Jarosław Strzelecki

Prawdokrzew (Truth Tree) – logika dla humanistów = Truth Tree – Logic for Humanists

Humanistyka i Przyrodoznawstwo 17, 83-106

2011

HUMANISTYKA I PRZYRODOZNAWSTWO 17 Olsztyn 2011

Jarosław Strzelecki

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
w Olsztynie

University of Warmia and Mazury
in Olsztyn

PRAWDOKRZEW (TRUTH TREE) – LOGIKA DLA HUMANISTÓW

Truth Tree – Logic for Humanists

Słowa kluczowe: logika, metoda, klasyczny rachunek zdań, dowód, humanistyka, myślenie, obraz.

Key words: logic, method, formal sentential logic, proof, humanities, thinking, image.

Streszczenie

W artykule przedstawiam i wyjaśniam graficzną metodę przeprowadzania logicznych dowodów – prawdokrzew. Swoją prezentację ograniczyłem do klasycznego rachunku zdań. Artykuł jest również propozycją polskiego tłumaczenia pojęć występujących w tej metodzie. Tak dobrałem polską terminologię, aby przez wywoływanie emocjonalnych obrazów omawiana metoda stała się bardziej zrozumiała i łatwiejsza do zapamiętania.

Abstract

In this article I present and explain a graphical method of logical proof – truth tree. I limited my presentation to the formal sentential logic. The article is also a proposal of Polish translation of concepts used in this method. I selected a Polish terminology so that, by invoking the emotional images, the method will become more understandable and easier to remember.

Celem artykułu jest przedstawienie i wyjaśnienie działania metody, którą nazywa się *truth tree*, czyli prawdokrzewem[1]. Stosuje się ją w rozmaitych zadaniach logicznych. My użyjemy jej wyłącznie w klasycznym rachunku zdań (KRZ). Posłuży nam ona do badania, czy dana formuła KRZ jest tautologią, kontrtautologią, wyrażeniem kontyngentnym, jak również do sprawdzenia, czy między przesłanką (*resp.* przesłankami) a wnioskiem zachodzi relacja wynikania logicznego.

[1] Artykuł ten jest również propozycją polskiej terminologii dla metody *truth tree*. Polskie odpowiedniki wyrażeń angielskich zostały dobrane tak, aby były przystępne dla humanistów.

Prawdokrzew polega na rozrysowywaniu swoistych gałęzi wyrastających z korzenia oraz odczytywaniu z tak powstałego diagramu odpowiedzi na zadane pytanie badawcze. Jest to metoda graficzna, dlatego też – jak przypuszczamy – będzie ona dobrze służyła osobą myślącym bardziej całościowo niż analitycznie, a takimi są humaniści, którzy starają się uchwycić całość badanego zjawiska, a nie tylko pojedyncze jego elementy.

Tekst składa się z dwóch głównych części. W pierwszej zawarte zostały informacje o tym, jak budować i interpretować prawdokrzew. W drugiej przedstawione zostały sposoby użycia prawdokrzewu w określonych sytuacjach badawczych.

1. Budowa i interpretacja prawdokrzewu

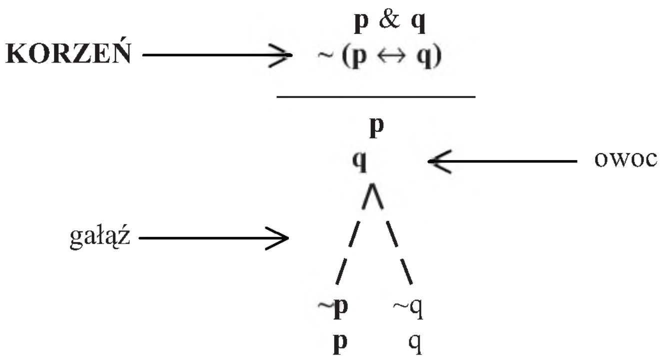
Prawdokrzew jest metodą graficzną[2]. Ogólnie rzecz ujmując, polega ona na takim rozkładaniu złożonych formuł KRZ, iż w efekcie naszych działań powstaje rysunek przypominający krzew z różnymi gałęziami, na których rosną owoce.

Strukturę prawdokrzewu dzielimy na dwie podstawowe części: korzeń i resztę. W skład reszty wchodzą gałęzie i owoce. „Logiczny" krzew ma więc podobną budowę do prawdziwego krzewu (korzeń, gałęzie, owoce). Różnicę stanowi fakt, że w naszym „logicznym" krzewie korzeń znajduje się na górze, a w prawdziwych krzewach korzeń „z reguły" bywa na dole.

Oto przykładowy prawdokrzew dwóch formuł KRZ $p \ \& \ q$ oraz $\sim(p \leftrightarrow q)$ wraz z nazwami poszczególnych jego części[3]:

[2] W polskiej literaturze można znaleźć opracowania poświęcone metodzie tablic semantycznych (R. Dutkiewicz, *Z badań nad metodą tablic semantycznych*, Wyd. KUL, Lublin 1988; M. Porębska, W. Suchoń, *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*, PWN, Warszawa 1991; K. Trzęsicki, *Logika i teoria mnogości*, Białystok 2001). Twórcą tablic semantycznych był Evert Beth (E.W. Beth, *Semantic Entailment and Formal Derivability*, Amsterdam 1955). Jego pomysły były rozwijane i modyfikowane. *Truth tree* jest metodą powstałą na bazie tablic semantycznych, lecz nie utożsamia się z nimi. Klasyczne przedstawienie metody *truth tree* odnaleźć można w książce Raymonda Smullyana *First Order Logic* z 1968 r., zaś krótkie uzasadnienie samej metody w G. Restall, *Logic.An Introduction*, Taylor&Francis e-Library, Routledge 2006, s. 51–55.

[3] Zauważmy, że z korzenia wyrastają wszystkie gałęzie, więc korzeń stanowi integralną część każdej gałęzi.



