Krzysztof Wójtowicz

Status hipotezy kontinuum w świetle koncepcji Woodina

Filozofia Nauki 19/4, 67-82

2011

Filozofia Nauki
Rok XIX, 2011, Nr 4(76)

Krzysztof Wójtowicz

Status hipotezy kontinuum w świetle koncepcji Woodina[1]

Niniejszy artykuł dotyczy prezentacji i analizy koncepcji Woodina. Woodin formułuje aksjomat mający za zadanie rozstrzygnięcie hipotezy kontinuum i uzasadnia tezę, iż jest to aksjomat naturalny z punktu widzenia teorii mnogości. Program Woodina ma charakter niezwykle techniczny i nie ma możliwości, aby przedstawiać go tutaj szczegółowo: główna praca Woodina liczy ok. 1000 stron, sam zaś quasi-popularny szkic argumentacji zajmuje pełne dwa artykuły.[2] Przedstawię jednak szkic, aby ukazać styl tej argumentacji. Pozwoli to w szczególności na pokazanie, jak bardzo tego typu argumentacja różni się od argumentacji odwołującej się do naszych zwykłych intuicji.

1. UWAGI WSTĘPNE

Zgodnie z I twierdzeniem Gödla każda dostatecznie bogata teoria pierwszego rzędu o rekurencyjnym zbiorze aksjomatów jest niezupełna: istnieje zdanie σ sformułowane w języku teorii T takie, że ani σ, ani $\neg\sigma$ nie są twierdzeniami teorii T. Przykładami teorii spełniających założenia I twierdzenia Gödla są arytmetyka Peano (PA) i teoria mnogości (ZFC). Oznacza to — swobodnie mówiąc — że istnieją pytania dające się sformułować w języku tych teorii, na które teoria ta nie jest w stanie udzielić odpowiedzi.

[1] Artykuł został napisany w ramach grantu N N101 094136.

[2] Czytelnika zainteresowanego szczegółami technicznymi odsyłam do prac przeglądowych [Woodin 2001] bądź do monografii [Woodin 1999].

Niezależne zdanie Gödla skonstruowane było za pomocą argumentacji o charakterze metamatematycznym, z użyciem metody przekątniowej, jednak dość wcześnie zidentyfikowano przykłady zdań „podejrzanych o niezależność” od ZFC. Sztandarowym — i niejako paradygmatycznym — takim zdaniem jest hipoteza kontinuum (oznaczana standardowo przez CH).[3] Jej relatywną niesprzeczność z teorią mnogości udowodnił Gödel w roku 1940, (posłużył się metodą tzw. zbiorów konstruowalnych), natomiast jej niezależność Cohen w 1963 (posłużył się metodą forcingu, której odkrycie doprowadziło do prawdziwej eksplozji wyników w zakresie relatywnej niesprzeczności). Tym samym stało się jasne, że ZFC nie jest w stanie — mówiąc swobodnie — udzielić odpowiedzi na pytanie o prawdziwą wartość kontinuum. Co więcej, ZFC pozostawia tu bardzo dużą swobodę wyboru — niesprzeczne z ZFC jest prawie każde zdanie postaci „$c=\aleph_\alpha$”[4].

Pojawia się jednak pytanie, czy istnieją jakieś racje, które pozwoliłyby przypisać kontinuum jakąś konkretną wartość (np. $\aleph_2$ albo $\aleph_{2000}$). Rzecz jasna, tego typu racje nie mogłyby już mieć charakteru czysto formalnego, ale musiałyby się odwoływać do naszego rozumienia pojęć matematycznych. Właśnie taką argumentację przedstawia Woodin.

2. KONCEPCJA WOODINA

Program badawczy Woodina ma zdecydowanie najbardziej zaawansowany technicznie charakter ze wszystkich znanych w literaturze prób sformułowania argumentu rozstrzygającego problem kontinuum.[5] Konkluzja Woodina jest taka, że CH jest — w świetle prezentowanych przez niego argumentów — fałszywa. Woodin prowadzi swoje rozważania, odwołując się do badań o charakterze metamatematycznym. W pewnym uproszczeniu, argumentacja Woodina przebiega według następującego schematu:

(1) Zauważamy, że dla pewnego typu struktur S można podać aksjomat A, który dość dobrze wyjaśnia teorię opisującą te struktury.

---

[3] Hipoteza kontinuum głosi, że moc zbioru liczb rzeczywistych (czyli moc kontinuum) jest najmniejszą z możliwych mocy nieskończonych, czyli że wynosi $\aleph_1$. Innymi słowy, nie istnieje nieprzeliczalny podzbiór **R**, który nie byłby równoliczny z **R**.

[4] Dla dowolnej funkcji F spełniającej dwa warunki: (1) F jest niemalejącą funkcją z klasy regularnych liczb kardynalnych w liczby kardynalne; (2) dla dowolnego κ: $\kappa<cf(F(\kappa))$; można skonstruować model dla teorii mnogości, w którym dla dowolnej regularnej liczby kardynalnej κ zachodzi $2^\kappa = F(\kappa)$ ([Easton 1970]). W szczególności 2^ω może być duże (być wartością $F(\omega)$ dla stosownej funkcji F).

[5] Ciekawym — choć bez porównania prostszym i uważanym za mało przekonujący — przykładem takiej argumentacji jest argumentacja Freilinga z [Freiling 1986]. Autor — odwołując się do pewnych intuicji probabilistycznych — formułuje dość intuicyjny aksjomat, z którego w bardzo prosty sposób wynika negacja hipotezy kontinuum (por. też [Wójtowicz 2004, 2005]).

(2) Okazuje się, że te interesujące nas struktury można na różne sposoby uogólniać. Woodin wskazuje naturalny kierunek dla tego uogólniania, który powadzi do struktur typu S*.

(3) Pojawia się naturalne pytanie, czy można sformułować naturalny aksjomat A*, który będzie odgrywał analogiczną rolę dla teorii struktur S*, jak aksjomat A dla teorii struktur S. Taki aksjomat A* miałby porządkować i wyjaśniać teorię opisującą struktury S* (podobnie jak A porządkuje teorię struktury S).

(4) Woodin argumentuje, że można wskazać naturalne kandydatury na taki aksjomat A*.

(5) Okazuje się, że kiedy przyjmiemy A*, to wynika stąd, że CH jest fałszywa.

Pojawia się natychmiast pytanie, co mamy na myśli, mówiąc o porządkowaniu (wyjaśnianiu) teorii, co to znaczy, że uogólnienie jest naturalne, na czym polegają analogie w porządkującej roli aksjomatów A i A* w ramach różnych teorii, w odniesieniu do różnych struktur, *etc*. Nie są to oczywiście pojęcia techniczne, zarazem jednak mają one — jak się wydaje — pewien uchwytny sens. Aby w pewien sposób uchwycić i doprecyzować ów sens, konieczne jest odwołanie się w prowadzonych analizach do bardzo złożonych technicznie pojęć. Woodin w szczególności definiuje bardzo abstrakcyjne uogólnienie pojęcia dowodu w abstrakcyjnie pojmowanej logice, a następnie formułuje stosowny aksjomat w tej logice, który prowadzi do (negatywnego) rozstrzygnięcia hipotezy kontinuum.

