery. Por. K . Cie-

z niego zrezygnować — modyfikują przeto dotychczasowe pojęcie dowodu jako procedury osiągania prawdy, na rzecz pojmowania dowodu jako rozumowania hipotetyczno-dedukcyjnego. Ten fakt jest potwierdzeniem odmiennego w stosunku do tradycji podejścia do problemu dowodzenia w matematyce.

Cantorowska teoria mnogości oraz powstanie geometrii nieeuklidesowych przyczyniły się ponadto do upadku wiary w oczywistość i niesprzeczność matematyki. Tzw. naiwna teoria mnogości zaowocowała antynomiami, natomiast wielość systemów geometrii sprawiła, że powstał problem uprawomocnienia istniejących systemów geometrycznych jako całości. Matematyka, która przestaje być intuicyjna, samooczywista, zmuszona jest podeprzeć się innymi metodami. Może na przykład postawić wyższe wymagania w stosunku do formalno-logicznej strony swoich wywodów, by w większym stopniu uniezależnić się od czynników podmiotowych. Narzędzi do realizacji tego postulatu dostarczył szybki rozwój logiki matematycznej. Szerokie wykorzystanie w matematyce wyników logiki matematycznej doprowadziło do formalizacji pojęć, aksjomatów i reguł dowodzenia, a przez to do powstania sformalizowanych teorii matematycznych.

Pojawiły się one w ramach tzw. *programu Hilberta*, programu skonstruowania «absolutnego» dowodu niesprzeczności matematyki. Hilbert był przekonany, że każdą teorię matematyczną można przedstawić jako układ formuł powiązanych ze sobą skończoną liczbą strukturalnych relacji, których badanie może wykazać, iż z aksjomatów tej teorii nie dają się wyprowadzić żadne dwa sprzeczne ze sobą zdania. Aby tego dokonać w sposób formalny, należy wyraźnie zdefiniować język systemu, w którym będziemy operowali, a w nim zbiór wyrażeń sensownych wraz z podzbiorem aksjomatów, oraz założyć, że symbole wyjściowe nie mogą mieć sensu semantycznego (lub należy abstrahować od pierwotnego znaczenia danych symboli). Dowody w tak zdefiniowanym systemie, zwane **dowodami sformalizowanymi**, należy przeprowadzać wyłącznie na podstawie ściśle określonych reguł przekształcania wyrażeń, odnoszących się nie do ich treści — lecz do formy. Innymi słowy traktuje się je po prostu jako ciąg rozróżnialnych symboli np. znaków na papierze, podlegających określonym rygorom formacji i transformacji.

Charakteryzując dowód sformalizowany w kategoriach procesu należałoby powiedzieć, że jest to skończony szereg «mechanicznych» przekształceń, dokonywanych nad elementami fizycznymi (znakami graficznymi). Elementy te są pozbawione jakichkolwiek charakterystyk — są jedynie rozróżnialnymi od siebie kombinacjami symboli. Konieczną własnością dowodów sformalizowanych jest ich finityzm oraz brak odniesień do oczywistości czy intuicyjności. Każdy krok dowodowy jest zastosowaniem pewnej *explicite* wymienionej reguły inferencyjnej i na tym polega różnica w stosunku do dowodów półformalnych, w których samo rozumowanie dowodzące było intuicyjne. Dowód matematyczny w tej postaci traci na zrozumiałości, bowiem nie odwołuje się ani do treści, ani intuicji, a jedynie do formy wyrażeń. Pytanie o po-

---

sielski, Z. Pogoda, *Bezmiar matematycznej wyobraźni*, Warszawa 1995, s. 259—260.

prawność dowodu może być postawione jedynie w ramach takiej lub innej koncepcji metodologicznej lub teorii dowodu, zakładającej określony system logiczny. Na gruncie danego systemu, wszystko co się da udowodnić, można udowodnić absolutnie ściśle pod względem formalnym, przy pełnej jawności reguł metodologicznych, określających zasady tworzenia dowodów.