Zawsze pamiętajmy, że „logiczny” krzew nazywamy prawdokrzewem, czyli że: **każde wyrażenie, które znajduje się na prawdokrzewie, czy to jako element korzenia, czy też jako owoc, uznajemy za prawdziwe.**

Stąd, gdy chcielibyśmy, aby zmienna *p* była fałszywa, umieszczamy na prawdokrzewie jej negację, ponieważ, jeżeli ~p=1, to p=0. Zauważmy również, że owoce razem z korzeniem czytane pionowo możemy traktować tak, jakby były połączone koniunkcją, a owoce znajdujące się w jednej linii poziomej tak, jakby były połączone alternatywą. Odczytajmy formuły z gałęzi wyróżnionej pogrubioną czcionką: ***(p & q) & ~(p ↔ q)& p & q & ~p & q***. Występują one jedne pod drugimi, więc połączyliśmy je koniunkcją. Teraz przyjrzyjmy się owocom występującym w ostatnim wersie licząc od korzenia, czyli patrzymy na owoce rosnące na dwóch różnych gałęziach: *p v q*. Gałęzie symbolizują istnienie pewnych możliwości, dlatego też owoce połączyliśmy alternatywą.

Wyjaśnijmy kilka ważnych pojęć. Terminem „korzeń” oznaczamy formułę lub zbiór formuł, które wypisujemy na początku naszej „hodowli” prawdokrzewu. Pochodzą one od formuły wyjściowej, czyli tej, którą mamy zamiar zbadać. Owocem jest każda formuła KRZ, która nie należy do korzenia, a znajduje się na jednej z gałęzi (owocem mogą być formuły złożone lub proste). Pisząc, że dana formuła jest prosta, będziemy mieli na myśli, że składa się ona z jednej zmiennej zdaniowej lub z negacji tej zmiennej (np. *p*, *q*, *r*, *~p*, *~q*, *~r*). Natomiast nazwą „formuła złożona” oznaczamy wszystkie te wyrażenia, które nie są proste, czyli składają się z więcej niż jednej zmiennej zdaniowej (*resp*. jej negacji) (np. *p v q*, *r & ~s*, *~p v s*, *[~(p & r) → s]*).

1.1. Reguły rozkładania formuł złożonych na prostsze

Na czym polega „logiczne hodowanie” owoców, czyli jak rozkładać formuły złożone na coraz prostsze? Tą hodowlą rządzą pewne zasady, które zostaną teraz przedstawione. Możemy je uporządkować za pomocą następującego grafu[4]:

reguły rozkładu[5]:

- tylko z owocami —
  - zanegowana implikacja [~(*x* → *y*) daje *x* i ~*y*]
  - zanegowana alternatywa [~(*x* v *y*) daje ~*x* i ~*y*]
  - koniunkcja [*x* & *y* daje *x* i *y*]
- z gałęziami —
  - po jednym owocu —
    - implikacja [*x* → *y* daje ~*x* lub *y*]
    - alternatywa [*x* v *y* daje *x* lub *y*]
    - zanegowana koniunkcja [~(*x* & *y*) daje ~*x* lub ~*y*]
  - po dwa owoce —
    - równoważność [*x* ↔ *y* daje *x* i *y* lub ~*x* i ~*y*]
    - zanegowana równoważność [~(*x* ↔ *y*) daje ~*x* i *y* lub *x* i ~*y*]

1.1.1. Reguły tylko z owocami

Teraz przejdziemy do omówienia tych reguł, które prowadzą do powstania wyłącznie owoców (koniunkcja, zanegowana alternatywa, zanegowana implikacja).

1.1.1.1. Reguła koniunkcji

Mamy następującą formułę *q & r*. Zakładamy, że jest ona prawdziwa. Co z tego wynika? Koniunkcja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba jej argumenty są prawdziwe. W naszym przypadku argumentami koniunkcji są wyrażenia *q* oraz *r*, zatem, zgodnie z założeniem, oba te wyrażenia muszą być prawdziwe (*q*=1, *r*=1). To wszystko, co właśnie zostało napisane, w prawdokrzewie wyglądałoby następująco:

q & r	(1 & 1)
q	1
r	1

[4] Podział reguł wzorowany na: M. Zagarelli, *Logic for Dummies*, Wiley Publishing, Indiana 2007, s. 127; dokładne uzasadnienie tych reguł w: C. Howson, *Logic with trees. An introduction to symbolic logic*, Taylor&Francis e-Library, Routledge 2007; bardzo krótkie i przystępne omówienie tych reguł w: H. Patrick, *Truh Tree Fundamentals*, [online] <www.wadsworth.com/philosophy_d/templates/student_resources/0534584829_hurley/trees/section1.htm>, dostęp: 3.04.2011.

[5] Domyślnie będziemy korzystali z prawa podwójnego przeczenia (~~p = p).

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie *x & y* za prawdziwe, to *x* i *y* również są prawdziwe. W miejscu *x* i *y* wolno nam podstawić dowolne formuły KRZ.

Przykład (p v s) & ~q – w miejsce x wstawiliśmy *(p v s)*,
w miejsce y wstawiliśmy negację *q*
po rozłożeniu otrzymaliśmy *(p v s)* i *~q*

(p v s) & ~q
p v s
~q

Omawiana reguła w wersji graficznej wygląda tak:

x & y
x
y

1.1.1.2. Reguła zanegowanej alternatywy

Zastanówmy się nad takim wyrażeniem: *~(p v s)*. Zakładamy, że jest ono prawdziwe. Zgodnie z tabelą definiującą negację, wiemy, że negacja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy jej argument jest fałszywy. W rozpatrywanym przypadku argumentem negacji jest formuła *p v s*. Powinna ona posiadać wartość 0. Zadajmy pytanie, kiedy alternatywa jest fałszywa? Otóż jest fałszywa tylko w jednym przypadku, kiedy oba argumenty są fałszywe, zatem *p* i *s* muszą być fałszywe, aby alternatywa była fałszywa. Naszą formułę rozkładamy na *~p* i *~s*, bo tylko kiedy *p* i *s* będą fałszywe, całe wyrażenie będzie prawdziwe.