Jednym z ważnych dla argumentacji Woodina pojęć jest pojęcie determinacji. Ma ono związek z grami nieskończonymi, które stanowią uogólnienie zwykłych (skończonych) gier. Mówiąc o grach nieskończonych, mamy na myśli po prostu fakt, że gracze wykonują nieskończenie wiele posunięć. W najprostszym (ale już dostatecznie ciekawym) przypadku zbiór możliwych decyzji graczy jest dwuelementowy: gracze w każdym ruchu wybierają 0 lub 1. Gracze I i II wykonują ruchy naprzemiennie, w wyniku tej (nieskończonej) gry powstaje więc nieskończony ciąg zerojedynkowy. Zbiorem wszystkich możliwych gier jest przestrzeń tych nieskończonych ciągów, czyli $\{0,1\}^{\omega}$. Rozważmy dowolny zbiór $A\subseteq\{0,1\}^{\omega}$ i zdefiniujmy grę G_A jako grę, w której wygrywa gracz I, jeśli wynik gry (czyli uzyskany w wyniku gry ciąg $\alpha\in\{0,1\}^{\omega}$) należy do zbioru A. Często dodajemy tu dodatkowe określenie, jeśli np. zbiór A jest zbiorem otwartym, nazwiemy grę G_A grą otwartą, jeśli A jest borelowski — grą borelowską, *etc*.[6] Podobnie jak w przypadku gier skończonych możemy mówić o strategiach, np. w przypadku gracza I strategią jest funkcja ze skończonych ciągów 0-1 (długości parzystej) w zbiór $\{0,1\}$.[7] Jeśli któryś z graczy posiada strate-

[6] Aby mówić o otwartych, domkniętych, borelowskich, *etc.* podzbiorach $A\subseteq\{0,1\}^{\omega}$, konieczne jest oczywiście zadanie pewnej topologii na zbiorze $\{0,1\}^{\omega}$; szczegóły techniczne nie są istotne.

[7] Matematyczne pojęcie strategii odzwierciedla pojęcie intuicyjne: jest to po prostu funkcja, która na podstawie dotychczasowego przebiegu gry wyznacza kolejny ruch. Intuicyjnie strategia mówi graczowi, jaki ruch należy wykonać, jeśli przebieg gry jest opisany danym ciągiem 0-1. Gracz ma strategię wygrywającą, jeśli postępowanie zgodnie z ową funkcją doprowadzi go do wygranej.

gię wygrywającą (tzn. funkcja τ ma tę własność, że postępowanie zgodnie z nią prowadzi do wygranej), to powiemy, że gra G_A jest ZDETERMINOWANA.[8]

Elementarny wynik dotyczący gier skończonych (zakładamy, że nie ma remisów) głosi, że zawsze istnieje strategia wygrywająca dla któregoś z graczy. W przypadku gier nieskończonych tak nie jest, i problem determinacji jest znacznie bardziej subtelny. Znane są cząstkowe wyniki dotyczące tego problemu, najprostszy z nich mówi, że wszystkie gry otwarte i domknięte są zdeterminowane. Fakt ten udowodnili Gale i Stewart ([Gale, Stewart 1953]), stawiając jednocześnie pytanie, czy podobne twierdzenie zachodzi dla gier borelowskich. Pozytywnej odpowiedzi udzielił Martin [Martin 1975].

Pojawia się naturalne pytanie dotyczące determinacji gier G_A dla odpowiednich zbiorów typu A. Najsilniejsza z możliwych hipotez głosi, że każda gra nieskończona jest zdeterminowana. To stwierdzenie nosi nazwę aksjomatu determinacji (AD); aksjomat ów został sformułowany przez Mycielskiego i Steinhausa w roku 1962. Jest on sprzeczny z AC (ZFC+AD jest teorią sprzeczną), jest natomiast relatywnie niesprzeczny z ZF. Ponieważ na AD można patrzeć jako na naturalne uogólnienie twierdzenia mówiącego o determinacji gier skończonych, można go więc uznać za alternatywę dla pewnika wyboru.

Pojawia się pytanie, czy jest to alternatywa atrakcyjna? W powszechnej opinii tak nie jest. Wynik Solovaya mówi, że przy założeniu AD, $\aleph_1$ oraz $\aleph_2$ są liczbami mierzalnymi (czyli — w pewnym sensie — bardzo dużymi). Woodin udowodnił, że teoria ZF+AD jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy niesprzeczna jest teoria ZFC+„istnieje nieskończenie wiele liczb kardynalnych Woodina”. Liczby Woodina są większe niż liczba mierzalna, czyli teoria ZFC+„istnieje nieskończenie wiele liczb kardynalnych Woodina” jest teorią znacznie silniejszą niż ZFC+MC. Oznacza to również, że AD jest bardzo silnym aksjomatem (czy inaczej: że założenie o niesprzeczności ZF+AD jest równoważne z bardzo silnym założeniem dotyczącym niesprzeczności pewnego rozszerzenia ZFC). A zatem — pomijając nawet kwestie czysto matematycznej owocności aksjomatów AD i AC — istnieją argumenty metamatematyczne świadczące przeciwko AD (a w każdym razie skłaniające do daleko idącej powściągliwości).

Jeśli zatem poruszamy się w ramach ZFC, mamy następujące wyniki:

(1) Gry borelowskie są zdeterminowane (inaczej: zdanie G_A dla zbiorów borelowskich jest twierdzeniem ZFC).

(2) AD jest fałszywy.

Naturalne jest pytanie o aksjomaty, które leżą pomiędzy zdaniami (1) i (2) — w tym sensie, że mówią o determinacji gier pewnej klasy, ale nie są tak silne jak

[8] Trywialnym przykładem gry zdeterminowanej jest gra, w której A = zbiór ciągów zaczynających się od 0. Strategia wygrywająca gracza I polega na wyborze 0 w pierwszym ruchu, potem może robić cokolwiek.

(fałszywy) AD, i oczywiście są niesprzeczne z ZFC. Tego typu przemyślenia stanowią tło rozważań Woodina.