Nie znaczy to, że nie można już nic zarzucić dowodom sformalizowanym. Gdy spełnione są wszelkie wymagania względem procedury dowodzenia, obiektem krytyki mogą stać się przekonania, tkwiące u podstaw koncepcji systemów formalnych i — szerzej — całego procesu formalizacji. Niewątpliwie metoda formalizacji przeredagowuje matematykę treściową do postaci, w której wygodniej się ją analizuje. Wydaje się jednak, że teorie formalne nie są po prostu zwykłymi odpowiednikami teorii matematyki klasycznej, lecz zdeformowanymi, wypreparowanymi, «wyżętymi obrazami» tych teorii, w których co prawda dane teorie są przedstawione w ścisłej postaci ale prawie zawsze zawierają «coś za dużo» lub «coś za mało», pozostając nieadekwatnymi w stosunku do pierwowzoru. Wbrew pozorom proces formalizacji nie jest neutralny w stosunku do formalizowanej teorii treściowej: niepostrzeżenie ujmuje pewne z własności obiektów dotychczas pojmowanych intuicyjnie albo dodaje nieoczekiwanie nowe cechy, wydawałoby się dobrze znanym obiektom czy pojęciom. Matematycy dobrze wiedzą, jakie intuicje kryją się za takimi pojęciami jak: ciągłość, funkcja ciągła, wymiar. Po formalizacji tych pojęć, tzn. po ich ścisłym zdefiniowaniu i przedstawieniu w formie symbolicznej okazało się, że zyskały one zupełnie obce intuicji własności. Przykładami tego typu nieadekwatności są: funkcja ciągła nigdzie nie różniczkowalna (wszędzie kolczasta), powierzchnie o zerowym polu, krzywe o wymiarach ułamkowych lub też wypełniające całkowicie powierzchnię kwadratu.[20]

Wobec tego należałoby sprawdzić, czy twierdzenia formalne ze swymi formalnymi dowodami mogą być dobrymi reprezentantami swych treściowych, klasycznych odpowiedników. Zagadnienie to podjął Tarski, który był przekonany, że „aby właściwie ocenić pojęcie dowodu formalnego, musimy wyjaśnić jego stosunek do pojęcia prawdy".[21] Jest to jak gdyby powrót do problemu związanego z pierwotnym zadaniem, jakie miał wypełniać dowód, tzn. z zadaniem przekonania nas o prawdziwości pewnych zdań matematycznych. Tarski zadaje pytanie: Czy dowód formalny jest istotnie adekwatną metodą osiągania prawdy? Przy pomocy rozumowania przeprowadzonego w metajęzyku, a wzorowanego na metodzie dowodu słynnego twierdzenia Gödla, Tarski pokazuje, że zbiór zdań dowodliwych danej teorii sformalizowanej nie pokrywa się ze zbiorem zdań prawdziwych tej teorii. „Istnieją zdania sformułowane w języku danej teorii, które są prawdziwe, lecz nie są dowodliwe";[22] innymi słowy pojęcie dowodliwości nie może w pełni zastąpić pojęcia prawdy w dziedzinie matematyki. W związku z tym musimy się liczyć z możliwością, że w każdej nieco bogat-

---

[20] Por. N. J. Wilenkin, *Opowieści o zbiorach*, Warszawa 1975, rozdz. III.

[21] A. Tarski, „Prawda i dowód", *Studia Filozoficzne*, 1984 nr 2, s.25.

[22] *Ibidem*, s. 29.

szej (tzn. zawierającej system formalny arytmetyki) teorii matematycznej istnieją pewne ciekawe i niebanalne twierdzenia, których nie będziemy mogli udowodnić w sposób formalny. Tak jest w istocie, co pokazał w swoich słynnych twierdzeniach Gödel.[23] Ten fakt można zinterpretować w kategoriach wyczerpywania się heurystycznych możliwości metody dowodu dedukcyjnego w matematyce.