~(p v s)	~(0 v 0)	=	1
~p	~0	=	1
~s	~0	=	1

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie *~(x v y)* za prawdziwe, to przyjmujemy, że *x* i *y* muszą być fałszywe, co symbolicznie zapisujemy, negując te wyrażenie (*~x* i *~y*). Oczywiście w miejscu *x* i *y* możemy wstawić dowolne formuły KRZ.

Przykłady:

~[(p → r) v ~q] – w miejsce *x* wstawiliśmy *(p → r)*,
w miejsce *y* wstawiliśmy negację *q*
po rozłożeniu uzyskaliśmy *~(p → s)* i *~(~q)*, co skracamy do *q*, ponieważ *~~q=q*.

~[(p → r) v ~q]	~[(0) v 0] = 1
~(p → s)	~(0) = 1
~q	~0 = 1

Tę regułę dekompozycji możemy przedstawić w postaci graficznej:

~(x v y)
~x
~y

1.1.1.3. Reguła zanegowanej implikacji

Dana jest następująca formuła *~[(p & q) → s]*. Jak należy poprawnie rozłożyć ją na prostsze elementy? Ponownie zakładamy, że nasza złożona formuła jest prawdziwa. Będzie prawdziwa tylko wtedy, gdy wartość nawiasu kwadratowego będzie równa 0. Głównym funktorem w nawiasie jest implikacja, a ona jest fałszywa tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy, czyli gdy *(p & q)*=1, a *s*=0. Symbolicznie zapisujemy: *p & q* i *~s*.

Naszą wyjściową formułę rozłożyliśmy na dwa prostsze schematy zdaniowe. Dekompozycja byłaby zakończona, gdybyśmy uzyskali wyłącznie pojedyncze zmienne zdaniowe lub ich negacje. Niestety koniunkcja *p & q* jest wyrażeniem złożonym. Na szczęście *~s* jest zanegowaną zmienną zdaniową, więc nie musimy już więcej jej rozkładać. Jak poradzić sobie z *p & q*? Wiemy, że koniunkcję rozkładamy na jej argumenty, zatem w następnym ruchu otrzymujemy *p* i *q*.

Wszystkie te działania możemy przedstawić w postaci graficznej jako prawdokrzew.

Przykład 1a (liczby oznaczające wersy oraz opisy zamieszczone w nawiasach nie są częścią integralną prawdokrzewu[6]):

1. ~[(p & q) → s]	= 1 (zanegowaną implikację rozkładamy na jej poprzednik i zanegowany następnik)
2. p &q	= 1 (to jest poprzednik implikacji)
3. ~s	= 1 (to jest zanegowany następnik implikacji)
4. p	= 1 (z wiersza 2 w oparciu o regułę rozkładu koniunkcji)
5. q	= 1 (z wiersza 2 w oparciu o regułę rozkładu koniunkcji)

[6] Niektórzy autorzy, gdy rozpisują prawdokrzew, numerują poszczególne wersy (por. P. Tomassi, *Logic*, Routledge, London – New York 1999).

Przykład 1b (prawdokrzew z przykładu 1a bez zbędnych wyjaśnień):

$$\mathbf{\sim[(p \,\&\, q) \rightarrow s]}$$
$$p \,\&\, q$$
$$\sim s$$
$$p$$
$$q$$

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie $\sim(x \rightarrow y)$ za prawdziwe, to przyjmujemy, że implikacja powinna być fałszywa, a taka będzie tylko wtedy, gdy x=1 i y=0, co symbolicznie zapisujemy x i $\sim y$. Oczywiście w miejscu x i y możemy wstawić dowolne formuły KRZ.

$$\mathbf{\sim(x \rightarrow y)}$$
$$\mathbf{x}$$
$$\mathbf{\sim y}$$

1.1.2. Reguły gałęzi z pojedynczymi owocami

Przypadki, z którymi stykaliśmy się do tej pory, prowadziły do powstania tylko jednej gałęzi prawdokrzewu. Składała się ona wyłącznie z owoców. Teraz będziemy poznawać takie zasady, które prowadzą do wyrośnięcia dwóch gałęzi. Na każdej z nich znajduje się tylko jeden owoc.

1.1.2.1. Reguła zanegowanej koniunkcji

Przyjrzyjmy się następującej formule $\sim(r \,\&\, s)$. Zakładamy, że jest ona prawdziwa. Negacja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy jej argument jest fałszywy, czyli że $\sim(r \,\&\, s)$=1 tylko, gdy $r \,\&\, s$=0. Aby koniunkcja była fałszywa wystarczy, że jeden z jej argumentów będzie fałszywy (r=0 lub s=0). Pojawiają się więc dwie możliwości i dlatego uzyskujemy dwie gałęzie. Jedna z nich będzie kończyła się fałszywym r, a druga fałszywym s, co symbolicznie zapisujemy $\sim r$ lub $\sim s$.

$$\mathbf{\sim(r \,\&\, s)}$$
$$\sim r \qquad\qquad \sim s$$

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie $\sim(x \,\&\, y)$ za prawdziwe, to przyjmujemy, że koniunkcja powinna być fałszywa. Pojawiają się dwie możliwości: x=0 lub y=0, co symbolicznie zapisujemy $\sim x$ i $\sim y$. Oczywiście w miejscu x i y możemy wstawić dowolne formuły KRZ. W formie graficznej omawiana reguła wygląda następująco:

$$\mathbf{\sim(x \,\&\, y)}$$
$$\sim x \qquad\qquad \sim y$$

1.1.2.2. Reguła alternatywy

Dana jest następująca formuła *(p → s) v ~q*. Zakładamy, że jest prawdziwa. Aby alternatywa była prawdziwa, wystarczy, by jeden z jej argumentów był prawdziwy, czyli *(p → s)*=1 lub *~q*=1. Znowu pojawiają się dwie możliwości i dlatego w naszym krzewie wyrosną dwie gałęzie:

(p → s) v ~q

p → s   ~q

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie *x v y* za prawdziwe, to przyjmujemy, że któryś z argumentów alternatywy jest prawdziwy, ponieważ alternatywa jest prawdziwa wtedy, gdy przynajmniej jeden z jej argumentów jest prawdziwy. Dlatego też pojawiają się dwie możliwości: *x*=1 lub *y*=1, co symbolicznie zapisujemy *x* lub *y*. Oczywiście w miejscu *x* i *y* możemy wstawić dowolne formuły KRZ. W formie graficznej omawiana reguła wygląda następująco:

x v y

x   y

1.1.2.3. Reguła implikacji

Mamy daną formułę *(s & q) → p*. Tak jak w poprzednich przypadkach, zakładamy, że wyrażenie to jest prawdziwe. Głównym funktorem jest implikacja, która uzyskuje wartość 0 tylko wtedy, gdy: poprzednik ma wartość logiczną 1, a następnika 0 (1 → 0 = 0). Nasza implikacja będzie więc na pewno prawdziwa, gdy jej poprzednik będzie fałszywy lub gdy jej następnik będzie prawdziwy. Jest tak, ponieważ, gdy poprzednik ma wartość 0, to wartość następnika może być prawdziwa lub fałszywa, a i tak całe wyrażenie będzie prawdziwe (**0** → 0=1, **0** → 1=1). Jest tak też dlatego, że gdy następnik będzie prawdziwy, to wartość poprzednika nie ma wpływu na wartość całego wyrażenia. Gdy następnik ma wartość 1, to poprzednik może mieć wartość 1 lub 0 i tak całe wyrażenie będzie prawdziwe (1 → **1**=1, 0 → **1**=1).

W rozpatrywanej przez nas formule pojawiają się więc dwie możliwości. Jej poprzednik będzie fałszywy lub następnik prawdziwy, czyli że *(s & p)*=0 lub *p*=1. Formułę *(s & q) → p* rozkładamy, uwzględniając dwie możliwości: (i) zanegowany poprzednik, (ii) przepisany następnik. W ten sposób uzyskujemy *~(s & q)* lub *p*, co graficznie zapisujemy:

(s & q) → p

~(s & q)   p

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie *x* → *y* za prawdziwe, to przyjmujemy, że poprzednik jest fałszywy lub następnik jest prawdziwy. Powstają dwie możliwości: *x*=0 lub *y*=1, co symbolicznie zapisujemy ~*x* lub *y*. Oczywiście w miejscu *x* i *y* możemy wstawić dowolne formuły KRZ.

Przykłady: ~r → s – w miejsce *x* wstawiliśmy wyrażenie ~*r*, w miejsce *y* wstawiliśmy *s*, po rozłożeniu uzyskujemy *~(~r)*, które możemy skrócić do *r*, lub *s*.

~r → s

~(~r)   s

Przedstawiana reguła w postaci graficznej wygląda następująco:

x → y

~x   y

1.1.3. Reguły gałęzi z podwójnymi owocami

Pozostały nam jeszcze dwie reguły związane z równoważnością. Przypomnijmy, że równoważność jest prawdziwa wtedy, gdy oba jej argumenty mają tę samą wartość logiczną. Dlatego też podwójne gałęzie, jakie powstaną, będą posiadały dwa owoce w postaci dwóch zmiennych zdaniowych na każdej gałęzi. Zaraz wszystko się wyjaśni.

1.1.3.1. Reguła równoważności

Oto dana jest formuła *(~p & ~q)* ↔ *~(p v q)*. Zakładamy, że nasze wyrażenie jest prawdziwe. Będzie takie tylko wtedy, gdy oba argumenty będą prawdziwe albo oba fałszywe. Pojawiają się dwie możliwości: (i) *(~p & ~q)*=0 i *~(p v q)*=0; (ii) *(~p & ~q)*=1 i *~(p v q)*=1. Wyrażenia, które uznaliśmy za fałszywe, negujemy, czyli że tylko w przypadku (i) przed nawiasami stawiamy znak negacji, a przypadek (ii) pozostawiamy bez zmian: (i) *~(~p & ~q)* i $\sim\sim(p \vee q)$; podwójną negację w ostatnim wyrazie likwidujemy i otrzymujemy: (i) $\sim(\sim p \,\&\, \sim q)$ i $(p \vee q)$; (ii) $(\sim p \,\&\, \sim q)$ i $\sim(p \vee q)$.

Przypomnijmy, że narysowany prawdokrzew charakteryzuje się tym, że wyrażenia, które występują jedne pod drugimi (pionowo), możemy traktować tak, jakby były połączone koniunkcją, a wyrażenia, które występują obok siebie (poziomo; w tym samym wierszu) tak, jakby były połączone alternatywą. Z tych właśnie powodów prawdokrzew rozpatrywanej formuły przybierze następującą postać:

$$\mathbf{(\sim p \,\&\, \sim q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)}$$

$(\sim p \,\&\, \sim q)$	$\sim(\sim p \,\&\, \sim q)$
$\sim(p \vee q)$	$(p \vee q)$

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie $x \leftrightarrow y$ za prawdziwe, to przyjmujemy, że x i y są prawdziwe lub x i y są fałszywe. Powstają więc dwie możliwości: x=1 i y=1 lub x=0 i y=0, co symbolicznie zapisujemy x i y lub $\sim x$ i $\sim y$. Oczywiście w miejscu x i y możemy wstawić dowolne formuły KRZ.