Przypomnijmy kilka pojęć: dla dowolnej liczby kardynalnej κ, klasę zbiorów dziedzicznie mocy mniejszej od κ oznaczamy przez $H(\kappa)$.[9] W szczególności $H(\omega)$ to klasa zbiorów dziedzicznie skończonych, a $H(\omega_1)$ to klasa zbiorów dziedzicznie przeliczalnych. Woodin rozpoczyna swoje rozważania od obserwacji, że CH można interpretować jako stwierdzenie dotyczące struktury $(H(\omega_2),\in)$ (czyli struktury złożonej ze zbiorów o mocy dziedzicznie mniejszej niż ω_2, z relacją należenia). Wynika to stąd, że liczby rzeczywiste możemy utożsamiać z podzbiorami ω (np. via funkcje charakterystyczne, interpretowane jako rozwinięcie dwójkowe danej liczby). Zauważmy teraz, że CH mówi po prostu, że zbiór $\mathbf{R}$ ma moc $\aleph_1$, czyli znajduje się w $H(\omega_2)$. Innymi słowy, zbiór $\mathbf{R}$ jest elementem $H(\omega_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi CH. Można więc powiedzieć, że droga do ustalenia, czy zachodzi CH wiedzie poprzez badania dotyczące struktury $H(\omega_2)$. W szczególności chcielibyśmy znaleźć aksjomaty, które pozwolą na możliwie pełne zrozumienie struktury $H(\omega_2)$. Woodin traktuje strukturę $H(\omega_2)$ jako naturalną kontynuację ciągu struktur $H(\omega)$ oraz $H(\omega_1)$ i rozpoczyna swoje analizy od badania tychże.

Struktura $H(\omega)$ jest stosunkowo prosta — jest bowiem tym samym, co V_ω, ta zaś — *via* naturalną interpretację — jest po prostu tym samym, co liczby naturalne (czy też inaczej: teorią opisującą strukturę V_ω jest po prostu arytmetyka PA).[10] Z kolei struktura $H(\omega_1)$ jest równoważna strukturze $(P(\mathbf{N}), \mathbf{N}, +, \bullet, \in)$, czyli strukturze opisanej przez teorię liczb naturalnych drugiego rzędu.

Badania dotyczące $H(\omega_2)$ mają stanowić swoiste uogólnienie badań dotyczących $H(\omega)$ i $H(\omega_1)$. Woodin rozpoczyna od obserwacji, że pewne pytania w kwestii $H(\omega_1)$ są nierozstrzygalne w ramach ZFC, jednak „*istnieją aksjomaty dla teorii liczb drugiego rzędu, które prowadzą do teorii równie kanonicznej, jak teoria liczb*” [Woodin 2001, 569]. Odwołując się do przedstawionego wcześniej schematu argumentacji, chodzi o pewien aksjomat A opisujący strukturę $S= H(\omega_1)$. Pojawia się pytanie, czy naturalnym uogólnieniem $H(\omega_1)$ jest $H(\omega_2)$ — i jeśli tak, to czy można wskazać aksjomat A* stanowiący naturalne uogólnienie aksjomatu A dla struktury $H(\omega_2)$. Odwołując się do wspomnianej na wstępie struktury argumentacji, rolę struktury S pełni

---

[9] Zbiory dziedzicznie mocy $<\kappa$ to zbiory, których domknięcie przechodnie ma moc $<\kappa$. Domknięcie przechodnie trcl(A) zbioru A to — intuicyjnie — zbiór złożony ze wszystkich możliwych elementów danego zbioru, elementów jego elementów, elementów tych elementów, *etc.* Formalnie, definiujemy dla danego zbioru A:

$A_0 = A$

$A_{n+1} = \cup A_n$

$\mathrm{trcl}(A) = \cup\{A_n : n\in\omega\}$

[10] Idea interpretacji jest prosta: rozważmy rozwinięcie $n = c_k^n \cdot 2^k + c_{k-1}^n \cdot 2^{k-1} + \ldots + c_1^n \cdot 2 + c_0^n$, gdzie $c_i^n=0,1$. Definiujemy relację E: nEm gdy $c_n^m=1$. System (ω,E) jest izomorficzny z $(V_\omega,\in)$. (Zachodzi też fakt ogólny: jeśli M jest modelem dla PA, to (M,E^M) jest modelem dla $ZF^{\neg Inf}$ — czyli dla teorii zbiorów dziedzicznie skończonych.

$H(\omega_1)$, rolę struktury S* pełni $H(\omega_2)$; A to aksjomat dotyczący $H(\omega_1)$ (będzie o nim mowa później), natomiast A* to jego odpowiednik dotyczący $H(\omega_2)$.

Na strukturę $H(\omega_1)$ możemy patrzeć (via interpretację) po prostu jako na strukturę $(P(\mathbf{N}), \mathbf{N}, +, \bullet, \in)$. Jakie jest naturalne uogólnienie? Pojawiają się tu dwie kandydatury: $(P(\mathbf{R}), \mathbf{R}, +, \bullet, \in)$ oraz $H(\omega_2)$. Przy założeniu CH obie te struktury są wzajemnie interpretowalne[11]; przy braku CH mogą się różnić. Ponieważ naszym celem jest ustalenie statusu CH, więc oczywiście nie możemy z góry zakładać CH (ani jego negacji); tym samym nie możemy z góry zakładać, że owe struktury są identyczne. Konieczne jest więc dokonanie wyboru „kierunku uogólnienia". Woodin twierdzi że, naturalnym uogólnieniem struktury $H(\omega_1)$ jest właśnie $H(\omega_2)$, aby zaś uzasadnić ten wybór, konieczne jest lepsze zrozumienie teorii struktury $H(\omega_1)$.

W rozważaniach Woodina istotną rolę odgrywa pojęcie zbioru rzutowego. Przypomnijmy, że zbiorem rzutowym $A \subseteq \mathbf{R}^n$ nazwiemy taki zbiór, który może być uzyskany z pewnego domkniętego podzbioru $X \subseteq \mathbf{R}^{n+k}$ za pomocą skończonej liczby operacji rzutowania i dopełnień. Można więc powiedzieć, że pytania dotyczące struktury $H(\omega_1)$ odpowiadają pytaniom dotyczącym zbiorów rzutowych. Okazuje się, że już na tym poziomie pojawiają się problemy nierozstrzygalne w ZFC, niezależne od ZFC jest np. istnienie paradoksalnego rozkładu kuli na zbiory rzutowe. Pojawia się pytanie, czy można sformułować jakieś naturalne aksjomaty, które pozwalałyby na rozstrzygnięcie tego typu problemów, a więc — mówiąc swobodnie — które czyniłyby teorię struktury $(H(\omega_1),\in)$ „możliwie zupełną".

Ponieważ zbiory rzutowe można utożsamiać z odpowiednimi podzbiorami $(H(\omega_1),\in)$, informacji na temat tej struktury możemy poszukiwać poprzez badanie zbiorów rzutowych. W tym kontekście pojawia się aksjomat determinacji dla zbiorów rzutowych (oznaczany skrótem PD — od *projective determinacy*), który głosi, że każda gra G_A, gdzie $A \subseteq [0,1]$ jest zbiorem rzutowym, jest grą zdeterminowaną. PD dotyczy *prima facie* wyłącznie gier. Okazuje się jednak, że ma on głęboki związek z aksjomatami dotyczącymi dużych liczb kardynalnych.[12] Z punktu widzenia programu Woodina, kulminacją tych badań jest jego wynik ukazujący następujący związek między PD a aksjomatami dużych liczb kardynalnych:

TWIERDZENIE (Woodin) Równoważne są:

(1) PD.
(2) Dla każdego $k \in N$ istnieje przeliczalny przechodni zbiór M taki, że:
(i) $(M,\in) \models$ spełnia: ZFC+„istnieje *k* liczb kardynalnych Woodina" oraz

---

[11] Podobnie jak $H(\omega_1)$ i $(P(\mathbf{N}), \mathbf{N}, +, \bullet, \in)$ są wzajemnie interpretowalne.

