Lucyna Juśkiewicz

Liczba i symbol : kilka uwag o renesansowym matematyzowaniu uniwersum

Filozofia Nauki 9/3, 31-47

2001

Filozofia Nauki
Rok IX, 2001, Nr 3(35)

Lucyna Juśkiewicz

Liczba i symbol
Kilka uwag o renesansowym matematyzowaniu uniwersum

U progu XX wieku Bertrand Russell z przewrotną szczerością określił matematykę, jako „przedmiot, w którym nigdy nie wiadomo o czym jest mowa, ani też czy to, co mówimy, jest prawdą".[1] Nim minęła połowa XX wieku, Richard Courant i Herbert Robbins z nieukrywaną satysfakcją ogłosili, że prawdziwie twórcze umysły świadome są już zbędności filozoficznej dogmatyki, albowiem nie ona „lecz tylko czynne doświadczenie w dziedzinie samej matematyki może dać — zarówno uczonym, jak i laikom — odpowiedź na pytanie: co to jest matematyka?"[2]. Oba te stwierdzenia — choć bardzo różne przecież — mają jednak pewien punkt wspólny. Jest nim niepokój o miejsce matematyki w świecie ludzkiego poznawania i jej znaczenie dla rozwoju ludzkiej wiedzy. Jest to więc w istocie pytanie o sens matematyki, które — świadomie lub nie, jawnie lub w sposób zawoalowany, z nadzieją lub zażenowaniem — formułowane bywa wobec „królowej nauk" co najmniej od tego czasu, gdy jej rozwód z filozofią stał się trudnym do ukrycia faktem.

W poszukiwaniu odpowiedzi na powyższe pytanie trzeba jednak zająć się nie tylko samą matematyką, samą filozofią, czy też samym problemem skomplikowanych i różnorodnych związków teoretycznych między nimi, ale trzeba także przyjrzeć się nieco bliżej kilku szczególnym okresom z długiej historii tych związków. Szczególnym dlatego, że — jak sądzę — zarówno uzasadniają one to, co połączone, jak i ufundowują to, co oddzielone między obiema dziedzinami. Ale szczególnym z jeszcze jednego powodu. Myślę, że można chyba zaryzykować twierdzenie, iż marginali-

[1] B. Russell, „Recent Work on the Principles of Mathemathics", *International Monthly*, IV, s. 84 — por. C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, Warszawa 1964, s. 15.

[2] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?*, Warszawa 1998, s. 24.

zowanie tych okresów, czy wręcz zapominanie o nich, oznacza dobrowolną rezygnację z możliwości zrozumienia dziwnego fenomenu w ludzkim widzeniu, pojmowaniu i opisywaniu świata. Owej matematyzacji uniwersum, która kryje swe początki gdzieś w pitagorejskim *kosmos*, a której przemożny wpływ wciąż odczuwamy, tak w sferze myśli, jak i w życiu codziennym. Czyż bowiem oderwane od swojego historyczno-kulturowego kontekstu powszechne zmatematyzowanie, będące niepodważalnym faktem, nie stanowi w równym stopniu trudnego do przekonywującego wytłumaczenia zjawiska, co i trudnej do uniknięcia pułapki? Pułapki, w której tracimy lub co najmniej znacznie osłabiamy naszą wrażliwość na dwa podstawowe pytania: o przyczyny — z jednej — oraz o cel — z drugiej strony?

Oczywiście niebezpieczeństwo nie polega tu na tym, że powyższych pytań już się nie zadaje, czy też, że przestaje się je odróżniać — bo ani nie o to chodzi, ani nie jest to prawdą. Niebezpieczeństwo tkwi w czymś innym — w atrakcyjności swoistego redukcjonizmu, który kusi tezą, że tylko jedno z owych pytań jest konieczne i że wystarczy poszukiwać tylko na nie odpowiedzi. Na ogół nie dostrzega się jednak przy tym, że za złudnym blaskiem tej prostoty kryje się pewien pozorny drobiazg. To mianowicie, że w opustoszałej przestrzeni pomiędzy dogmatyzmem wiary w coś, na którym zatrzymuje się w końcu bezustanne pytanie o racje, a instrumentalizmem wszystkiego, w który przeradza się w końcu nieograniczona dowolność w zakładaniu czegokolwiek, matematyka i filozofia, zamiast osiągać pełną niezależność, zostają zmuszone do rozstrzygnięcia nieoczekiwanego dylematu: czy raczej zrezygnować z części wzajemnej autonomii, czy też z rezygnacją podryfować w kierunku hermetycznego banału.

Na ile dylemat ten stanowi rzeczywistą, smutną perspektywę, na ile zaś jest tylko tworem wygenerowanym z naszego błędu, dającym się więc — wraz z owym błędem — usunąć, to już inny problem. Nie jest moim zamiarem rozwiązywać go tutaj, choć być może to, czym się poniżej zajmę, rozwiązanie takie ułatwi. Zajmę się zaś jednym z owych szczególnych — tak dla matematyki, jak i dla filozofii — okresów, bez uwzględniania których nie da się zrozumieć ani każdej z tych dziedzin osobno, ani związków między nimi. Zapraszam więc na wyprawę w przeszłość, a dokładnie do epoki renesansu, czyli do czasów, które zapewne wywołują tyle samo zachwytu, co lekceważenia. W ostatniej z tych postaw dziwnie zgodni bywają i matematycy, i filozofowie.

* * *

Aby móc zadawać pytania i udzielać na nie odpowiedzi, aby móc formułować hipotezy i odnajdywać argumenty do ich weryfikowania, potrzebna jest pewna podstawa, a więc zasób wiadomości stwarzający fundament dla wszelkich dalszych poczynań. To oczywiste stwierdzenie jest chyba najprostszym i najlepszym sposobem usprawiedliwienia konieczności patrzenia wstecz i dokonywania przeglądu zainteresowań, wątpliwości i osiągnięć danej epoki. Nie powinno więc budzić większych sprzeciwów uznanie za właściwe tego postępowania, które klucza do zrozumienia podobieństw, różnic i związków w matematycznym ujmowaniu świata na progu czasów zwanych nowożytnymi, zaczyna szukać od przyglądania się poszczególnym elementom renesansowego pejzażu matematycznego.[3] Zacznę więc i ja od krótkiego przeglądu szczegółów, bez znajomości których każda próba ogarnięcia i wytłumaczenia całości jest raczej trudem daremnym.

Nawet jeżeli jest sporo upraszczającej przesady w twierdzeniu, że najważniejsza różnica metodologiczna między średniowieczem a nowożytnością tkwiła w tym, iż wcześniej odwoływano się na ogół do dedukcji i sylogizmu, teraz zaczęto rzecz każdą poddawać mierze i rachunkowi,[4] to trudno jednak zaprzeczyć, że renesansowa wiara w moc wszelakich obliczeń była nie tylko wielka, ale i wielce rozpowszechniona. Skala samego zjawiska, jego dziwaczne niekiedy egzemplifikacje[5] czy też ówczesna moda na studiowanie matematyki, zmuszają do zastanowienia się zarówno nad rolą przywróconego do życia pitagoreizmu i platonizmu, czy wpływem praktycznego zapotrzebowania handlu i mechaniki, jak i nad statusem poszczególnych metod, którymi się posługiwano. Przede wszystkim jednak zmuszają do zastanowienia się nad renesansowym rozumieniem najważniejszego chyba z elementów matematycznego widzenia i opisywania świata, czyli nad liczbą.