W związku z tym Murawski pyta: „Czy to znaczy, że należy zrezygnować z metody aksjomatycznej?". I odpowiada: „Bynajmniej. Skoro nie mamy żadnej lepszej metody, należy trzymać się tego, co posiadamy".[24] W jego opinii, musimy pogodzić się z tym, że istnieją pewne nieprzekraczalne granice poznawcze dla metody aksjomatyczno-dedukcyjnej, albo zdać się na intuicję matematyków, co w istocie znaczy, iż nie wiadomo do końca, jakie metody dowodzenia są w matematyce dopuszczalne, a jakie nie. W moim przekonaniu, świadomość ograniczoności stosowanych narzędzi badawczych może być odnotowywana jako wyższy stopień metodologicznego wtajemniczenia, wpływający pozytywnie na całość badań. Wiemy bowiem, co możemy a czego nie możemy uzyskać przy zastosowaniu danej metody. Myślę, że tak właśnie należy interpretować uwarunkowania wiążące się z dowodami sformalizowanymi. Czy jednak zarysowana przez Murawskiego alternatywa: albo metoda aksjomatyczno-dedukcyjna (ze swoimi ograniczeniami), albo zdanie się na intuicyjność w procedurze dowodzenia, wyczerpuje wszystkie możliwości dalszego rozwoju matematyki? Takie podejście, w moim przekonaniu, może prowadzić do swoistej stagnacji w rozwoju matematyki. Nie chodzi o to, że nie będzie dowodzić się już twierdzeń. Owszem stale pojawiają się rezultaty badań będące rozwiązaniem rozważanych problemów matematycznych. Lecz być może w ramach tradycyjnego sposobu uzasadniania zdań matematycznych cała gama interesujących twierdzeń nigdy nie będzie rozpoznana. Jeżeli ograniczymy się do twierdzeń, które są dedukcyjnymi konsekwencjami pewnej liczby aksomatów, przyjętych w naszych teoriach matematycznych, to na mocy twierdzenia Gödla nie mamy szansy dotrzeć poznawczo do pewnych prawd pozostających poza granicami wyznaczonymi przez metodę formalną.

Taka konkluzja nie jest jednak nieuchronna. Wydaje się, że istnieją już symptomy «trzeciej drogi» przekraczającej (w swoisty sposób) ograniczenia związane z dowodzeniem w matematyce — właściwe zarówno metodom formalnym, jak i intuicyjnym. Mam tu na myśli coraz wyraźniej zarysowującą się możliwość wykorzystywania komputerów w celu uzyskiwania jakościowo nowych rezultatów matematycznych. Współczesna technologia komputerowa jest tak zaawansowana, że możemy mieć nadzieję, iż konstruowane obecnie komputery sprostają wymogom teoretycznej myśli abstrakcyjnej. Sama istota pracy komputera wymaga, by proste i intuicyjne dla człowieka operacje i działania przedstawiać w całkowicie sformalizowanej postaci algorytmu, na którym pracuje maszyna, jednocześnie zaś rezultaty operacji komputero-

---

[23] Por. E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, Warszawa 1966.

[24] R. Murawski, „Granice możliwości poznawczych matematyki", *Poznańskie Studia z Filozofii Nauki*, 1992, z. 2, s. 148.

wych mogą być przedstawiane w postaci apelującej do intuicji czy też do wyobraźni ludzkiej, co w zupełnie nieoczekiwany sposób łączy podejście formalistyczne ze stanowiskiem intuicjonistycznym.