[12] Istnieją zależności między wynikami dotyczącymi determinacji gier pewnej klasy a aksjomatami dużych liczb kardynalnych. Na przykład aksjomat istnienia liczby mierzalnej implikuje determinację gier $\Sigma^1{}_1$, ale nie pozwala na udowodnienie gier $\Sigma^1{}_2$. Znany jest cały ciąg wyników, które dają coraz lepszy wgląd w owe zależności; szczegóły można odnaleźć w [Woodin 2001].

(ii) model M jest przeliczalnie iterowalny (*countably iterable*)[13].

Mówiąc swobodnie, wynik ten pokazuje, że przyjęcie aksjomatu PD jest równoważne z założeniem istnienia modeli dla całego ciągu coraz to silniejszych rozszerzeń ZFC zakładających istnienie pewnego typu dużych liczb kardynalnych (i spełniających pewien warunek techniczny).

Dalsze rozważania Woodina odnoszą się do tzw. aksjomatów forcingowych, czyli aksjomatów dotyczących pewnych technicznych aspektów konstruowania modeli dla ZFC za pomocą techniki forcingu. Prowadzi go to do następujących konkluzji (które nie mają charakteru wyników technicznych, ale ustaleń metateoretycznych):

(1) PD jest POPRAWNYM aksjomatem dla zbiorów rzutowych.

(2) Przy PD nie ma konieczności odwoływania się w istotny sposób do AC przy analizie struktury $(H(\omega_1),\in)$.

(3) Jedyne znane przykłady nierozstrzygalnych problemów dotyczących zbiorów rzutowych (przy założeniu PD) przypominają zdania Gödla i zdania dotyczące niesprzeczności [Woodin 2001, 575].

Dotychczasowe rozważania można podsumować stwierdzeniem, że znaleziono ów naturalny aksjomat A dla struktury $H(\omega_1)$ — jest nim właśnie PD. Dochodzimy zatem do problemu naturalnego, rozsądnego uogólnienia aksjomatu PD, który pozwoliłby na lepsze zrozumienie struktury $(H(\omega_2),\in)$. Należy przy tym pamiętać, że poszukiwany aksjomat ma pomóc w rozstrzygnięciu statusu CH. Zauważmy tutaj, że na mocy wyników Levy'ego–Solovaya nie wystarczą tu aksjomaty dużych liczb.[14] Woodin twierdzi więc:

> My point is simply that the axioms we seek cannot be implied by any (consistent) large cardinal hypothesis remotely related to those currently accepted as large cardinal hypotheses [Woodin 2001, 682].

Owe poszukiwane aksjomaty muszą mieć zupełnie inny charakter niż klasyczne aksjomaty dużych liczb kardynalnych.

Woodin poszukuje więc wiarygodnych zasad metateoretycznych, a droga wiedzie poprzez rozważanie silnych, abstrakcyjnie zdefiniowanych logik. W takim środowisku pojęciowym główne pytanie przyjmie postać:

(*) Czy teoria struktury $(H(\omega_2),\in)$ może zostać skończenie zaksjomatyzowana (nad ZFC) w (rozsądnej) logice, która jest rozszerzeniem logiki pierwszego rzędu? [Woodin 2001, 682].

---

[13] Pojęcie *countably iterable* jest technicznym pojęciem dotyczącym modeli wewnętrznych i jego formalna definicja nie jest istotna dla dalszych rozważań.

[14] Wyniki Levy'ego i Solovaya pokazują, że przyjęcie założenia o istnieniu liczby mierzalnej, zwartej, Ramseya, *etc.*, nie mówią nic o wartości kontinuum: zarówno CH, jak i ¬CH są niesprzeczne z założeniem istnienia tych liczb [Levy, Solovay 1967].

Logiki, które ma na myśli Woodin, są charakteryzowane poprzez pojęcie wynikania, które z kolei zdefiniowane jest (semantycznie) w terminach tzw. struktur testowych. Pojęcie struktury testowej umożliwia zdefiniowanie pojęcia konsekwencji $\vdash_0$:

> ZFC $\vdash_0 \alpha \equiv$ dla dowolnej struktury testowej M takiej, że M spełnia ZFC, M spełnia też α.

Jest to więc po prostu pojęcie wynikania semantycznego zrelatywizowane do pewnej klasy struktur. Oczywiście, im mniejsza klasa struktur testowych, tym silniejsze będzie tak zdefiniowane pojęcie wynikania.[15] Pośród tak zdefiniowanych logik powstaje więc pewna hierarchia, w której logika pierwszego rzędu jest najsłabszą interesującą logiką, ponieważ w logice pierwszego rzędu klasa struktur testowych to po prostu WSZYSTKIE modele: aby stwierdzić, że pewne zdanie α wynika z teorii T, musimy się upewnić, że jest ono prawdziwe we wszystkich modelach dla T (a nie jedynie w modelach z jakiejś węższej klasy struktur testowych).

Woodin dalej rozważa pewną własność definiowanych za pomocą struktur testowych abstrakcyjnych logik (tzw. *generic soundness*). Mówiąc swobodnie, własność ta głosi, że w klasie struktur testowych pewnej szczególnej postaci zachodzi odpowiednie wynikanie. Istotne tutaj jest wykorzystanie modeli boolowskich postaci V_α^B, które odgrywają rolę w konstrukcjach forcingowych.[16] Istotne dla rozważań jest to, że jeśli założymy istnienie właściwej klasy liczb kardynalnych Woodina, to istnieje dużo (nieograniczona klasa) liczb porządkowych α takich, że V_α^B jest modelem dla ZFC — a zatem takich, że własność *generic soundness* staje się nietrywialna.

Kolejnym wprowadzonym przez Woodina pojęciem jest pojęcie skończonej aksjomatyzacji relatywnie do logiki $\vdash_0$:

Dla danej (silnej) logiki $\vdash_0$ teoria nad strukturą $(H(\omega_2),\in)$ jest „skończenie zaksjomatyzowana nad ZFC", jeśli istnieje zdanie Ψ takie, że dla pewnej liczby porządkowej α mają miejsce następujące fakty (i)-(ii):

(i) $V_\alpha \models$ ZFC+Ψ;

(ii) dla dowolnego zdania φ zachodzi:

ZFC+$\Psi \vdash_0$ „$(H(\omega_2),\in) \models\varphi$" wtedy i tylko wtedy, gdy $(H(\omega_2),\in)\models\varphi$ [Woodin 2001, 683]

---

[15] W skrajnym wypadku, gdyby ta klasa składała się z jednego tylko modelu M dla ZFC, to pojęcie wynikania zdefiniowane byłoby jako prawda w tym modelu M — w szczególności dla każdego zdania α, wnioskiem z ZFC relatywnie do klasy {M} byłoby albo zdanie α, albo jego negacja (nie byłoby zdań nierozstrzygalnych). Mówiąc w uproszczeniu, im mniejsza klasa modeli testowych, tym mniejsza klasa zdań nierozstrzygalnych. Jednoelementowa klasa modeli testowych {M} rozstrzyga wszystkie problemy.