Od czasu, gdy w 1202 roku ujrzało światło dzienne *Liber abaci* — słynne dzieło Leonarda Fibonacci z Pizy — oparty na układzie dziesiętnym hinduski i arabski system liczb nie był czymś w łacińskiej Europie nieznanym. Trzeba wszak pamiętać, że jego oddziaływanie poza akademickimi murami było raczej niewielkie. A przynajmniej było takim aż do chwili, kiedy zauważono niesłychaną przydatność systemu dziesiętnego w księgowości handlowej. Nie dajmy się jednak zbyt łatwo przekonać zwolennikom tezy o socjologiczno-ekonomicznych źródłach wszystkiego, co w epoce renesansu miało miejsce.[6] Jest oczywiście faktem i użytkowa rola układu dziesiętnego, i bujny rozwój miejskich szkół liczenia, gdzie kształcono — jak powiedzielibyśmy dzisiaj — specjalistów w zakresie księgowości dla firm i publicznej administracji. Po pierwsze jednak, o działaniach tych można odpowiedzialnie mówić dopiero w XVI wieku, podczas gdy rozwój intelektualnej recepcji dziesiętnego systemu liczb trzeba datować mniej więcej na stulecie wcześniej. Po drugie zaś, komercjalizacja współistniała wówczas z działalnością teoretyczną. Wciąż więc ukazywały się traktaty, takie na przykład, jak dzieło *Le decima* flamandczyka Simona Stevina z 1585 roku. Wciąż

---

[3] Por. P. L. Rose, *The Italian Renaissance of Mathematics*, Genève 1975; *La matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matematica tra '500 e '600*, (red.) L. Conti, Assisi 1992; A. De Pace, *Le matematiche e il mondo*, Milano 1993.

[4] Por. *Grande antologia filosofica*, M. F. Sciacca (red.), t. XI, Milano 1964, s. 518.

[5] Przykładem może być zastosowanie arytmetyki w diagnostyce medycznej, wyprowadzaniu i ustalaniu reguł piękna kobiet czy też sposobu ujarzmiania wołów, a także prawdziwa plaga przeróżnych magicznych wyliczanek.

[6] Por. choćby A. Hauser, *Społeczna historia sztuki i literatury*, t. 2, Warszawa 1974; F. Braudel, *Kultura materialna, gospodarka i kapitalizm, XV-XVIII w.*, t. 3, Warszawa 1992; Burke, *Kultura i społeczeństwo w Renesansowych Włoszech*, Warszawa 1991.

także toczyły się spory, jak ten, wywołany jeszcze w stuleciu czternastym przez kalkulatorów z oksfordzkiego Merton College, o samą istotę liczenia. To właśnie uczniowie Pawła z Wenecji, J. Merlina, Jacopo da Forli czy Błażeja z Parmy, to znaczy uczniowie piętnastowiecznych znawców dzieł Bradwardine i Swinesheada (Suisetha), byli prawdziwymi sprawcami i bohaterami renesansowego triumfu systemu dziesiętnego. I działo się tak niezależnie od faktu, że do spopularyzowania koncepcji kalkulatorów częściej niż zwolennicy przyczyniali się jej przeciwnicy oraz że rozwijano ją niekoniecznie w najsłynniejszych uczelniach. We Włoszech na przykład jedynym prawdziwym ośrodkiem owej *britannica sophismeta* — jak nazywał ją Loranzi Bruni — był uniwersytet w Pawii, który trudno raczej zaliczyć do najważniejszych w tamtym czasie centrów akademickich. Powszechną praktyką stało się to, że kupcy powierzali prowadzenie swoich rachunków właśnie znawcom pomysłów *calculatores*. Ci zaś — ze swojej strony — starali się jakoś zapanować nad liczbami, które powoli zaczęły ujawniać coraz bardziej kłopotliwe strony swojego oblicza.

Okazało się bowiem, że równolegle do żądania nieustannego rozwoju sprawności liczenia, pojawiać się też zaczął wymóg uwzględniania całej bogatej różnorodności liczb. Autentycznym wyzwaniem dla pierwszego z żądań okazały się próby zmechanizowania arytmetycznych rachunków — takie, jak słynny instrument do automatycznego mnożenia, zbudowany przez J. Napiera w 1617 roku, czy też tworzenie podstaw dla tabliczki mnożenia, z ideą której wystąpił w XV wieku arabsko-hiszpański matematyk al-Kasadi, a dokładniej przedstawił ją i rozwinął w swojej *Arithmetica* z 1527 roku P. Bennewitz. Przedmiotem odkryć i studiów związanych z drugim z żądań stały się kolejno liczby niewymierne, nieskończone, ujemne, urojone i zespolone. Jak je rozumiano? Przede wszystkim jako liczby, choć długo jeszcze liczby szczególne.

Dobrze to widać na przykładzie liczb niewymiernych. Dla G. Cardano, R. Bombelli czy M. Stifela były to niewątpliwie liczby, a więc zgodnie z nauką Starożytnych zaczynające się i kończące na jedności postępy wielości, nie zaś — co dopuszczać skłonni byli antyczni Grecy — geometryczne wielkości niewspółmierne. Posługując się jednak liczbami niewymiernymi traktowano je niczym obiekty z arytmetycznego misterium. Coś — jak napisze w 1544 roku M. Stifel — przed czym broni się inwencja i zasięg ludzkiego umysłu, albowiem to, co z własnej swojej natury pozbawione jest dokładności, jest niewypowiedziane — jak jeszcze w 1615 roku pisał Johannes Kepler — i ukrywa się niczym we mgle nieskończoności. Za tą samą zasłoną, gdzie poszukiwać było trzeba liczby nieskończonej.

Renesansowe rozważania nad liczbą nieskończoną odsyłają oczywiście do pitagorejsko-platońskiego ducha widzenia w matematyce architektury wszechświata, owego kreacyjnego *numero, pondere et mensura*. Przybrały one jednak tę postać, która charakterystyczna była dla niepokoju Mikołaja z Kuzy o relację pomiędzy tym, co nieskończone, a tym, co skończone. Na gruncie matematycznym pytanie o liczbę nieskończoną pojawiało się niezmiernie rzadko i było tożsame z pytaniem o adekwatność antycznej definicji liczby jako takiej. Na gruncie filozoficznym pojawia się ono przede wszystkim w myśli Giordana Bruna. Oznacza tu poszukiwanie tego, co różne i tego, co wspólne między nieskończonością Uniwersum, o której Bruno pisze w wydanych w Londynie w latach 1584—1585 dialogach włoskich, przede wszystkim w *De infinito, universo e mondi*,[7] a realnością minimum, które już w opublikowanym w 1588 roku dziele *Articuli centum ex sexaginta adversus huius tempestatis mathematicos atque philosophos* traktowane jest jako identyczne z miarą,[8] choć dopiero w późniejszym o trzy lata pierwszym traktacie frankfurckim ujawnia całą swoją trojaką naturę. Staje się wówczas tożsame z matematycznym punktem, fizycznym atomem i ontyczną monadą,[9] które pozwalają rozpoznawać i opisywać wszystko. Wielorakie możliwości interpretacyjne, jakie daje czwarta księga *De triplici minimo et mensura*,[10] wiążą się z pytaniem o stosunek między metafizyką a geometrią oraz o granice analogii między odpowiadającym obu dziedzinom dyskursom.