Wykorzystanie komputera w matematyce dotyczyć może zarówno kontekstu odkrycia, jak i kontekstu uzasadnienia. Jeżeli chodzi o ten pierwszy sposób, to analiza komputerowa potrafi znacznie głębiej «wejść» w pewne dziedziny matematyki czy nowe rejony badawcze niż ścisła — *stricte* matematyczna — analiza. W takich nowo powstałych dyscyplinach, jak teoria chaosu deterministycznego czy geometria fraktalna, badania tak silnie łączą w sobie analizę teoretyczną z wyliczeniami komputerowymi, iż niemożliwe jest oddzielenie jednego od drugiego. We wspomnianych dziedzinach, z racji ich specyfiki, nie możemy myśleć o wiedzy otrzymanej przy użyciu komputera jako o wiedzy próbnej czy tymczasowej, gdyż innej, zdobytej bez komputera, po prostu **nie ma**.

Przykładem niebanalnego obiektu matematycznego, który został odkryty dzięki komputerowi, jest zbiór Mandelbrota.[25] Na razie nie udaje się metodami analitycznymi badać jego własności. Poznawanie jego niezwykle skomplikowanej struktury (ktoś nazwał ten zbiór najbardziej skomplikowanym obiektem matematyki) możliwe jest wyłącznie przy użyciu komputera. Komputer także odegrał decydującą rolę przy odkryciu nowej fundamentalnej (obok π i e) stałej matematycznej, tzw. stałej Feigenbauma,[26] charakteryzującej zjawisko bifurkacji. Feigenbaum odkrył, że okres szerokiej klasy układów nieliniowych podwaja się lawinowo w trakcie ich ewolucji. Nie przeprowadził on formalnego dowodu, a jedynie opublikował wyniki swoich komputerowych badań. Później dowód matematyczny zbieżności ciągu ilorazów odległości między punktami bifurkacji do tej samej granicy (dla różnych odwzorowań nieliniowych) — stałej Feigenbauma — podali inni matematycy, ale gdyby nie komputerowe badania Feigenbauma, nie wiedzieliby oni, czego dowodzić.

Użycie komputera miało również niebagatelne znaczenie przy odkryciu istnienia i badaniu obszarów stabilności trajektorii rozwiązań równań dynamiki nieliniowej. Matematycy odkryli bowiem, że rozwiązania pewnych w zasadzie deterministycznych równań prowadzą do bardzo nieregularnych, wręcz chaotycznych rozwiązań. W obliczu chaosu wyłaniającego się z dobrze określonych równań matematycy czuli się bezradni. I wtedy w sukurs uczonym przyszedł komputer ze swymi możliwościami analizowania bardzo długich sekwencji otrzymywanych rozwiązań. Gdy je prześledzimy metodą numeryczną w odpowiedniej przestrzeni fazowej, po wielu krokach można stwierdzić, że nawet w wysoce niestabilnych i nieokresowych rozwiązaniach równań dynamiki nieliniowej istnieją stany zwane atraktorami, wokół których koncentrują się trajektorie rozwiązań. Pierwszy atraktor metodą komputerową odkrył w 1963 roku

---

[25] Por. B. Mandelbrot, „Fraktale i odrodzenie matematyki eksperymentalnej", [przedmowa do:] H. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu. Fraktale*, cz. 1, Warszawa 1995, s. 32.

[26] Por. I. Steward, *Czy Bóg gra w kości. Nowa matematyka chaosu*. Warszawa 1994, s. 239—240.

Edward Lorenz[27] z MIT, analizując układ równań różniczkowych modelujących zjawiska pogodowe, tzw. konwekcje — powstające przy unoszeniu się podgrzanego powietrza. Wykres rozwiązań równań Lorenza można zobaczyć na ekranie komputera: układają się one w charakterystyczne — wydawałoby się — dwie powierzchnie podobne do skrzydeł motyla (ale to nie od tego kształtu pochodzi jego sławny zwrot: „efekt motyla").