[16] Definicja brzmi następująco [Woodin 2001, 683]: Niech $\vdash_0$ będzie silną logiką. Spełnia ona warunek *generic soundness*, jeśli dla każdego zdania φ takiego, że ZFC $\vdash_0 \varphi$, spełniony jest warunek: (*) jeśli B jest zupełną algebrą Boole'a, α zaś liczbą porządkową taką, że $V_\alpha^B \models$ ZFC, to wówczas również $V_\alpha^B \models \varphi$. Można powiedzieć, że każde zdanie, które wynika z ZFC w sensie $\vdash_0$, jest też semantyczną konsekwencją ZFC relatywnie do klasy struktur postaci V_α^B.

Można powiedzieć, że idea jest taka: chcemy tak sprytnie znaleźć silną logikę $\vdash_0$ oraz zdanie Ψ, żeby można było za pomocą tej logiki $\vdash_0$ i tego zdania Ψ rozstrzygać, czy interesujące nas zdanie φ jest spełnione w strukturze $(H(\omega_2),\in)$. Drugi warunek w definicji głosi bowiem, że zdanie φ jest prawdziwe w tej strukturze wtedy i tylko wtedy, gdy owa silna logika $\vdash_0$ dowodzi tego faktu relatywnie do teorii ZFC+Ψ.[17] Innymi słowy, w owej silnej logice $\vdash_0$ możemy (przy założeniu ZFC+Ψ) dowieść DOKŁADNIE tych zdań φ, które są prawdziwe w strukturze $(H(\omega_2),\in)$. Można więc powiedzieć, że zdanie Ψ niesie w sobie te właśnie dodatkowe informacje, które są niezbędne, aby móc rozstrzygać problemy dotyczące $(H(\omega_2),\in)$.

Rolę takiej naturalnej logiki odgrywa tzw. Ω-logika. Pojęcie dowodu w tej logice ma bardzo abstrakcyjny charakter: „dowody" będą bowiem utożsamiane z pewnymi szczególnymi zbiorami $A\subseteq\mathbf{R}^n$ (można powiedzieć, że owe zbiory będą swoistymi „świadkami" dla dowodów). Tymi szczególnymi zbiorami będą tzw. *universally Baire sets* (zbiory uniwersalnie Baire'a).[18] Owe zbiory uniwersalnie Baire'a są uporządkowane w pewnej hierarchii złożoności (na przykład ω_1 początkowych szczebli tej hierarchii jest zadanych przez zbiory borelowskie) [Woodin 2001, 684]. Skoro owe zbiory utożsamimy z dowodami, więc — oczywiście w abstrakcyjnym sensie — złożoność zbioru A odpowiada złożoności pewnego „dowodu" w Ω-logice (tego dowodu, dla którego A jest „świadkiem").

Kluczowa definicja Ω-logiki opiera się na kilku pomocniczych pojęciach technicznych, w szczególności jednym z nich jest pojęcie tzw. A-domkniętego modelu.[19] Pomijam tu szczegóły techniczne. Ω-logika jest zdefiniowana przy założeniu, że istnieje właściwa klasa liczb Woodina:

DEFINICJA: Przypuśćmy, że istnieje właściwa klasa liczb Woodina. Niech φ będzie zdaniem. Zdefiniujemy relację $\vdash_\Omega$:

(*) ZFC $\vdash_\Omega \varphi$, jeśli istnieje zbiór uniwersalnie Baire'a $A\subseteq R^n$ taki, że: $(M,\in)\models\varphi$ dla dowolnego przeliczalnego A-domkniętego modelu M dla ZFC.

Zbiór $A\subseteq R^n$ (uniwersalnie Baire'a) utożsamiany jest z dowodem zdania φ w Ω-logice. To utożsamienie ma następujący sens: klasą struktur testowych staje się klasa przeliczalnych A-domkniętych modeli, bo w każdym takim modelu musi być prawdziwe zdanie φ. Można też powiedzieć, że nasz „zbiór-świadek" A generuje klasę modeli testowych, w których prawdziwe jest zdanie φ.

---

[17] Pamiętajmy, że mówiąc o dowodzeniu, mamy na myśli owo abstrakcyjnie rozumiane dowodzenie relatywnie do $\vdash_0$.

[18] Zbiór $A\subseteq R^n$ jest uniwersalnie Baire'a, gdy dla każdej funkcji ciągłej $F:\Omega\rightarrow R^n$ (gdzie Ω jest zwartą przestrzenią Hausdorffa), zbiór $F^{-1}[A]\subseteq\Omega$ ma własność Baire'a w Ω.

[19] Pojęcie A-domkniętego modelu jest technicznym pojęciem, które ma związek z tzw. kompaktyfikacją Cecha–Stone'a na odpowiedniej przestrzeni topologicznej.

Pamiętajmy, że wprowadzanie tych pojęć technicznych motywowane jest chęcią znalezienia naturalnej logiki, która z kolei pozwoli nam uzyskać lepszy wgląd w strukturę $(H(\omega_2),\in)$ (i w ten sposób udzielić nam informacji na temat CH). Woodin argumentuje, że to właśnie Ω-logika jest naturalną logiką, o czym mają świadczyć m.in. następujące wyniki techniczne. Pierwszy z nich mówi o swoistej niezmienniczości, a mianowicie o tym, że przejście do modeli Boolowskich nie ma wpływu na dowodliwość Ω-logice (tzn.: Ω-logika dowodzi coś wtedy i tylko wtedy, gdy ta dowodliwość ma miejsce w każdym boolowskim modelu V^B). Własność ta nosi nazwę *generic invariance*. Formalnie:

TWIERDZENIE [Woodin 2001, 685]: Przypuśćmy, że istnieje klasa właściwa liczb Woodina, a φ jest zdaniem. To dla dowolnej zupełnej algebry Boole'a B zachodzi:

$$\mathrm{ZFC} \vdash_{\Omega} \varphi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } V^B \models \text{„}\mathrm{ZFC} \vdash_{\Omega} \varphi\text{”}.$$

Kolejny wynik mówi, że Ω-logika dowodzi dokładnie prawdziwych zdań na temat struktury $(H(\omega_1),\in)$:

TWIERDZENIE: Przypuśćmy, że istnieje klasa właściwa liczb Woodina, a φ jest zdaniem. Wówczas: $\mathrm{ZFC} \vdash_{\Omega}$ „$(H(\omega_1),\in) \models \varphi$” wtedy i tylko wtedy, gdy $(H(\omega_1),\in) \models \varphi$.