Nieco inny problem pojawił się wraz z liczbami ujemnymi. Uznawali je wcześniej Hindusi, ale były one — jak wiadomo — nie do przyjęcia i dla Diofantesa w Grecji, i dla świata arabskiego, a dokładniej dla dwóch przedstawicieli kultury tego świata w IX wieku naszej ery, to znaczy dla al-Chwarizmiego i Rabbiego ben Ezry. Renesansowy stosunek do tych liczb nazwać byłoby można ambiwalentnym. Z jednej strony bowiem L. Pacioli, M. Stifel i G. Cardano staraja się unikać odwoływania do liczb ujemnych, uznając je za „fałszywe", „nieprawdziwe" lub też „głuche". Z drugiej jednak strony, powiększa się strefa praktycznego posługiwania się nimi. I to związanego nie tylko z praktyką życia gospodarczego. Konieczność zmierzenia się z liczbami ujemnymi wynikała bowiem także z czysto teoretycznych rozważań nad liczebnikami porządkowymi, które to rozważania doprowadziły między innymi do wprowadzenia przez M. Chuqueta pojęcia potęgi z wykładnikiem ujemnym. Ważniejszy jednak był tu chyba problem gwarancji, że wszystkie działania arytmetyczne — w tym i odejmowanie — będą zawsze możliwe do wykonania. Dałoby się zapewne odnaleźć w tej myśli coś z ducha Bhaskary, który zajmując się w XII wieku innym działaniem, to znaczy mnożeniem, uznawał, że choć iloczyn jakiejś liczby przez zero jest zerem, to jeżeli mają być wykonywane dalsze działania należy go jednak pojmować nie jako coś prostego, ale jako pewną wielokrotność zera. Konsekwencje takiego rozumienia nie były oczywiście dla matematyki zbyt znaczące, a przynajmniej dość

[7] W sprawie występowania w bruniańskich dziełach takich pojęć, jak „infinibile", „infinita", „infinitamente", „infinito", „infinitudine" — por. M. Ciliberti, *Lessico di Giordano Bruno*, t. 2, Roma 1979, s. 587—599.

[8] Por. G. Bruno, *Articuli centum et sexaginta adversus huius tempestatis mathematicos atque philosophos*, [w:] Iordani Bruni Nolani, *Opera latine conscripta* (dalej *OLC*), t. 3, Neapoli[—Florentiae] 1879—1891, wyd. anastatyczne Stuttgart-Bad Cannstatt 1962, t. I, cz. III, s. 21—24, 29.

[9] Por. tenże, *De triplici minimo et mensura*, w: *OLC*, t. I, cz. III, s. 301.

[10] Por. K. Atanasijewic, *The Metaphysical and Geometrical Doctrine of Bruno*, St. Louis 1972; G. Aquilecchia, „Bruno e la matematica a lui contemporanea", *Giornale critico della filosofia italiana*, 1990, LXIX, fasc. II, s. 151—159; tenże, „Il dilemma matematico di Bruno tra atomismo e infinitismo", [w:] *Schede bruniane (1950—1991)*, Roma 1993, s. 319—326; C. Monti, *Introduzione*, [w:] G. Bruno, *Opere latine*, Torino 1980, s. 11—27.

długo nie dawały o sobie znać. Dla filozofii stanowiły one jednak konieczność zastanowienia się już nie tylko nad sensem pytania o próżnię i jej ontyczny status. Chodziło bowiem o coś innego, niż odpowiedź na stare i niezwykle ważne zarówno dla filozofii pierwszej, jak i dla dociekań etycznych, pytanie, czy jest i czym ewentualnie jest nie-byt, ale chodziło już o dokonywane na nim operacje. Samo zagadnienie porządku arytmetycznego znalazło renesansowe ukoronowanie w pomyśle przedstawiania liczb — zarówno dodatnich, jak i ujemnych — przy pomocy odpowiednio skierowanych odcinków, wychodzących z jednego danego początku, z którą to ideą wystąpił T. Harriot.

O ile rodowód systemu dziesiętnego oraz liczb niewymiernych i ujemnych sięga dalekiej przeszłości, liczby urojone stanowią niepodważalne odkrycie epoki renesansu, dokładnie zaś Girolama Cardano. W swojej *Ars magna* stanął on przed problemem pierwiastków kwadratowych liczb ujemnych, które nie mogą być przecież ani dodatnie, ani ujemne. Sformułował w związku z tym myśl, że są to liczby zupełnie inne, to znaczy inaczej konstytuowane, niż wszystkie te, które dotychczas znano i uznawano. Dla Cardana pierwiastki z liczb ujemnych, czyli właśnie liczby urojone[11] były jednak w pewien sposób paradoksalne, trudne zarówno do czysto spekulatywnego, jak i do intuicyjnego ogarnięcia. Stąd może wziął się początkowy entuzjazm w poszukiwaniu konstrukcji geometrycznych zdolnych jakoś przedstawiać owe niepokojące liczby, który dość szybko przekształcił się w zniechęcenie i porzucenie badań nad owymi tworami, określonymi w końcu jako sofizmaty wiodące umysł człowieka w dzikie ostępy lasu, bo tak chyba należy zrozumieć epitet „silvestri", którymi obdarzył je Cardano. Wątpliwości Cardana — prawda, filozoficzne raczej niż czysto matematyczne — nie zahamowały jednak procesu wprowadzania liczb urojonych do algebry. Dokonał tego R. Bombelli, w opublikowanej w Bolonii w 1572 roku *Opera su l'algebra*. Nie przeszkodziły także kilka dziesięcioleci później A. Girard w uznaniu wielkości urojonych za całkowicie mieszczące się w pojęciu liczby, co przyczyniło się w znaczącym stopniu do upowszechnienia ich używania. Nie zmienia to zresztą w niczym faktu, że aż do czasów Gaussa, liczby urojone traktowane były jednak wyjątkowo.

Pojawienie się idei liczby urojonej sprowokowało pytanie o produkt powstający z sumowania liczby rzeczywistej z liczbą urojoną. Zbadał to w swoim dziele *Algebra* wielokrotnie już przywoływany R. Bombelli, wprowadzając tym samym jeszcze jeden rodzaj liczb — liczby zespolone.

Widoczne we wszystkich renesansowych dziedzinach matematyki, zarówno tej czystej, jak i tej stosowanej, zainteresowanie uproszczeniem rachunku potęg i pierwiastków — warto przy tym pamiętać, że pojawienie się liczb urojonych umożliwiło

[11] Polskie określenie tych liczb nie oddaje w pełni bogactwa odcieni przymiotnika *immaginario*, który odwołuje się nie tylko do tego, co urojone — w języku polskim słowo to ma zresztą charakter raczej pejoratywny — ale także do tego, co wyobrażone lub przypuszczone, a więc do pojęć nie związanych z owymi negatywnymi emocjami.

spełnienie postulatu, by każde działanie było wykonalne — można chyba nazwać podstawowym impulsem do odkrycia logarytmów. Pierwszy szkic rachunku logarytmicznego odnajdziemy pod koniec XV wieku w wydanym w 1484 roku przez M. Chuqueta jego podręczniku arytmetyki *Le tryporty en la science des nombres* oraz w późniejszym o lat dziesięć dziele *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, napisanym przez L. Pacioli. Następny krok na tej drodze należał do M. Stifela, który w połowie następnego stulecia — dokładnie w pracy *Arithmetica integra* z 1544 roku — sformułował zasadę, że zamiast mnożenia dwóch wyrazów jednego szeregu geometrycznego można dodawać wyrazy współzależnego szeregu arytmetycznego, utworzonego z wykładników potęg szeregu pierwszego. Zasada ta stała się dla Stifela podstawą do obniżenia o jeden stopień działań arytmetycznych, to znaczy uproszczenia — odpowiednio — mnożenia do dodawania, dzielenia do odejmowania, potęgowania do mnożenia oraz pierwiastkowania do dzielenia, a także stała się impulsem dla prób konstruowania tablic logarytmicznych.