Przykłady: $(\sim s \,\&\, s) \leftrightarrow \sim r$ – w miejsce x wstawiliśmy $(\sim s \,\&\, s)$, w miejsce y wstawiliśmy $\sim r$, po rozłożeniu otrzymujemy $(\sim s \,\&\, s)$ i $\sim r$ lub $\sim(\sim s \,\&\, s)$ i $\sim(\sim r)$; wyrażenie $\sim(\sim r)$ skracamy do r.

$$\mathbf{(\sim s \,\&\, s) \leftrightarrow \sim r}$$

$(\sim s \,\&\, s)$	$\sim(\sim s \,\&\, s)$
$\sim r$	r

Reguła w postaci graficznej wygląda następująco:

$$\mathbf{x \leftrightarrow y}$$

x	**~x**
y	**~y**

1.2.3.2. Reguła zanegowanej równoważności

Jak rozłożyć wyrażenie, które jest negacją równoważności? Daną mamy dość prostą formułę ~(p ↔ q). Zakładamy, że jest ona prawdziwa. Negacja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy jej argument przyjmuje wartość zero. Argumentem jest równoważność, która staje się fałszywa wyłącznie wtedy, gdy jej argumenty mają różne wartości logiczne. Mamy więc dwie możliwości: albo p=0, a q=1, albo p=1, a q=0, co symbolicznie zapisujemy *~p* i *q* lub *p* i *~q*. Graficznie całość przedstawia się następująco:

~(p ↔ q)

~p	q
q	~q

Ogólnie rzecz biorąc, zawsze gdy uznajemy wyrażenie *~(x ↔ y)* za prawdziwe, to przyjmujemy, że *x* i *y* posiadają różne wartości logiczne. Powstają więc dwie możliwości: x=1 i y=0 lub x=0 i y=1, co symbolicznie zapisujemy *x* i *~y* lub *~x* i *y*. Oczywiście w miejscu *x* i *y* możemy wstawić dowolne formuły KRZ.

Przykłady: ~[(~s v q) ↔ ~r] – w miejsce x wstawiliśmy *(~s v q)*,
w miejsce y wstawiliśmy *~r*,
po rozłożeniu otrzymujemy
(~s v q) i *r* (bo ~~r=r)
lub *~(~s v q)* i *~r*

(~s & s) ↔ ~r

(~s & s)	~(~s & s)
r	~r

Nasza reguła w wersji graficznej wygląda następująco:

~(x ↔ y)

x	**~x**
~ y	**y**

1.2. Logiczna hodowla prawdokrzewu

W jaki sposób wyhodować swój własny prawdokrzew? Znajomość wyżej opisanych reguł nie wystarczy. Należy zapoznać się z kilkoma dodatkowymi pojęciami. Dzięki nim będziemy wiedzieli, kiedy zakończyliśmy hodowanie naszego logicznego krzewu oraz jak należy interpretować powstały prawdokrzew. Okaże się, że w interpretacji najważniejsze będzie, tak jak w przypadku prawdziwego krzewu, to, czy nasz krzew „żyje", czy też „usechł".

1.2.1. Pojęcia dodatkowe

Będziemy posługiwali się nazwą „**uschnięta gałąź**". Należy przez nią rozumieć gałąź, w której występują przynajmniej dwa wyrażenie sprzeczne (np. p – ~p; q – ~q); mówiąc nieco inaczej to gałąź, w której odnajdujemy przynajmniej dwa owoce proste, wyglądające tak samo, a różniące się jedynie tym, że jedno z nich będzie poprzedzone znakiem negacji; zagadnienie ujmując bardziej obrazowo, ze sprzecznością mamy do czynienia wówczas, gdy na tej samej gałęzi znajdują się dwa takie same proste owoce, tylko, że jeden z nich jest jedzony przez robaka (kształt znaku negacji „~" przypomina robaka). Terminem „**żywa gałąź**" będziemy oznaczali każdą gałąź, która nie jest uschnięta, czyli że nie występują na niej żadne wyrażenia sprzeczne. Gdy będziemy pisali, że dany **prawdokrzew uschnął**, to będziemy mieli na myśli taki krzew, którego wszystkie gałęzie są uschnięte. Natomiast krzew, którego przynajmniej jedna gałąź pozostała żywa, nazywamy **żywy prawdokrzewem**[7].

Wprowadzona terminologia – w zasadzie – odpowiada sytuacjom z prawdziwym krzewem. Gdy uschną w nim wszystkie gałęzie, to wiemy, że cały krzew jest już martwy. Lecz gdybyśmy zauważyli, że przynajmniej jedna z gałązek wypuszcza nowe, zielone liście, to będziemy wiedzieli, że mimo wielu uschniętych gałęzi, krzew ciągle żyje. Możemy więc kojarzyć sobie takie wyrażania jak „żywy", „kwitnący" z wartością logiczną prawdy, a słowa „martwy", „uschnięty" z logiczną wartością fałszu. Pamiętajmy też, że gałąź w logicznym krzewie symbolizuje istnienie pewnej możliwości.

[7] W tekstach anglojęzycznych występują pojęcia *closed branch* oraz *open branch*, czyli „gałąź zamknięta" i „gałąź otwarta" (por. H. Pospesel, *Introduction to Logic: Propositional Logic*, [online] <www.as.miami.edu/phi/one-sided-trees>, dostęp: 3.04.2011; w niniejszym tekście przyjąłem niedosłowne, za to bardziej obrazowe tłumaczenia – odpowiednio – „gałąź uschnięta" oraz „gałąź żywa".

1.2.2. Reguły hodowania prawdokrzewu

Tworzenie prawdokrzewu powinno składać się z trzech kolejno wykonywanych działań. Oto one:

1. Skonstruowanie korzenia – to jak będzie wyglądał korzeń, zależy od pytania badawczego, jakie, w stosunku do formuły wyjściowej, zadamy.

2. Rozkład formuł złożonych – posługując się poznanymi regułami, rozkładamy formuły złożone; hodujemy owoce i gałęzie. Ale **pamiętajmy, że owoce z danej formuły wyrosną na wszystkich gałęziach, które pochodzą z tej formuły**.

3. Hodowanie prawdokrzewu uznajemy za **zakończone** wtedy, gdy zachodzi przynajmniej jedna z dwu sytuacji:

(i) Wszystkie formuły złożone (zarówno te występujące w korzeniu, jak i te będące owocami) zostaną rozłożone na formuły proste.