Okazuje się, że w Ω-logice aksjomat PD wynika z ZFC (tzn. $\mathrm{ZFC} \vdash_{\Omega} \mathrm{PD}$). To pokazuje, że Ω-logika jest silniejsza niż klasyczna logika (bo oczywiście w klasycznej logice PD nie jest twierdzeniem ZFC). Zgodnie z przedstawionymi wcześniej argumentami Woodina aksjomat PD stanowi właściwy aksjomat, który — w pewnym sensie — wyjaśnia (porządkuje) teorię struktury $(H(\omega_1),\in)$ [Woodin 2001, 686]. Skoro jednak ów naturalny aksjomat jest dowodliwy w Ω-logice, stanowi to argument na rzecz tezy, że Ω-logika jest właściwa z punktu widzenia opisu struktury $(H(\omega_1),\in)$.

Zadaliśmy wcześniej pytanie, czy można podać jakiś analog PD, który odgrywałby podobnie porządkującą rolę w wypadku teorii struktury $(H(\omega_2),\in)$ — czyli aksjomat, który umożliwiałby rozstrzyganie pytań dotyczących struktury $(H(\omega_2),\in)$. Jeśli uznamy, że to właśnie Ω-logika jest właściwym narzędziem opisu, to naszemu pytaniu możemy nadać precyzyjną postać:

(*) Czy istnieje zdanie Ψ takie, że teoria ZFC+Ψ jest Ω-niesprzeczna, natomiast dla dowolnego zdania φ zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości:
$\mathrm{ZFC}+\Psi \vdash_{\Omega}$ „$(H(\omega_2),\in) \models \varphi$”
lub
$\mathrm{ZFC}+\Psi \vdash_{\Omega}$ „$(H(\omega_2),\in) \models \neg\varphi$”

Woodin motywuje poszukiwanie takich zdań, twierdząc, iż przyjęcie aksjomatów, które rozstrzygają problemy dotyczące struktury $(H(\omega_2),\in)$ w Ω-logice, przypomina nieco sytuację teorii liczb. Woodin twierdzi bowiem, że w zasadzie nie ma naturalnych zdań teorioliczbowych niezależnych od ZFC; można jednak formułować (oczywiście nieformalne) argumenty rozstrzygające tego typu zdania. Jest to pewna forma „empirycznej” zupełności. Jeśli podobnie będzie w przypadku teorii opisującej strukturę $(H(\omega_2),\in)$, tj. jeśli uda się znaleźć rozsądny aksjomat, który tę teorię porządkuje, będzie to podobny „empiryczny” argument na rzecz prawdziwości zdań, które wynikają z ZFC w Ω-logice.[20] Zdaniem Woodina wszystkie te rozważania przemawiają za tym, iż struktura $(H(\omega_2),\in)$ jest właściwym uogólnieniem struktury $(H(\omega_1),\in)$, jest bowiem najprostszą strukturą, w której widoczny jest wpływ pewnika wyboru. Woodin stwierdza więc:

> These considerations support the claim, that the structure $(H(\omega_2),\in)$ is indeed the NEXT structure to consider after $(H(\omega_1),\in)$, being the simplest structure where the influence of the Axiom of Choice is manifest [Woodin 2001, 686].

Można więc powiedzieć, że na tym etapie rozważań celem staje się znalezienie jakiegoś aksjomatu, który będzie stanowił odpowiednik aksjomatu PD. Woodin formułuje taki aksjomat (*); ma on bardzo techniczny charakter i nie ma sensu przytaczanie go tutaj. Okazuje się, że aksjomat (*) faktycznie ustala w Ω-logice pełną teorię struktury $(H(\omega_2),\in)$. Zachodzi bowiem:

TWIERDZENIE: Przypuśćmy, że istnieje klasa właściwa liczb kardynalnych Woodina. Wówczas dla dowolnego zdania φ zachodzi jedna z możliwości:

$$\mathrm{ZFC}+(*) \vdash_\Omega \text{„}(H(\omega_2),\in) \models \varphi\text{”}$$
lub
$$\mathrm{ZFC}+(*) \vdash_\Omega \text{„}(H(\omega_2),\in) \models \neg\varphi\text{”}.$$

Aksjomat (*) spełnia więc rolę owego zdania Ψ, o którego poszukiwaniu była mowa wcześniej.

Dalsze rozważania Woodina mają kulminację w formie następującego twierdzenia:

GŁÓWNY WYNIK: Przypuśćmy, że istnieje klasa właściwa liczb Woodina $V_\kappa \models \Psi$ (tj. zdanie Ψ jest prawdziwe w pewnym V_κ) oraz dla dowolnego zdania φ zachodzi:

$$\mathrm{ZFC}+\Psi \vdash_\Omega \text{„}(H(\omega_2),\in) \models \varphi\text{”}$$
lub
$$\mathrm{ZFC}+\Psi \vdash_\Omega \text{„}(H(\omega_2),\in) \models \neg\varphi\text{”}$$

---

[20] Można też powiedzieć, że niezależne zdanie teorioliczbowe trzeba w sztuczny sposób wygenerować, argumentacja zaś przebiega tak: skoro Ω-logika dowodzi zdania α, to nawet jeśli ono jest *de facto* niezależne, to w NATURALNYCH strukturach ono jest prawdziwe. Żeby zaś zdefiniować strukturę, w której to zdanie jest fałszywe, trzeba się „nagimnastykować” — tym samym można twierdzić, że Ω-logika niejako „chwyta” naturalne konsekwencje ZFC. Oczywiście, istota tej argumentacji zasadza się na stwierdzeniu, że pewne struktury są naturalne, a inne sztuczne, i że pojęcie wynikania w ramach Ω-logiki dobrze „chwyta” nasze intuicje.

wówczas CH jest fałszywa. (Przy czym owo zdanie Ψ nie musi być zdaniem dotyczącym samej struktury $(H(\omega_2),\in)$ — może dotyczyć czegokolwiek). Oznacza to w szczególności, że przyjęcie aksjomatu (*) pozwala na (negatywne) rozstrzygnięcie CH.

Swoje rozważania Woodin konkluduje w następujący sposób:

> So, is the Continuum Hypothesis solvable? Perhaps I am not completely confident the „solution" I have sketched is the solution, but it is for me convincing evidence that there IS a solution. Thus, I now believe the Continuum Hypothesis is solvable, which is a fundamental change in my view of set theory. While most would agree that a clear resolution of the Continuum Hypothesis would be a remarkable event, it seems relatively few believe that such a resolution will ever happen […] The universe of sets is a large place. We have just barely begun to understand it [Woodin 2001, 690].