Poszukiwania Stifela znalazły kontynuatorów w osobach Szkota J. Napiera i szwajcarskiego zegarmistrza J. Bürgi, którzy nieomal równocześnie — choć niezależnie od siebie — dokonali odkryć, które przyczyniły się do dalszego rozwoju w dziedzinie logarytmów. Palmę pierwszeństwa dzierży niewątpliwie Bürgi, choć podstawową swoją pracę — *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* opublikował on w Pradze dopiero w 1620 roku, sześć lat po ukazaniu się *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* i trzy po wydaniu *Rabddogiae seu Numerationes per Virgulas*, dwóch najważniejszych dzieł Napiera. Chyba jednak badania tego ostatniego uznać trzeba za ważniejsze dla całego zagadnienia i to oczywiście nie tylko dlatego, że wymyślił on samą nazwę logarytm. Tym, co zadecydowało o znaczeniu studiów Napiera było odwołanie się w rozważaniach nad dwoma ciągami — geometrycznym i arytmetycznym — do pojęcia *fluxio*, a więc wprowadzenie do materii badań problemu ruchu.

Kolejny atak na obowiązujące wciąż widzenie matematyki «po grecku», czyli jako nauki o tym, co statyczne[12], musiało oczywiście wywołać (i rzeczywiście wywołało) surową krytykę. Jednak podstawowy argument, z którym wystąpił Kepler broniąc koncepcji Napiera, świadczy o zupełnie już innym klimacie intelektualnym i dokonującej się zmianie podejścia do zakresu stosowania analiz ilościowych. Zauważając, że ruch nie musi, a nawet nie powinien być traktowany wyłącznie w kategoriach faktu zmysłowego, a więc podlegać ocenie jakościowej, lecz widziany i rozważany być powinien także *sub genere relationum quantitatisque mentalis*,[13] Kepler przyjął i jasno wyraził to, co Napier sugerował, a mianowicie, że abstrakcyjna ilość stanowi dopuszczalne narzędzie w rozpatrywaniu problemu zmiany. Postawiono więc przed samą arytmetyką, nie zaś — jak miało to miejsce wcześniej — przed geometrią i zgeometryzowaną fizyką, zagadnienie ilościowego wyrażania tego, co zmienne.

[12] Jak twierdził Arystoteles matematyka zajmuje się tylko rzeczami nie posiadającymi żadnego związku z ruchem — por. Arystoteles, *Fizyka*, II, 198 a; tenże, *Metafizyka*, 1061.

[13] Por. *Grande antologia filosofica*, t. XI, dz. cyt., s. 521.

Owa wcześniejsza tradycja, to oczywiście słynny problem *intensio et remisio qualitatum seu formarum* oraz przemyślenia najważniejszego chyba z piętnastowiecznych kwantytystów, czyli Mikołaja z Oresme. Warto może przy okazji przypomnieć jeszcze jedną postać — hiszpańskiego Araba Ibn Badga (Avempace), który już w wieku dwunastym zajmował się ilościową analizą ruchu. Wszystko to pozwoliło, w ostatecznym rezultacie, stworzyć i określić podstawy dla tak istotnych dla dalszego rozwoju matematyki pojęć, jak zmienna i funkcja.

Gdyby próbować wyłowić najbardziej spektakularne osiągnięcia w renesansowej matematyce, na pewno trzeba ich poszukiwać na terenie algebry. Co najmniej dwie z jej ówczesnych zdobyczy zasługują na szczególną uwagę. Po pierwsze, rozwiązanie równań trzeciego i czwartego stopnia. Po wtóre, wprowadzenie algebraicznej symboliki.

Dziełu rozwiązania równań trzeciego i czwartego stopnia poświęcili się przede wszystkim Włosi: Scypion dal Ferro, M. Fontana (Tartaglia), G. Cardano, L. Ferrari i R. Bombello. Odkryli oni — mówiąc najbardziej ogólnie — że równania te dają się rozwiązać wówczas, gdy zostaną przekształcone, a początkowa niewiadoma x, zastąpiona przez niewiadome uzupełniające. W powyższym sposobie rozwiązywania było jednak coś, co budziło niepokój. Poszczególne podstawienia — konieczne w toku rozwiązywania — znajdowane były bowiem metodą prób, tym zaś, co naprawdę zadowoliłoby szesnastowiecznych mistrzów algebry, byłoby odnalezienie takiego podstawienia, którego znajomość raz na zawsze wskazałaby drogę postępowania przy rozwiązywaniu wszelkich równań. Podstawienia takiego — jak wiadomo — nie udało się im odnaleźć, ale z rozwiązaniem równań wyższych stopni zdołali sobie poradzić.

Pierwszym, który tego dokonał, był Scypion dal Ferro. I wraz z nim zaczyna się pewna dziwna historia. Dokonawszy swojego odkrycia, Scypion dal Ferro zatrzymał fakt ten w tajemnicy i powierzył zięciowi — Hanibalowi della Neva — zawierający obliczenia manuskrypt. Mniej więcej w tym samym czasie, choć zupełnie niezależnie, równanie trzeciego stopnia rozwiązał Fontana. I także on zatrzymał swoje osiągnięcie w tajemnicy, ujawniając je tylko Cardano, którego zobowiązał przy tym uroczystą przysięgą do milczenia. Dotrzymanie owej obietnicy wydawało się o tyle ułatwione, że swoje rozwiązanie Tartaglia sformułował za pomocą niezwykle zagadkowych tercyn. Cardano zdołał je jednak zinterpretować, posługując się dodatkowo wiadomościami z rękopisu Scypiona dal Ferro, który przekazał mu Hanibal della Neva. Znalezione rozwiązanie — w odróżnieniu od poprzedników — Cardano opublikował w swojej *Ars magna* z 1545 roku. To złamanie obietnicy i przerwanie dotychczasowej zmowy milczenia wywołało gwałtowne oskarżenia i inwektywy wobec Cardana, z którymi, przede wszystkim w IX księdze *Quesiti et inventioni diversi* z 1546 roku, wystąpił Tartaglia. W odpowiedzi, L. Ferrari — uczeń i zwolennik Cardana — posłał do Tartagli pierwsze z sześciu „matematycznych wyzwań", bo tak można chyba nazwać napisane między 1457 a 1458 rokiem *Cartelli di matematica disfide*. Ów matematyczny pojedynek, nie polegający na walce wręcz przyrządami, a na rozwiązywaniu równań wyższych stopni, zakończył się raczej zwycięstwem Ferrari, bowiem to właśnie jemu — jako pierwszemu — udało się rozwiązać równanie czwartego stopnia. W niczym to oczywiście nie zmienia faktu, że uczony z Brescii był wielkim matematykiem swoich czasów, któremu zawdzięczamy między innymi rozwój pierwszych jedenastu potęg dwumianu, zwanych od niego trójkątem Tartaglii. Podstawowym jego dziełem było słynne *General trattato di numeri et misura*, opublikowane po raz pierwszy w Wenecji w 1556 roku i wznowione — już po śmierci autora — cztery lata później. Co do Girolama Cardano zaś, to niezależnie od racji, którymi się kierował łamiąc własne obietnice, pamiętać trzeba, że nigdy nie podawał się on za odkrywcę metody rozwiązywania równań trzeciego stopnia. W swojej *Autobiografii* powołuje się wprost nie tylko zresztą na Tartaglię, jako tego, „który napisał... pierwszy rozdział" do *Ars magna*, ale wspomina także, że „samo odkrycie było dziełem kogoś trzeciego".[14] Chodziło mu niewątpliwie o Scypiona dal Ferro, z jakiegoś powodu nie wymienia go jednak z imienia. Cardano — wbrew utartej tradycji — jest więc pod tym względem uczciwy, choć warto przecież pamiętać, że sformułowana przez niego w *Artis magnis sive de regulis algebraice liber unus* teoria równań sześciennych nie jest w istocie ani zwykłym odtworzeniem, ani też po prostu kompilacją, lecz ma postać o wiele bardziej rozwiniętą, niż ta stworzona przez Scypiona dal Ferro i Tartaglię. Dokonał on między innymi pomysłowego podziału równań trzeciego stopnia na siedem grup, a w dziele *De regula Aliza libellus* udaje mu się także rozwiązać przypadek nie redukujący się do tych równań.