W kontekście coraz doskonalszej grafiki komputerowej interesujące jest pojawienie się generowanych przez komputery tzw. wideodowodów[28] — obrazowych przedstawień abstrakcyjnych pojęć i przekształceń matematycznych ilustrujących pewne twierdzenia. Mają one tę przewagę nad formalnymi dowodami, że apelują do intuicji i poczucia oczywistości. Do bardziej uderzających osiągnięć tego typu należą: film wideo o tym, jak można gnieść, wykręcać i naciągać sferę dwuwymiarową (coś w rodzaju piłki), czego rezultatem jest jej przenicowanie czyli wywrócenie na drugą stronę bez rozcinania — lub film zatytułowany *Not Knot*, ilustrujący własności geometrii hiperbolicznej, w której linie równoległe rozchodzą się, a boki pięciokąta tworzą kąty proste. «Wideodowody» można zinterpretować jako próbę argumentowania na podstawie tego, co «widać», odwołującego się do oczywistości wizualnej. Ten typ uzasadniania można traktować jako analogon prostych dowodów konstrukcyjnych przeprowadzanych w starożytności, w których również pokazywano krok po kroku (przy wykorzystaniu konkretnych obrazów), jak pewne rzeczy są możliwe do uzyskania.

Taki sposób użycia komputerów nie «sięga» problemu dowodzenia. Komputer jest heurystycznym narzędziem, które sugeruje, jaką tezę ewentualnie zaakceptować jako wysoce prawdopodobną (ale nie pewną). Można zauważyć w tej tendencji jak gdyby powrót, na wyższym poziomie zaawansowania technicznego, do matematyki przedteoretycznej, właściwej przedgreckiemu okresowi w rozwoju matematyki — nastawionej na praktykę i rozwiązywanie problemów przy niedostatecznym, z punktu widzenia metodologicznego, uzasadnieniu uzyskanych wyników. Proces ten, w zestawieniu z faktem rozmijania się pojęcia dowodliwości i pojęcia prawdziwości w matematyce, uznać należy za racjonalny. Skoro już wiemy, że pewne prawdy nie są osiągalne znanymi metodami, spróbujmy osiągnąć to, co się da przy zastosowaniu niekonwencjonalnych metod.

Tymczasem komputer zaznaczył swą obecność w matematyce również w kontekście uzasadnienia, a **dowody wspomagane komputerowo** są w matematyce już rzeczywistością. W tym wypadku program komputerowy jest częścią procedury dowodowej. Pierwszym szerzej znanym twierdzeniem udowodnionym przy istotnym wykorzystaniu technik obliczeniowych było twierdzenie odnoszące się do tzw. *zagadnienia czterech barw*.[29] Dowód Appela i Hakena jest mocno osadzony w tradycji matema-

---

[27] *Ibidem* s. 156—166.

[28] J. Horgan, „Śmierć dowodu", *Świat Nauki*, 1993, nr 12, s. 77—84.

[29] K. Appel, W. Haken, „Zagadnienie czterech barw", [w:] *Matematyka współczesna* (red. L.A. Steen), Warszawa, 1983, s. 170—198.

tycznej, opiera się na faktach i procedurach znanych z historii matematyki, jednakże udział obliczeń komputerowych jest w nim tak znaczący, że ks. prof. Lubański stwierdził, iż można już mówić o pojawieniu się **komputerowej metody dowodzenia**. Przez komputerową metodę dowodzenia rozumie on „dowodzenie jakiegoś twierdzenia (w zasadzie matematycznego) za pomocą komputera, w tym znaczeniu, że b e z j e g o p o m o c y n i e p o t r a f i m y t e g o d o k o n a ć [wyróżnienie moje — J. M.] bądź ze względu na wielość występujących operacji, bądź też z racji sugestii poddawanych przez maszynę w trakcie przeprowadzania dowodu dzięki dialogowi z nią, bądź z obu względów jednocześnie".[30]

Z punktu widzenia prowadzonych tu rozważań nie jest specjalnie istotne, czy wykorzystujemy obliczenia komputerowe w arytmetyce dokładnej, czy w tzw. arytmetyce przedziałowej (pozwalającej na przeprowadzenie ścisłego rozumowania pomimo występowania nieuchronnego błędu zaokrągleń),[31] bowiem tego typu «dowodzenie komputerowe» można potraktować jako poszerzenie, za pomocą techniki, możliwości intuicji, wyobraźni oraz możliwości twórczych człowieka. W tym sensie można je traktować jako analogon, z wykorzystaniem wysokiej technologii, idei dowodu tradycyjnego — wywodu z założonych przesłanek przy pomocy wszelkich zrozumiałych i intersubiektywnych argumentów będących aktualnie do dyspozycji dowodzącego matematyka.