(ii) Wszystkie gałęzie uschną (niezależnie od tego, czy wszystkie formuły złożone przekształciliśmy w proste); na uschniętym prawdokrzewie nic więcej nie wyrośnie.

1.2.3. Reguły interpretacji prawdokrzewu

Analizując prawdokrzew sprawdzamy, czy zachodzi jedna z poniższych sytuacji:

1. Przynajmniej jedna **gałąź** jest **żywa** – znaczy to, że istnieje przynajmniej jedno takie wartościowanie, które prowadzi do prawdziwości wszystkich formuł zawartych w korzeniu; mówiąc inaczej, istnieje przynajmniej jedno takie podstawienie wartości logicznych prawdy i fałszu (1,0) w miejscu zmiennych zdaniowych, które prowadzi do uzyskania przez wszystkie formuły występujące w korzeniu wartości 1.

2. Wszystkie **gałęzie uschły** – co równoznaczne jest z sytuacją, że nie ma takiego wartościowania, które prowadziłoby do prawdziwości wszystkich formuł występujących w korzeniu; nieco inaczej formułując tę myśl, powiedzielibyśmy, że niezależnie od tego, jakie wartości logiczne będziemy podstawiali w miejsce zmiennych zdaniowych i tak wszystkie formuły znajdujące się w korzeniu prawdokrzewu nigdy naraz nie uzyskają wartości 1. Korzeń jest lichy, więc wszystkie gałęzie uschły, a co za tym idzie, cały prawdokrzew możemy „wyrwać" i „wyrzucić" na śmietnik.

3. Analizę prawdokrzewu zaczynamy zawsze od jego końca i kierujemy się do korzenia.

Przykład:

Naszym zadaniem jest zbadanie, czy dwie formuły $p \rightarrow q$ oraz $\sim(q \ \& \ p)$ mogą być jednocześnie prawdziwe. Korzeń budujemy w ten sposób, że rozpatrywane wyrażenia piszemy jedne pod drugim:

p → q
~(q & p)

Taki zapis informuje nas, że uznajemy, iż istnieje taka możliwość, że dwie formuły korzenia mogą być naraz prawdziwe. Następnie rozkładamy je na formuły prostsze. W formule *p → q* głównym funktorem jest implikacja, a w *~(q & p)* negacja odnosząca się do koniunkcji. Reguła implikacji informuje, że należy zanegować poprzednik lub następnik pozostawić bez zmian. Nasz krzew rozrasta się:

p → q (1)
~(q & p)

~p q

Przy rozkładanej formule postawiliśmy znak *(1)*. W ten sposób zaznaczamy, że daną funkcję zdaniową już rozłożyliśmy. Liczba umieszczona w nawiasie informuje, w którym ruchu dana formuła została rozłożona. W naszym przykładzie formułę *p → q* rozłożyliśmy jako pierwszą, więc w nawiasie umieściliśmy liczbę jeden. Teraz rozkładamy drugą formułę naszego korzenia. Korzystamy z reguły, zgodnie z którą zanegowaną koniunkcję zastępujemy alternatywą zanegowanych argumentów. W naszym przypadku *~(q & p)* zamieniamy na *~q v ~p*:

p → q (1)
~(q & p) (2)

~p q

~q ~p ~q ~p
*

Teraz sprawdzimy, która z gałęzi uschła, a która pozostaje żywa. Pierwsza gałąź – patrząc od lewej strony (kierunek czytania od dołu krzewu do korzenia !!) – zawiera następujące wyrażenia:

~q, ~p, ***~(q & p), p → q***

Nie znajdujemy na niej żadnych wyrażeń sprzecznych, zatem gałąź ciągle kwitnie. Następna gałąź składa się z:

~p, ~p, ***~(q & p), p → q***

Tu też nie występują owoce, które byłby sprzeczne, więc gałąź pozostaje żywa. W skład kolejnej gałęzi wchodzą następujące wyrażenia:

~q, q, ***~(q & p), p → q***

Tym razem sytuacja przedstawia się inaczej. Pojawiają się dwa owoce sprzeczne *q* oraz *~q*. Gałąź usycha. Sytuację tą symbolicznie zaznaczamy stawiając znak * na końcu gałęzi. W ostatniej gałęzi nie występują wyrażenia sprzeczne, zatem pozostaje ona żywą gałęzią.

Jeżeli gałąź ciągle żyje, to znaczy, że istnieje takie podstawienie wartości logicznych, które prowadzi do prawdziwości formuł zawartych w korzeniu. Pierwsza gałąź od lewej jako proste owoce zawiera *~q, ~p,*. Gdy p=0 i q=0 (~p=1, więc p=0; ~q=1, więc q=0), formuły występujące w korzeniu uzyskają wartość 1. Sprawdźmy:

p → q – podstawiamy wartości logiczne – 0 → 0=1;

~(p & q) – podstawiamy wartości logiczne – ~(0 & 0)=~0=1.

Wszystko się zgadza. Naszym zadaniem było udzielenie odpowiedzi na pytanie, czy istnieje przynajmniej jedno takie wartościowanie, które prowadziłby to prawdziwości korzenia, czyli uzyskania przez wszystkie zawarte w nim formuły wartości 1. Odpowiedź brzmi, gdy p=0 i q=0, obie formuły korzenia uzyskają wartość 1.

Jeżeli gałąź usycha, tzn. że w rozpatrywanej możliwości nie występuje takie wartościowanie, które prowadziłoby do jednoczesnej prawdziwości wszystkich formuł zawartych w korzeniu. Gałąź, która uschła na naszym prawdokrzewie, jako owoce zawierała *q*, *~q*. Dwie formuły sprzeczne nie mogą być jednocześnie prawdziwe (q=1, ~q=0; q=0, ~q=1), zatem nie ma takiego wartościowania, które prowadziłoby do prawdziwości korzenia.