Pierwsze, nieśmiałe jeszcze próby wprowadzenia symboliki do działań matematycznych sięgają stulecia trzynastego, kiedy to Jordanus Nemorarius posługiwał się literami dla oznaczenia pewnych wielkości. Dwa stulecia później J. Müller, zwany Regiomontanusem, w swojej *Algorythmus demonstratus* — dziele wydanym o raz pierwszy w Norymberdze w 1554 roku, a więc prawie sto lat po śmierci autora — nie tylko w większym już zakresie wykorzystuje pomysły Nemorariusa, ale także zaczyna poszukiwać możliwości sformułowania całego rachunku literowego. Choć była to zmiana w tradycyjnym, to znaczy diofantejskim i arabskim, widzeniu algebry oraz niewątpliwie krok na drodze do symbolizacji, to prawdziwym twórcą tej ostatniej nazwać można dopiero F. Viète (lub de Viette). W *In artem analyticam Isagoge* z 1593 roku definiuje on algebrę, jako analizę operującą na figurach i formach rzeczy, czyli — inaczej mówiąc — na elementach alfabetu, w przeciwieństwie do arytmetyki, która działa na liczbach. Uwypuklenie procedur formalnych w postępowaniu algebraicznych, umożliwiło ujednolicenie we wspólnym wyrażeniu symbolicznym poszczególnych działań arytmetycznych o jednakowej strukturze. Algebra stała się dla Vièta sformalizowaną arytmetyką, która dzięki rezygnacji z konkretnych wartości liczbowych zdolna była wznieść się na wyższy poziom ogólności i abstrakcji, to znaczy odnaleźć te własności, które są stałe dla różnych wartości liczbowych. Wszystkie obowiązujące w arytmetyce prawa pojawiały się w algebrze jako prawa automatycznie regulujące kolejne przedstawienia i przekształcenia symboli. Zastosowując opraco-

[14] Por. G. Cardano, *Autobiografia*, Wrocław 1974, s. 214.

wany przez siebie rachunek literowy — spółgłoski oznaczały w nim wiadome, samogłoski zaś niewiadome — do rozwiązywania równań trzeciego i czwartego stopnia, Viète pierwszy ukazał algebrę jako pewnego rodzaju układ formuł, nie tylko rozwijających się stopniowo jedna od drugiej, ale i tworzących pewien porządek. Zainteresowania te ułatwiły mu też zapewne opracowanie metody przybliżonego rozwiązywania równań stopnia wyższego niż czwarty i pozwoliły zwycięsko wybrnąć z zadania, które przed matematycznym światem końca szesnastego stulecia postawił profesor Uniwersytetu w Lovanium, Adrian Romano. Tym zadaniem było rozwiązanie równania czterdziestego piątego stopnia.

Zaproponowane przez Vièta badania nad systemem symbolicznym kontynuował i rozwijał T. Harriot, profesor Uniwersytetu w Oksfordzie. Uproszczeniami w dziedzinie notacji — stanowiącymi naturalne uzupełnienie zmian dokonujących się w obrębie pojmowania matematyki — zajął się zaś przede wszystkim S. Stevin. W tej ostatniej materii renesans pozostawił po sobie używany odtąd sposób oznaczania potęg i zapisywania ułamków dziesiętnych. Koniec wieku szesnastego przyniósł wreszcie jeszcze jeden element symbolizacji. Do zapisywania poszczególnych działań, które wcześniej opisywano słowami, wprowadzono tak oczywiste dziś znaki: +, -, =, >, <, $\sqrt{\ }$ itp.

Przyglądając się szczegółowym osiągnięciom renesansowej geometrii bez trudu stwierdzimy, że tak problemy, jak i metody postępowania są greckiego pochodzenia. Nie można jednak — jak sądzę — wyciągać stąd prostego wniosku, iż wszystko, co działo się wówczas w dziedzinie geometrii, było zwyczajnym ciągiem dalszym, czymś ważnym w kategorii rozwijania, ale zupełnie bez znaczenia w kategorii inspiracji. Nie można tego czynić, bowiem — po pierwsze — pod maską starego zagadnienia kryło się niekiedy coś innego, po drugie zaś, nie wszystko to, co znalazło w renesansowej geometrii miejsce, udałoby się wyprowadzić od Starożytnych. I właśnie te dwie sfery — tego, co źle, a przynajmniej nie w pełni rozpoznane, i tego, co niezauważone — wydają mi się najważniejsze.

Przykładem takiego pozornie tylko antycznego zagadnienia jest problem proporcji. To niewątpliwie prawda, że jeden z najsławniejszych matematyków włoskiego Quattrocento — Luca Pacioli — wykładając na Uniwersytetach w Perugii, Rzymie, Neapolu i Bolonii koncepcję harmonii i boskiej proporcji przywoływał pitagorejsko-platońskiego ducha. Owa proporcja, czy też matka wiedzy — jak mówi o niej Pacioli w swojej słynnej, napisanej w 1497 roku *De divina proportione* — nie była jednak i co może ważniejsze nawet być nie mogła dokładnie określona liczbowo. Skąd brała się ta zaskakująca, a nawet — jak mogłoby się wydawać — zbędna deklaracja? Czy nie z pewnej zasadniczej różnicy między antycznym i renesansowym rozumieniem proporcji?

W starożytnej Helladzie — mimo kłopotów, jakich przysparzały niewspółmierności — nigdy nie zmieniła się pierwotna idea, dozwalająca porównywać między sobą tylko to, co jest podobne. Owo podobieństwo musiało mieć przy tym gwarancje ontyczne — co oczywiście nie zawsze oznaczało metafizyczne — a nie być tylko produktem umowy. Próby naruszenia wymogu zachowywania przy układaniu proporcji tego samego statusu ontycznego musiałyby się wydawać Grekom po prostu nonsensem. W Quattro- a potem Cinquecento coś jednak uległo, czy może raczej ulegać zaczęło, zmianie. Była to perspektywa epistemiczna, wynikająca z coraz powszechniejszego wprowadzania ilościowego ujmowania rzeczywistości. Jeżeli bowiem wszystko dawało się przedstawiać lub opisywać przy pomocy tych samych abstrakcyjnych liczb, to wszystko też można było między sobą porównywać, nie naruszając przy tym greckiego żądania jednolitości ontycznej, ani nie dokonując żadnych apriorycznych rozstrzygnięć w tej materii.