3. UWAGI FILOZOFICZNE

Argumentacja przedstawiona przez Woodina ma charakter bardzo techniczny, dla nas ciekawsze są jej filozoficzne aspekty. Pojawiają się naturalne pytania dotyczące statusu takich rozważań i ich oceny z punktu widzenia praktyki matematycznej. Ma to w szczególności związek z pytaniem o to, jaka jest zależność między teorią mnogości a „codzienną" matematyką. Czy pojęcia *stricte* teoriomnogościowe można uznać za pojęcia naturalne z punktu widzenia praktyki matematycznej? Można też postawić pytanie, czy CH jest faktycznie problemem dotyczącym liczb rzeczywistych? Pytanie takie może wydawać się absurdalne — wszak w oczywisty sposób CH jest właśnie pytaniem o własności podzbiorów **R**. Chodzi tu jednak o problem, czy CH faktycznie dotyczy kontinuum w naszym naturalnym rozumieniu, czy też pewnego teoriomnogościowego artefaktu, który został niejako „nałożony" na nasze rozumienie tego, czym są liczby rzeczywiste. Czy zatem CH dotyczy intuicyjnie postrzeganych liczb rzeczywistych, czy też raczej pewnej teoriomnogościowej konstrukcji, która jest oczywiście z owymi liczbami powiązana, ale wnosi też pewne nowe pojęcia, które nie mają naturalnego odpowiednika w pozostałej części matematyki? Dyskusja argumentacji Woodina pozwala w naturalny sposób postawić takie zagadnienie, bo przecież można postawić tezę, że nasze rozumienie tego, czym jest kontinuum liczb rzeczywistych (postrzegane jako pewnego typu obiekt geometryczny) w gruncie rzeczy ma niewiele wspólnego z faktem, czy w jakiejś abstrakcyjnej Ω-logice daje się sformułować aksjomat, który w pewnym bardzo złożonym sensie rozstrzyga pytania dotyczące struktury $(H(\omega_2),\in)$. Oczywiście, w matematyce jest zjawiskiem codziennym to, iż w miarę postępu w pewnej dyscyplinie matematycznej pojawiają się coraz bardziej złożone pojęcia, a same intuicje badaczy rozwijają się. Pojawia się jednak pytanie, jakiego typu zdania można uznać za NATURALNE aksjomaty, jakiego typu kryteria oceny winny być tutaj stosowane? Np. Friedman w pracy [Friedman 2000] rozważa problem zasadności poszukiwania nowych aksjomatów dla matematyki i w szczególności analizuje relację między teorią mnogości a zwykłą (pozostałą) matematyką. Friedman twierdzi, że z punktu widzenia zwykłego matematyka, teoria mnogości stanowi jedynie swoiste narzędzie interpretacji dla matematyki (narzędzie umożliwiające podanie jednolitej, precyzyjnej, spójnej formalizacji) — i tylko jako taka jest oceniana przez matematyka.[21] Dla matematyka teoria mnogości nie jest bynajmniej ciekawa sama w sobie; można wręcz powiedzieć, że z punktu widzenia matematyki jest konstrukcją sztuczną.[22]

Pojawia się tutaj subtelny problem: niektóre pojęcia teoriomnogościowe mają charakter intuicyjny (jak np. pojęcie sumy zbioru), niektóre zaś aksjomaty teoriomnogościowe mają charakter aksjomatów bardzo naturalnych (mówi się o naiwnej teorii mnogości, nie w sensie wartościującym, ale jako o nauce o zbiorach w intuicyjnym sensie tego słowa). Jednak badania w zakresie teorii mnogości mają charakter bardzo wyrafinowany i w niewielkim stopniu przypominają pierwsze próby Cantora uchwycenia pojęcia zbioru. Bardzo duża część badań w zakresie teorii mnogości dotyczy zjawisk o charakterze czysto metamatematycznym (budowa modeli o różnych własnościach, własności między różnymi modelami dla teorii mnogości, zagadnienia relatywnej niesprzeczności, *etc*.). Zauważmy, że właśnie wyniki Woodina dotyczą nie tyle samych zbiorów rozumianych naiwnie, ile raczej metamatematycznych własności pewnych fragmentów teorii mnogości. Jest to sytuacja odmienna niż w przypadku innych działów matematyki — trudno byłoby podać naturalny przykład zdania dotyczącego przestrzeni Banacha, które wyrażałoby np. rozstrzygalność pewnych zdań dotyczących przestrzeni Banacha w określonych teoriach. Sytuacja teorii mnogości jest szczególna, bo sama jest zarówno przedmiotem, jak i narzędziem badania.[23]

Trudno mówić tutaj o intuicyjności czy oczywistości w takim sensie, w jakim oczywisty jest aksjomat pary czy sumy (czy nawet pewnik wyboru). Aksjomaty badane przez Woodina są bowiem technicznie bardzo złożone i nawet samo ich sformułowanie wymaga użycia zaawansowanych pojęć technicznych. Kryteria oceny takich aksjomatów nie mogą więc opierać się na intuicjach ogółu matematyków — ci bowiem po prostu tych aksjomatów nie będą w stanie bez wcześniejszych żmudnych studiów zrozumieć. Sytuacja aksjomatów Woodina zasadniczo różni się od np. sytu-

---

[21] Tu można byłoby dodać, że matematyk na ogół nie jest specjalnie zainteresowany problemem rekonstrukcji jego dziedziny (np. geometrii różniczkowej albo teorii prawdopodobieństwa) w teorii mnogości czy innej teorii formalnej. Może nawet w ogóle nie wiedzieć, jak to się odbywa, nie uważa tego zagadnienia za ważne i nie przeszkadza mu to w pracy!

[22] Simpson w kontekście badań dotyczących tzw. matematyki odwrotnej podaje roboczą charakterystykę zwykłej matematyki. Pisze on: „przez zwykłą matematykę rozumiemy będącą w głównym nurcie badań matematycznych matematykę nie-teoriomnogościową, tj. matematykę, z jaką mieliśmy do czynienia, zanim zabrali się za nią specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości. (Lub raczej: matematykę taką, jaką byłaby, gdyby nie zabrali się do niej specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości.)" [Simpson 1984, 783].

[23] Niektórzy badacze twierdzą w związku z tym, że teoria mnogości ma charakter poniekąd „introwertyczny", por. np. [Jensen 1995].

acji pewnika wyboru czy innych standardowych aksjomatów teorii mnogości.[24] Należy tu też zauważyć, że argumentacja Woodina „działa" przy założeniu, że istnieją odpowiednie duże liczby kardynalne. Tego problemu tutaj nie podejmujemy, ale Woodin w oczywisty sposób zakłada, że aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych stanowią naturalne rozszerzenie ZFC.[25] Same w sobie (zgodnie z klasycznymi wynikami) owe aksjomaty nie rozstrzygają CH, jednak to w obecności tych aksjomatów Woodin formułuje zdanie, które rozstrzyga (negatywnie) CH.

Poszukiwania Woodina można uznać za współczesną, bardzo techniczną „implementację" programu Gödla, który postulował poszukiwanie nowych aksjomatów, które mogą rozstrzygnąć otwarte problemy teorii mnogości.[26] Gödel wielokrotnie podkreślał, iż żaden system formalny nie jest w stanie ująć w adekwatny sposób wszystkich przekonań matematycznych i odróżniał matematykę obiektywną od subiektywnej. Jako platonik był przekonany, że systemy formalne jedynie częściowo opisują obiektywną matematyczną rzeczywistość, zadaniem zaś matematyka jest poszukiwanie aksjomatów, które pozwolą na rozstrzyganie otwartych problemów matematycznych. Na przykład w [*Gödel 193?] pisze o tym, że optymistyczne przekonanie Hilberta pozostaje nienaruszone (mimo twierdzeń o niezupełności), bo zdania niezależne zawsze mogą zostać rozstrzygnięte „poprzez oczywiste wnioskowania które nie są wyrażalne w danym formalizmie" [*Gödel 193?, 164]. O ile jednak tego typu wzmacnianie założeń wydaje się naturalne w przypadku arytmetyki (rzeczywiście zdanie Con(PA) intuicyjnie postrzegamy jako prawdziwe i jest ono faktycznie dowodliwe w odpowiednio wzmocnionej wersji arytmetyki), o tyle trudno jest o tego typu intuicje w przypadku zdań niezależnych od ZFC. Przykładem takiego zdania jest chociażby CH: nie jest znany ewidentny i wiarygodny aksjomat, który pozwoliłby na rozstrzygnięcie CH.