Wszystkim tym, którzy w tym momencie zaprotestują, wskazując, że komputer jako urządzenie techniczne zależny jest od praw fizyki i to zmienia radykalnie status zdań uzasadnionych z jego udziałem, chcę przypomnieć, że ołówek, kartka papieru, liczydła, arytmometr, suwak logarytmiczny itd. są również «urządzeniami technicznymi» (zachodzi tu jedynie różnica stopnia). Ponadto, co ważniejsze, komputer jako urządzenie elektroniczne podlega tym samym prawom fizyki (mechaniki kwantowej), co i nasze mózgi, a to sprawia, że nieporozumieniem jest podnosić problem uzależnienia dowodzenia wspomaganego komputerowo od fizyki, gdyż od dawna i to w zasadniczym sensie *realnie* przeprowadzane dowody matematyczne zależą od praw fizyki.

Przeniesieniem idei dowodu formalnego na grunt działań komputera byłoby **automatyczne dowodzenie twierdzeń**, które rozumiem jako wykonywaną przez maszynę procedurę przekształcania wprowadzonych danych — aksjomatów — przy pomocy reguł transformacji, również «zadanych komputerowi». Jeżeli zaprogramujemy komputer tak, by dokonywał określonych manipulacji formalnych, to rozpatruje on po prostu pewne stany jako dane i dokonuje określonych operacji przeprowadzających jeden stan w następny. Już w latach sześćdziesiątych amerykański matematyk Hao Wang[32] sporządził program dla ówczesnej maszyny liczącej IBM-704, dowodzący twierdzeń z fundamentalnej pracy Russella i Whiteheada *Principia mathematica*.

---

[30] M. Lubański, „Komputerowa metoda dowodzenia", *Studia Filozoficzne*, 1984 nr 7, s. 25.

[31] Por. K. Szyszkiewicz, J. Urbaniec, „Ewolucja dowodu matematycznego", [w:] *Otwarta nauka i jej zwolennicy*, red. M. Heller i J. Urbaniec, Tarnów 1996, s. 87—96.

[32] Por. R. Hersh, *What is Mathematics, Really*?, Oxford 1997, s. xvii.

Interesujące było to, że maszyna dowodząc pierwszych około stu pięćdziesięciu twierdzeń niejako przy okazji udowodniła jeszcze kilka, których praca Russella i Whiteheada nie zawierała. Komputer jest w takim wypadku użyty jako swoistego rodzaju «logikometr» (przez analogię do arytmometru) imitujący wnioskowanie z określonych formuł wyjściowych przy zastosowaniu określonych reguł inferencji. Inaczej mówiąc, zastosowanie komputera w taki sposób jest jedynie «zmechanizowaniem» znanego typu dowodzenia — dowodów formalnych. Jednakże na razie restrykcje techniczne ograniczają dowody automatyczne do relatywnie prostych twierdzeń, gdyż czysto mechaniczne «wnioskowanie» prowadzi do utworzenia «drzewa» koniecznych do przeanalizowania stanów, których liczba bardzo szybko rośnie wraz ze złożonością podejmowanych problemów. Zjawisko to nazywamy „eksplozją kombinatoryczną".[33] Możliwe są tu dwie taktyki: (a) wnioskowanie wstecz, gdy komputer rozpoczyna pracę od stanu docelowego i przeszukuje stany go poprzedzające, aż do osiągnięcia jednego z możliwych stanów wyjściowych; (b) wnioskowanie w przód, gdy pracę komputera rozpoczynamy od stanu wyjściowego i tak długo przeszukujemy stany osiągalne, aż otrzymany zostanie stan docelowy. Jest to jednak stale poziom logikometru, o którym już wspominałem.