We wspomnianym wyżej traktacie L. Pacioli nie stoi jeszcze przed ostatecznym wyborem epistemicznym, a uzasadnienie prawa formy, którym jest *divina proportione*, odbywa się raczej na płaszczyźnie geometrii metafizycznej. Widziane więc jest w tej samej perspektywie, o której Pacioli pisał już w wydanej w Wenecji w 1494 roku *Summa arithmeticae*. Na marginesie warto może wyjaśnić pewne nieporozumienie, które dotyczy pierwszego wydania traktatu *Divina proportione*. Po raz pierwszy ukazał się on bowiem właściwie już w 1507 roku, opublikowany także w Wenecji i opatrzony tytułem *De V corporibus regularibus*. Tym, co zadecydowało, że za pierwszą uznaje się dopiero edycję o dwa lata późniejszą, jest fakt włączenia do poprzedniego wydania traktatu *De cinque corpi regolari* Piera della Francesca, którego Pacioli był uczniem i przyjacielem, a także opatrzenie całości tytułem dzieła mistrza, a nie własnym. Oskarżenie o plagiat, które nie tyle może wysunął, co raczej bardzo skutecznie rozpowszechnił G. Vasari,[15] jest jednak — jak się wydaje[16] — oparte po prostu na pomyłce co do intencji, którymi kierował się Pacioli. Ogłaszanie w jednym tomie prac różnych autorów było w renesansie praktyką wielce rozpowszechnioną. Nie miejsce tu oczywiście na dokładną analizę owego zjawiska, chciałabym jednak wspomnieć o dwóch istotnych jego przyczynach. Po pierwsze, dzięki tej praktyce ukazywały się dzieła, które samodzielnie — z różnych zresztą powodów — zapewne by się nie ukazały. Mamy tu więc do czynienia z mechanizmem podobnym do tego, który nieco później zadziałał w przypadku *Ars magna* Girolama Cardano i który dałoby się odnaleźć w ogromnej liczbie renesansowych pism lullicznych. Po wtóre zaś, dołączanie do swoich także dzieł innych autorów mogło być wyrazem szacunku i uznania dla własnego mistrza i z tym zapewne mamy do czynienia w wypadku Pacioli. Bywało jednak także sposobem pokazania, że temat danej pracy jest ważny, gdyż wielu się nim zajmowało i zajmuje oraz bywało specyficzną formą ukazywania wyższości własnych przemyśleń i rozwiązań, możliwą do zrozumienia, a nawet do

[15] Por. G. Vasari, *Żywoty najsławniejszych malarzy, rzeźbiarzy i architektów*, t. 2, Warszawa-Kraków 1985, s. 191 195, 197.

[16] Por. A. Guzzo, „La 'sublima metrica' di Piero della Francesca e la 'divina proporzione'", *Atti e Memorie della Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze di Arezzo*, 1970—1972, XL, s. 55—82; G. Arrighi, „Attorna de una denuncia vasariana di plagio", [w:] *Vasari storiografo e artista. Convegnio Internazionale Arezzo-Firenze 1974*, Firenze 1976, s. 479—483.

zaakceptowania w czasach, gdy nie tylko przypisy, ale nawet bezpośrednie odwoływanie się do współczesnych sobie autorów były czymś raczej nieznanym, a na pewno niestosowanym. Widzenie w układach regularnych wielościanów i kul modeli zarówno opisu, jak i struktury rzeczywistości, ale zarazem konieczność uwzględnienia również miary czysto liczbowej, co zaledwie zdaje się sugerować wspomniana wyżej uwaga Pacioli, pojawiło się w bardziej jawnej postaci na gruncie ściśle związanej z problemem proporcji teorii perspektywy. Odnaleźć je można u takich artystów, teoretyków i uczonych, jak Leon Battista Alberti, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Andrea Palladio, a wreszcie Federico Commandino. Zanim jednak zajmę się tym, co z renesansowej teorii perspektywy wydaje mi się najistotniejsze, chciałabym poświęcić trochę miejsca jeszcze jednemu elementowi ówczesnego krajobrazu geometrycznego.

Można się oczywiście spierać na ile *Transformationibus geometrice* Mikołaja z Kuzy miało wpływ na zainteresowanie się Leonarda da Vinci teorią przekształceń izowolumetrycznych, jest jednak faktem, że takie zainteresowanie przyczyniło się do sformułowania koncepcji, która podważała jedną z podstawowych zasad klasycznej geometrii. Zgodnie z ową zasadą każda figura uznawana była za statyczną, nieruchomą i oddzieloną od innych, równie nieruchomych i oddzielonych figur. Dopiero pomiędzy tak określonymi elementami szukano związków, podobieństw, różnic. Koncepcja przekształcania, umieszczona w geometrii, która figury rozpatrywała w ich wiecznym bycie, a nie w ich przygodnej zmianie, zagrażała więc samym fundamentom tej geometrii. Przyjęcie plastyczności figur geometrycznych, ich zdolności do zawierania w sobie — bez jakichkolwiek zmian na poziomie materii — nieskończonych form, budowało zarys koncepcji dynamizowania poszczególnych geometrycznych elementów. Świat nie miał już więc stanowić nieruchomego tworu, ale harmonię tego, co zmieniając się, reprezentuje za każdym razem jedną spośród nieskończonych możliwości. Dopatrywanie się u Leonarda pytania, czy mamy tu do czynienia z formą nieskończoną czy też z nieskończonością form, a także pytania, czy to, co się porusza posiada mniej «wartości» od tego, co nieruchome, podobnie jak poszukiwanie u niego akceptacji dla wielości rozumianej i jako obraz uniwersum, i jako najdoskonalsza metoda poznawcza, jest zapewne nieuzasadnione i przedwczesne. Jednakże sens koncepcji przekształcania i zmiany da się — jak sądzę — w pełni odnaleźć i zrozumieć tylko w owym klimacie intelektualnym, który kształtując się w Quattrocento, w stuleciu następnym umożliwi w matematyce utworzenie przez Napiera podstaw teorii funkcji, w fizyce — zarówno *De revolutionibus* Mikołaja Kopernika, jak i *Astronomiae instaurate mechanica* Tycho de Brahe, w filozofii wreszcie — uniwersalność niezliczonych, niezmierzonych i nieskończonych u Giordana Bruna.

Tradycja rozpatrywania perspektywy jako pewnej techniki malarskiej, widzenia jej przede wszystkim jako metody umożliwiającej przedstawianie na płaszczyźnie obrazu tego, co w rzeczywistości jest trójwymiarowe, stanowi co najmniej zubożenie owej teorii, która wyznacza — jak w *De pittura* określił to Leon Battista Alberti, a więc jeden z mistrzów perspektywy — wspólny teren sztuki i nauki. Poszukując odpowiedzi na pytanie, co wyznaczało ów obszar nie tylko spotkania, ale i być może wzajemnego przenikania się obu wymienionych dziedzin, trzeba zastanowić się nad dwoma szczegółami. Pierwszym jest granica pomiędzy sferą niepodzielnego władania intelektu, to znaczy — posługując się raz jeszcze słowami Albertiego[17] — tego, co da się uprawiać *solo ingenio*, a sferą, która nie podlega już słynnej arystotelesowskiej formule: nic dodać, nic ująć, nic zmienić.[18] Drugim jest miejsce i rola eksperymentu, a przede wszystkim tych doświadczeń, które przeprowadza się z wykorzystaniem określonych narzędzi. Dzięki perspektywie traktowanej jako rekonstrukcja pewnej rzeczywistości, ale zarazem jako konstrukcja obrazu tej rzeczywistości, a przede wszystkim dzięki pytaniu — by posłużyć się pojęciem z *De prospectiva pingendi* Piera della Francesca — o wzajemne *commensuratio*, które stanowiło przecież nie tylko porównywanie, ale także współwymierzanie, zaczęła się ujawniać subtelna różnica między klasycznym pojmowaniem geometrii operującej na własnościach i porządku metrycznym, a nowym jej rozumieniem, które uwzględniało także właściwości rzutowania. Dokonanie owego rozróżnienia oznaczało podważenie prawomocności uzasadnienia metafizycznego, do którego mogła się jeszcze odwoływać klasyczna geometria euklidesowa, posługiwała się ona bowiem jednym porządkiem i zasadą ograniczania relacji do tego, co współmierne. Uczynienie z perspektywy nauki czysto geometrycznej, wprowadzenie nowej koncepcji obrazu, a przede wszystkim idea punktu niewłaściwego, czy raczej punktu nieskończenie dalekiego prostej, sformułowana zapewne pod wpływem Leona Battisty Albertiego i jego pomysłu, by wyznaczać punkt główny każdego przedstawienia — jak twierdzi w swojej *Perspectivae libri sex* z 1600 roku Guido Ubaldo (lub Guidobaldo del Monte) — stanowiło zwieńczenie ówczesnych pomysłów, odkryć i fascynacji. Ich ojcem na terenie samej matematyki — dzięki wydanemu w Wenecji w 1558 roku dziełu *Prospectiva* — był F. Commandino.