Gödel wiązał duże nadzieje z badaniami dotyczącymi dużych liczb kardynalnych. W Princeton w 1946 wyraził opinię, iż w wypadku teorii mnogości, takie kolejne wzmocnienia można będzie uzyskać dzięki wprowadzaniu coraz silniejszych aksjomatów nieskończoności (*stronger and stronger axioms of infinity*).

> It is certainly impossible to give a combinatorial and decidable characterization of what an axiom of infinity is; but there might exist, e.g., a characterization of the following sort: An axiom of infinity is a proposition which has a certain (decidable) formal structure and which in addition is true [Gödel 1946, 151].

[24] W pracy [Steel 2000] podejmuje ogólny problem poszukiwania uzasadnień dla nowych aksjomatów teorii mnogości i przy okazji dyskutuje status aksjomatu konstruowalności. Steel twierdzi, że aby można było w ogóle mówić o AKSJOMACIE, musi stanowić on fragment „najogólniejszego punktu widzenia" (*the broadest point of view*), a więc musi stanowić założenie akceptowane przez wszystkich, a nie tylko przez specjalistów w wąskiej dyscyplinie wiedzy.

[25] Na temat owej naturalności aksjomatów dużych liczb kardynalnych por. np. [Kanamori, Magidor 1978].

[26] O programie Gödla por. np. [Feferman 1996], [Wójtowicz 2001].

Co więcej, wyraził przypuszczenie, że może obowiązywać pewna forma twierdzenia o zupełności, która mówi, że

> some completeness theorem would hold which would say that every proposition expressible in set theory is decidable from the present axioms plus some true assertion about the largeness of the universe of all sets [Gödel 1946, 151].

Można więc powiedzieć, że Gödel był tu dużym optymistą — i że w tej wypowiedzi nadaje optymizmowi Hilberta bardziej uchwytny sens. Natomiast owymi nowymi aksjomatami, które pozwolą na ustalenie prawdy o uniwersum, mogłyby być właśnie aksjomaty dużych liczb kardynalnych. Gödel przez pewien czas sądził zresztą, iż aksjomaty dużych liczb pozwolą na rozstrzygnięcie hipotezy kontinuum. Później okazało się jednak, że aksjomaty te nie dostarczają w gruncie rzeczy żadnych istotnych informacji na temat problemu kontinuum. Trudno powiedzieć, czy sam Gödel uznałby analizy Woodina za fundamentalne czy raczej za czysto techniczne… Jednak Woodin stwierdza (por. wcześniejszy cytat), iż w świetle swoich badań dochodzi do przekonania, że problem kontinuum JEST problemem rozstrzygalnym, oczywiście nie w sensie dowodliwości w ZFC, ale w sensie możliwości znalezienia naturalnych, wiarygodnych aksjomatów pozwalających na jego rozstrzygnięcie.

Hipoteza kontinuum stanowi niejako paradygmatyczny przykład zdania niezależnego. Z punktu widzenia dyskusji dotyczącej niezależności jako pewnego ważnego zjawiska w matematyce jej rola jest fundamentalna. Prezentacja dyskusji dotycząca hipotezy kontinuum, jej zasadności czy wiarygodności stanowi bardzo dobry „poligon doświadczalny” do wprowadzenia w temat. Stykają się tu bowiem zarówno wątki ściśle techniczne, dotyczące matematycznego i metamatematycznego statusu CH, wątki ontologiczne, dotyczące dyskusji realizm–antyrealizm, czy wreszcie wątki metodologiczne, dotyczące problemu relacji między teorią mnogości a pozostałą częścią matematyki. Wszystkie te problemy ukazują się w wyraźny sposób w kontekście programu Woodina.

BIBLIOGRAFIA

Easton W.B.

[1970] „Powers of regular cardinals”, *Annals of Mathematical Logic*, 1, 139-178.

Feferman S.

[1996] „Gödel’s program for new axioms: Why, where, how and what?”, w: Hajek P. (red.), *Gödel ‘96*, Springer-Verlag, 3-22.

Freiling C.

[1986] „Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line”, *Journal of Symbolic Logic*, 51, 190-200.

Friedman H.

[2000] „Normal mathematics will need new axioms”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 6, 434-446.

Gale D., Stewart F.,

[1953] Infinite games with perfect information, *Contributions to the Theory of Games* (Harold W. Kuhn and Alan W. Tucker, red.), Ann. of Math. Stud., vol. 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953, pp. 245-266.

Gödel K.

[*193?] „[Undecidable diophantine propositions]", w: *Collected Works*, vol. 3, Feferman S. i. in. (red.), Oxford University Press, 1995, 164-175.

[1946] „Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics", w: *Collected Works*, vol. 2, Feferman S. i in. (red.), Oxford University Press, 1990, 150-153.

Jensen R.

[1995] „Inner models and large cardinals", *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, 393-407.

Kanamori K., Magidor M.

[1978] „The evolution of large cardinal axioms in set theory", w: *Higher set theory*, G.H. Müller and D.S. Scott (red.), Lecture Notes in Mathematics 669, Springer-Verlag, Berlin, 99-275.

Levy A., Solovay R.M.

[1967] „Measurable cardinals and the continuum hypothesis", *Israel Journal of Mathematics*, 5, 234-248.

Martin D.

[1975] Borel determinacy, *Ann. Of Math.* 102 (1975), 363-371.

Simpson, S.

[1984] „Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?", *Journal of Symbolic Logic*, 49, 783-802.

Woodin H.

[1999] *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal*, Berlin, New York: de Gruyter.

[2001] „The continuum hypothesis", Part I, II, *Notices of the AMS*, 48 (6,7), 567-576, 681-690.

Wójtowicz K.

[2001] „O tzw. programie Gödla", *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, XXVIII-XXIX, 100-117.

[2004] „O pewnym argumencie przeciwko hipotezie *continuum*", w: *Wokół filozofii logicznej. W darze Jerzemu Perzanowskiemu*. Malinowski J., Pietruszczak A. (red.), Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 259-278.

[2005] „A case against the continuum hypothesis?", w: *Logic, methodology and philosophy of science at Warsaw University*, Brożek A., Jadacki J.J., Strawiński W. (red.), Wydawnictwo Naukowe *Semper*, Warszawa, 193-199.