Powyższe rozważania miały na celu wskazanie, iż wykorzystanie komputerów jak dotychczas twórczo rozwija *znane z przeszłości* formy uzasadniania twierdzeń w matematyce (pomijając oczywiste różnice, jeśli chodzi o zaawansowanie technologiczne takiego urządzenia jak komputer). Istotne jest to, że sposób wykorzystania komputera nie narusza centralnej roli, jaką w dowodzeniu twierdzeń zajmuje matematyk z krwi i kości. Wydaje się, że kwestia ta jest zagadnieniem sięgającym samej istoty zastosowań komputerów w matematyce. Problemami do rozważenia na przyszłość są, po pierwsze, **czy komputer może uzasadniać twierdzenia matematyczne w innym sensie niż czyni to dowód sformalizowany**, oraz po drugie, **czy wykorzystanie komputera w procedurze uzasadnienia twierdzeń może zagrozić dominującej pozycji matematyka.**

Jeżeli możliwości dowodowe komputera utożsamimy z dowodliwością w pewnym systemie formalnym, to oczywiście istnieją tezy matematyczne, których komputer nie udowodni z zasady. Jeśli jednak komputer będzie używany przez matematyków jako swoiste narzędzie wspomagające w sposób niekonwencjonalny procedurę dedukowania, to może rozszerzyć to jakościowo procedurę uzasadniania w matematyce. Matematyka będzie się rozwijać nie przez kolejną modyfikację (w sensie uściślenia czy też zawężenia — bowiem do tego to się w przeszłości sprowadzało) pojęcia dowodu, lecz poprzez zmianę natury dopuszczalnego sposobu uzasadniania w matematyce wyrażającą się rozszerzeniem lub uzupełnieniem zasad dowodzenia matematycznego. Pojawi się szansa wyrwania się z zaczarowanego kręgu metody formalnej. Zresztą pamiętajmy, iż formalistyczne podejście do dowodzenia w mate-

[33] Por. R. Tadeusiewicz, „Problem sztucznej inteligencji", [w:] *Nauka i filozofia* (red. J. Misiek), Kraków 1987, s. 47.

matyce jest możliwością wyłącznie hipotetyczną, nigdy w pełni nie zrealizowaną w praktyce matematycznej. Korzystanie więc w najróżnorodniejszy sposób z możliwości stwarzanych przez współczesne komputery będzie jedynie *kolejnym* (po metodzie praktycznej, naocznej, intuicyjnej i dedukcyjnej) wzbogaceniem metody poszukiwania i odkrywania nowych obiektów oraz prawd matematycznych. Czy może pojawić się sytuacja, w której komputer zastąpi człowieka w procesie dowodzenia twierdzeń matematycznych? Sprawa nie jest prosta, bowiem czym innym jest teza głosząca, że dla każdego problemu matematycznego można znaleźć (zbudować, zaprogramować) komputer taki, że wykona postawione przed nim zadanie, a czym innym jest przekonanie, iż możliwe jest stworzenie takiego komputera, który potencjalnie rozwiąże każdy postawiony przed nim problem matematyczny. W pierwszym wypadku, nawet gdy komputery wyręczają człowieka przy dowodzeniu twierdzeń, pozostają na jego usługach i ciągle mamy do czynienia z narzędziem wspomagającym człowieka. Wydaje się, że można mieć nadzieję, iż jest to możliwe. Natomiast drugi wypadek kwalifikuje się do rozważań w zakresie teorii sztucznej inteligencji. Jest to nie tyle kwestia, czy komputery odpowiednio zaprogramowane mogą imitować inteligentne zachowania ludzkie (wydaje się, że byłoby to możliwe), lecz czy mogą zostać obdarzone pewnego rodzaju zdolnością przypominającą czy też odpowiadającą jakościowo inteligencji ludzkiej.