Wspominając o badaniach Napiera, które przygotowywały podstawy do pojawienia się idei zmiennej oraz funkcji, poruszyłam problem niezmiernie ważny, choć zbyt rzadko za taki uważany. Chodzi mianowicie o problem inspirowania, o formułowanie pewnych pytań, wynikających oczywiście ze wspólnej wszystkim epokom ciekawości, ale wynikających w tym wypadku także ze specyficznie renesansowego nobilitowania zarówno wszelkiej aktywności, jak i takiego działania, jak poszukiwanie, oraz z ukształtowanej wówczas oraz rozpowszechnionej w stopniu większym niż się na ogół podejrzewa[19] metody dochodzenia do wiedzy, w której to metodzie sam proces osiągania poznania uznaje się nie tylko za równie ważny, ale być może nawet waż-

[17] Por. L. B. Alberti, *O malarstwie*, Wrocław-Kraków-Warszawa 1963, s. 3 — zob. też *Myśliciele, kronikarze i artyści o sztuce. Od Starożytności do 1500*, J. Białostocki (red.), Warszawa 1988, s. 358.

[18] Por. Arystoteles, *Etyka Nikomachejska*, 1106b 9—16; tenże, *Poetyka*, VIII, 4.

[19] Problem kształtu, roli i zakresu poszukiwania, jako specyficznie renesansowej metody poznawania i opisywania, stanowi wciąż otwarty problem badawczy, którego znaczenie wydaje mi się w zbyt małym stopniu uwzględniane przy interpretacjach zachodzących wówczas zjawisk.

niejszy od aktu, w którym poznanie jest w końcu osiągane. Do punktów, które można byłoby uznać za kluczowe dla matematyki czasów Odrodzenia trzeba więc — jak sądzę — zaliczyć przynajmniej jeszcze trzy zjawiska.

Pierwsze związane jest z wydanym w 1543 roku przez Tartaglię, a w piętnaście lat później przez Commandino, przekładem dzieł Archimedesa. Obie edycje obejmowały różne dzieła wielkiego syrakuzańczyka i zastępowały stare przekłady, którymi do tego czasu się posługiwano. Mówię oczywiście o dokonanym w dwunastowiecznej szkole toledańskiej przekładzie z języka arabskiego Gerarda z Cremony i o wiek późniejszym tłumaczeniu z greki Wilhelma z Moerbeke. Oczywiście żadna z tych edycji — i średniowiecznych, i renesansowych — nie zawierała jednej z najważniejszych prac Archimedesa, czyli *O metodzie*, którą odnaleziono jako palimpsest dopiero w 1906 roku. Zarówno jednak przekład Tartaglii, jak i Commandino, odegrał dużą rolę w rozważaniach nad metodą wyczerpywania i ściśle z nią złączonym sprowadzaniem do absurdu. Podważenie całej tej procedury, traktowanej od czasów antycznych jako najdoskonalsze narzędzie dowodzenia, a także uznanie jej na płaszczyźnie praktyki za sposób zbyt skomplikowany i pracochłonny, zapoczątkowało zwrot ku swoistej intuicji geometrycznej. Z jednej strony prowadziło to do wykorzystywania odnalezionych już związków przy określaniu relacji zachodzących między pewnymi nowymi elementami, a więc prowadziło do prób rozszerzania określonych stosunków na cały, a przynajmniej na możliwie duży obszar matematycznego uniwersum. Dobrym przykładem takich działań były podjęte przez F. Vièta, w wydanym w Tours w 1593 roku dziele *Variorum de rebus mathematicis responsorum libri VIII*, próby rozwiązania starego problemu tak zwanej kwadratury, czy może raczej wielokątności koła za pomocą rozumowania, które przenosiło archimedejski sposób postępowania z rozwiązań dotyczących kwadratury paraboli na zależności między obwodem a średnica koła. Z drugiej strony, prowadziło to do prób takiego zdefiniowania pewnych przyjętych od dawna, ale wciąż kłopotliwych pojęć, które odwoływały się wyłącznie do treści z zakresu matematyki. Ilustracją takiego postępowania jest szesnastowieczne podejście do rozważań nad nieskończonością, a przede wszystkim analiza wielkości nieskończenie małych, które kładły fundamenty pod teorię granic. Oryginalna koncepcja S. Stevina wiązana jest na ogół z dziełem *Hypomnemata mathematica*, choć to tylko łaciński tytuł jednej z prac, wydanej wraz z wieloma innymi pracami flamandzkiego matematyka w Leidzie w 1634 roku. Sam pomysł Stevina polegał na uznawaniu dwóch wielkości za równe wtedy, gdy nie daje się wyznaczyć żadnej wielkości, która byłaby mniejsza od ich różnicy. Innym przykładem omawianego przeze mnie zjawiska może być wyłożona przez L. Valeri w *De centro gravitatis solidorum* zasada mówiąca o równości między granicą ilorazu a ilorazem granic.

Drugie ze wspomnianych osiągnięć dotyczy prób określenia teoretycznych podstaw dla praktyki gier, przede wszystkim zaś gry w kości. Innymi słowy dotyczy ono tych związków i twórczych intuicji, które zapowiadały i kształtowały ideę rachunku prawdopodobieństwa, zrealizowaną w wieku XVII przez P. de Fermat i B. Pascala. Najważniejszą z owych intuicji było postawienie filozoficznego raczej, niż czysto matematycznego pytania o istnienie związków tam, gdzie różnica między możliwym i nie-możliwym wydawała się płynna i niepoddająca się jakiemukolwiek mierzeniu. Zasadniczą zmianę, która nastąpiła w tej materii w epoce renesansu, widać chyba najlepiej przy porównaniu słynnego w połowie XV wieku sporu lowańskiego,[20] który dotyczył przyszłych wydarzeń przygodnych, a dokładniej gwarancji prawdziwości wypowiedzi o owych *futura contingentia* i pochodzącego z dzieła *Spora la scoperta dei dadi* pomysłu Galileusza, że zależność między liczbą przypadków sprzyjających a liczbą przypadków możliwych nie tylko spełnia się doświadczalnie, ale ma też charakter obiektywny, czyli że rozkład przypadkowych zdarzeń przedstawia jednak pewien porządek i podlega pewnej prawidłowości. Trudno zaprzeczyć, że było już stąd bardzo blisko do uznania, że zależność tę da się liczbowo określić.