2. Zastosowania prawdokrzewu

Wszystkie wyrażenia KRZ można uporządkować, wyróżniając trzy kategorie: tautologia – „zawsze" prawdziwa, czyli przy dowolnym wartościowaniu uzyskuje 1; kontrtautologia – „zawsze" fałszywa, czyli przy dowolnym wartościowaniu uzyskuje 0; formuła kontyngentna – „czasami" prawdziwa, a „czasami" fałszywa, czyli przy niektórych wartościowaniach uzyskuje 1, a przy innych 0. Prawdokrzew pozwala jednoznacznie rozstrzygnąć, do której z wymienionych kategorii należy badana formuła.

2.1. Tautologia

Gdy chcemy przy użyciu prawdokrzewu sprawdzić, czy dana formuła KRZ jest tautologią, **jako korzeń piszemy zanegowaną formułę wyjściową**. Następnie przechodzimy do hodowania prawdokrzewu. Wprowadzenie negacji nie jest przypadkowe. Zauważmy, że jeżeli w prawdokrzewie, którego korzeń stanowi zanegowana formuła wyjściowa, wszystkie gałęzie uschną, będzie to znaczyło, że nie ma takiego wartościowania, które prowadziłoby do prawdziwości formuły występującej w korzeniu, czyli że nasza zanegowana formuła jest „zawsze" fałszywa. Negacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy jej argument ma wartość 1. Argumentem naszej negacji jest formuła, której tautologiczność sprawdzamy. Skoro formuła z negacją jest „zawsze" fałszywa, to jej argument musi być „zawsze" prawdziwy, czyli że musi być tautologią. Oczywiście, jeżeli przynajmniej jedna z gałęzi będzie kwitła, będzie to znak, że istnieje takie wartościowanie, które prowadzi do prawdziwości korzenia, a to z kolei będzie dowodem na nietautologiczność formuły wyjściowej.

Sformułujmy **reguły interpretacyjne**:

– uschnięty prawdokrzew – badana formuła jest tautologią

– żyjący prawdokrzew – badana formuła nie jest tautologią

Przykład:

1. Czy formuła *p v ~p* jest tautologią? Zgodnie z zaleceniem, korzeniem krzewu jest zanegowana formuła wyjściowa:

~(p v ~p)

Stosując regułę zanegowanej alternatywy, otrzymujemy *~p* i *~(~p)*. Podwójną negację skracamy do *p*:

~(p v ~p) (1)
~p
p
*

Powstała jedna gałąź składająca się z dwóch owoców i korzenia. Uzyskaliśmy dwa sprzeczne owoce (*~p* oraz *p*), dlatego gałąź uschła. Skoro nie ma takiego wartościowania dającego prawdziwy korzeń, to znaczy że formuła ~(p v ~p)=0 będzie „zawsze" fałszywa. Skoro ~(p v ~p)=0, to *p v ~p* będzie „zawsze" prawdziwe – badana formuła jest tautologią.

2. Czy formuła *[(p v s) & ~p] → s* jest tautologią? Powstanie jednoelementowy korzeń składający się z negacji, której argumentem będzie badana formuła:

~{ [(p v s) & ~p] → s }

Zgodnie z regułą zanegowanej implikacji, otrzymamy swoistą koniunkcję (jedno wyrażenie pod drugim) niezmienionego poprzednika i zanegowanego następnika:

~{ [(p v s) & ~p] → s } (1)
(p v s) & ~p
~s

Powstały dwa owoce. Jeden będący formułą prostą *~s*, drugi złożoną *[(p v s) & ~p]*, którą musimy rozbić, korzystając z reguły koniunkcji. Otrzymujemy:

~{ [(p v s) & ~p] → s } (1)
(p v s) & ~p (2)
~s
p v s
~p

Musimy rozbić owoc *p v s*. Korzystamy z reguły alternatywy:

~{ [(p v s) & ~p] → s } (1)
[(p v s) & ~p] (2)
~s
p v s (3)
~p

p   s
*   *

Hodowanie prawdokrzewu uznajemy za zakończone wtedy, gdy zachodzi jedna z dwóch sytuacji: rozłożono na proste wszystkie formuły złożone lub uschły wszystkie gałęzie. W naszym przykładzie zaistniały te dwie sytuacje naraz. Skoro korzeń „zawsze" będzie fałszywy, to argument formuły tworzącej korzeń musi być „zawsze" prawdziwy. Odpowiedź na postawione pytanie brzmi: badana formuła jest tautologią.

3. Czy następująca formuła *[(p → q) v (p → r)] → (q & r)* jest tautologią? Korzeń powstaje przez zanegowanie formuły wyjściowej:

~{ [(p → q) v (p → r)] → (q & r) }

Tworzymy gałęzie korzystając z reguły zanegowanej implikacji:

~{ [(p → q) v (p → r)] → (q & r) } (1)
(p → q) v (p → r)
~(q & r)

Teraz rozbijamy powstałe owoce. To, czy najpierw rozbijemy pierwszy od góry owoc, czy drugi, nie ma większego znaczenia, jeżeli chodzi o wartość przeprowadzanego dowodu. Jednak kolejność rozbijania wpływa na prostotę struktury prawdokrzewu. Poleca się, aby uprościć cały prawdokrzew, rozkładać formuły złożone według następujących reguł:

1. **Najpierw** rozbijamy te formuły, które prowadzą do powstania **tylko owoców** (koniunkcja, zanegowana alternatywa, zanegowana implikacja).

2. W **drugiej** kolejności rozbijamy te, które prowadzą do powstania dwóch gałęzi z dwoma owocami, czyli rozbijamy **równoważność** albo zanegowaną równoważność.

3. Dopiero jako **ostatnie** rozkładamy te, które prowadzą do powstania **dwóch gałęzi po jednym owocu** (alternatywa, implikacja, zanegowana koniunkcja).