Oczywiście byłoby przesadą twierdzenie, że u Galileusza, czy też — nieco wcześniej — u Pacioli, Tartaglii lub w *Liber de ludis* G. Cardano[21] dopuszczano możliwość jakiejś jednej miary prawdopodobieństwa. W stadium poprzedzającym odkrycie samego rachunku skupiano się jednak na tych poszczególnych elementach, które poddawały się obliczaniu. Dostrzeżono w ten sposób — wykorzystując, jak można przypuszczać, doświadczenie zdobyte w trakcie samych gier — że możliwość lub nie-możliwość zajścia czegoś zaczyna układać się w pewien związek dopiero na poziomie dużej liczby wszystkich przypadków oraz że dalsze jej zwiększanie powoduje też wzrost regularności owych związków.

Pytanie, które trzeba — jak sądzę — koniecznie zadać, dotyczy zaskakującej na pierwszy rzut oka kolejności w odkryciach z zakresu probabilistyki. Nie rachunek kombinatoryczny bowiem, choć przecież bezpośrednio wiązał się on z praktyką i teorią gier, a także był już poprzedzony koncepcjami Rajmuda Lulla i jego renesansowych miłośników, ale zbudowanie ogólnego rachunku prawdopodobieństwa jako prawdziwej i ściśle matematycznej nauki okazało się pierwsze. Próbując wyjaśnić dlaczego tak się stało i czy w ogóle stać się tak musiało, odwołam się do ostatniego i kto wie czy nie najbardziej brzemiennego w konsekwencje osiągnięcia matematyki czasów renesansu.

Trudno byłoby znaleźć coś bardziej oczywistego, niż fakt, że nauki szczegółowe — w tym i matematyka — posługują się twierdzeniami ogólnymi. To jednak, co z dzisiejszej perspektywy wydaje się banalną prawdą, wcale nie zostałoby za nią uznane jeszcze w połowie XVI wieku. Nie odwoływano się bowiem wówczas do twierdzeń ogólnych, podobnie jak nie posługiwano się wzorami i formułami, które nadawałyby się do wielokrotnego, wręcz automatycznego, wykorzystywania. Nie twierdzenia i formuły były więc sposobem przedstawiania, porządkowania i dowodzenia we wszelkich matematycznych rozważaniach, lecz było nim każdorazowe, żmudne potwierdzanie rozumowania przez podwójne sprowadzanie do niedorzeczno-

---

[20] Toczył się on w latach 1465—1475.

[21] Dzieło to, występujące w *Autobiografi* Cardana pod tytułem *De ludis libri duo*, opublikowane zostało pośmiertnie w 1663 roku w Lyonie pod jeszcze innym tytułem — *De ludo aleae*.

ści. Koniec Cinquecento przyniósł i w tym zakresie wielką zmianę. Oznaczała ona nie tyle może odrzucenie, co przeformułowanie archimedejskiego wymogu każdorazowego przeprowadzania *reductio ad absurdum*. Oznaczała także — z jednej strony — możliwość uzyskania prostego, użytecznego i niezawodnego narzędzia, dzięki któremu nie tylko znacznie skracały się, ale stawały się też jaśniejsze i bardziej jednoznaczne matematyczne operacje i sposoby argumentowania. Z drugiej jednak strony zgoda na odwoływanie się do twierdzeń ogólnych, jako podstawy i zarazem strażnika poprawności działań na obszarze matematyki, a nawet szerzej nauk szczegółowych w ogóle, oznaczała swoiste przeniesienie na ten właśnie grunt praktyki argumentowania, którą bezlitośnie wykpiło i jak sądzono raz na zawsze usunęło na margines wiedzy filozoficzne Quattrocento. Chodzi o argumentowanie powołujące się na autorytet, czyli takie, którego zwolennik „posługuje się — jak trafnie zauważył Leonardo da Vinci[22] — nie tyle rozumem, co pamięcią". Autorytet twierdzeń ogólnych nie był przy tym wcale — choć matematycy bardzo by tego chcieli — ontycznie neutralny. Płaszczyzna metafizyczna, ukryta co prawda przed bezpośrednimi wykonawcami poszczególnych operacji i zapewne nawet przez nich nie uświadamiana, staje się jednak bardziej widoczna, gdy zada się dwa proste pytania: o uzasadnienie podporządkowania tego, co jednostkowe temu, co ogólne, i o gwarancje, które pozwalają uznać świat opisany zgodnie z matematycznymi regułami za odpowiadający rzeczywistemu, to znaczy za świat prawdziwy.

Rejestrując poszczególne elementy matematycznego pejzażu epoki renesansu i formułując pierwsze, te najbardziej podstawowe pytania o ujawniające się wówczas podobieństwa i różnice między klasycznym a nowożytnym pojmowaniem matematyki, próbowałam rozpoznać kształt pewnej granicy, którą stanowi właśnie Odrodzenie. Zamyka ono bowiem — z jednej strony — okres poszukiwania bezpośredniej, wzajemnej zgodności między matematyką a filozofią, w którym pitagorejski i platoński Bóg-Geometra oraz arystotelesowski Bóg-Pierwszy Poruszyciel odnajdują się dzięki filozoficznej recepcji chrześcijańskiego Boga, który jest zarówno najważniejszym Prawem, jak i jego ostatecznym uzasadnieniem. W okresie tym ugruntowuje się przekonanie, iż wiedza, mądrość i wiara są w swojej istocie nie tylko połączone, ale i matematycznie ujmowalne. Otwiera się zarazem — z drugiej strony — okres początkowo ukrywanej, a potem coraz bardziej jawnej rywalizacji między matematyką a filozofią o prymat w ustalaniu źródeł, zakresu i metod poznawania, a także o wyznaczanie kryteriów tego, co nauką jest lub też nie jest. Ważniejsze jednak od pytania o kształt owej granicy jest pytanie o jej sens, a więc pytanie już nie o to, co i jak się zmieniło, ale dlaczego i po co. Aby na nie odpowiedzieć nie wystarczy jednak po prostu oglądać świat poprzez sam przedmiot lub metodę poznania. Renesans określił tu bowiem własne miary, a najważniejszą z nich — jak słusznie sugeruje P. Rossi[23] — wyznacza odległość między *globus intellectualis* a *globus mundi*, to znaczy odle-

[22] Cyt. za E. Garin, *Filozofia Odrodzenia we Włoszech*, Warszawa 1969, s. 250.

[23] Por. P. Rossi, *Filozofowie i maszyny (1400-1700)*, Warszawa 1978, s. 55.

głość, która dzieli struktury wiedzy, w tym szeroko rozumianej aparatury teoretycznej od funkcji użytkowej, rozumianej jako zdolność do dostarczania nowych danych. Zmierzenie tą miarą matematyki doby Odrodzenia i czasów po nim następujących, choć równie interesujące co ważne dla określenia miejsca i roli matematyki w widzeniu, pojmowaniu i opisywaniu świata, jest nie tylko zadaniem wciąż niezrealizowanym, ale i takim, na realizację którego mało kto chyba czeka. Matematyków łatwo zrozumieć, zmuszałoby ich to bowiem do większej wrażliwości przy odwoływaniu się do własnych argumentów, jako wystarczająco przekonywujących dowodów. Jak jednak wytłumaczyć brak zainteresowania ze strony filozofów, którym owo renesansowe spojrzenie na matematykę, a więc także na własne z nią związki, pozwoliłoby może przywrócić zniszczoną dziś równowagę między subtelnością artysty, zdolnego twórczo dziwić się, zachwycać i błądzić, a solidnością rzemieślnika, zdolnego precyzyjnie nauczyć się, powtórzyć i uzasadnić?