Nasz prawdokrzew posiada dwa owoce (alternatywę i zanegowaną koniunkcję). Każdy z nich prowadzi do powstania dwóch gałęzi z pojedynczymi owocami, zatem nie ma większego znaczenia, od którego z nich zaczniemy. Wybieramy pierwszy owoc od góry, czyli alternatywę:

$$\mathbf{\sim\{\ [(p \rightarrow q)\ v\ (p \rightarrow r)] \rightarrow (q\ \&\ r)\ \}}\ (1)$$
$$(p \rightarrow q)\ v\ (p \rightarrow r)\ (2)$$
$$\sim(q\ \&\ r)$$
$$p \rightarrow q \qquad\qquad p \rightarrow r$$

Otrzymaliśmy dwie gałęzie po jednym owocu na każdej, bo wystarczy, aby $p \rightarrow q{=}1$ lub $p \rightarrow r{=}1$, aby wyjściowa alternatywa była prawdziwa.

Przejdźmy do wyhodowania następnych gałęzi i owoców. Implikacja „owocuje” dwoma gałęziami, tak samo jak zanegowana koniunkcja. Nie ma więc większego znaczenia, od której z tych formuł zaczniemy:

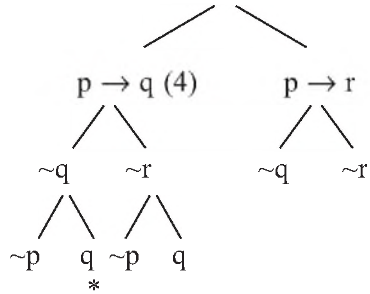
$$\mathbf{\sim\{\ [(p \rightarrow q)\ v\ (p \rightarrow r)] \rightarrow (q\ \&\ r)\ \}}\ (1)$$
$$(p \rightarrow q)\ v\ (p \rightarrow r)\ (2)$$
$$\sim(q\ \&\ r)\ (3)$$
$$p \rightarrow q \qquad\qquad p \rightarrow r$$
$$\sim q \quad \sim r \qquad\qquad \sim q \quad \sim r$$

Wybraliśmy zanegowaną koniunkcję. Podkreślmy, że formuła *~(q & r)* jest integralną częścią zarówno gałęzi lewej (owoc: *p → q*), jak i prawej (owoc: *p → r*). Dlatego też owoce powstałe przez jej rozłożenie „pączkują” na każdej gałęzi[8]. Owoce z danej formuły wyrosną na wszystkich i tylko tych gałęziach, które pochodzą z tej formuły.

Teraz przejdziemy do rozłożenia pozostałych implikacji. Zaczniemy od pierwszej z lewej:

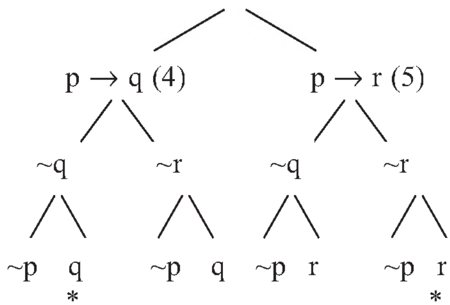
[8] Nie ma w tym nic zaskakującego. Proszę wyobrazić sobie źródło – odpowiednik naszej formuły *~(q & r)* – z którego wypływają dwie rzeki (formuły *p → q* oraz *p → r*). Jeżeli wlalibyśmy czerwoną farbę do źródła, to obydwie rzeki zabarwią się na czerwono; analogicznie, owoce „pączkującej” formuły *~(q & r)* wyrosną na wszystkich gałęziach, których formuła ta jest częścią.

~{ [(p → q) v (p → r)] → (q & r) } (1)
(p → q) v (p → r) (2)
~(q & r) (3)



Formuła $p \rightarrow q$ jest wyłącznie częścią gałęzi występujących pod nią, dlatego jej owoce nie „pączkowały" na gałęziach, które pochodzą od formuły $p \rightarrow r$. Rozbijmy ostatnią złożoną formułę, czyli $p \rightarrow r$:

~{ [(p → q) v (p → r)] → (q & r) } (1)
(p → q) v (p → r) (2)
~(q & r) (3)



Jak widać, powyższa formuła nie jest tautologią, ponieważ nie wszystkie gałęzie uschły. Przyglądnijmy się prostym owocom na trzeciej gałęzi, licząc od lewej strony. Są to – patrząc od dołu – $\sim p$, $\sim r$. Wnioskujemy z tego, że wystarczy, aby p=0 (bo $\sim p$=1) oraz r=0 (bo $\sim r$=1), a formuła występująca w korzeniu uzyska wartość 1. To znaczy, że jej argument (formuła badana) będzie fałszywy. Zauważmy, że nie musimy znać wartości logicznej zmiennej q. Sprawdźmy nasz wniosek:

~{ [(p → q) v (p → r)] → (q & r) }
~{[(0 → ?) v (0 → 0)] → (? & 0)}
~[(1 v 1) → 0]
~(1 → 0)
~0
1

Badana formuła nie jest tautologią.

2.2. Kontrtautologia

Gdy chcemy sprawdzić, czy dana **formuła** jest kontrtautologią, wystarczy **zapisać ją jako korzeń** i sprawdzić, czy wszystkie gałęzie uschną. Wszystkie uschnięte gałęzie informują, że cały prawdokrzew uschnął, czyli że nie ma takiego wartościowania, które dałoby wartość 1 dla formuł występujących w korzeniu. To znaczy, że badana formuła jest kontrtautologią.

Reguły interpretacyjne są następujące:

– uschnięty prawdokrzew – badana formuła jest kontrtautologią

– żyjący prawdokrzew – badana formuła nie jest kontrtautologią

Przykład 1:

Czy następująca formuła *q & ~q* jest kontrtautologią? Wyjściową formułę zapisujemy jako korzeń:

q & ~q

Pisząc w ten sposób, uznajemy, że koniunkcja ta jest prawdziwa, a zatem jej argumenty również muszą być prawdziwe:

q & ~q (1)
q
~q
*

W powstałej gałęzi pojawiły się dwa owoce prawie identyczne, różniące się jedynie znakiem negacji (jeden owoc zdrowy, a drugi jest „jedzony" przez „robaka", czyli negację). Gdy w jakieś gałęzi pojawi się sprzeczność, gałąź usycha. W naszym przykładzie była to tylko jedna gałąź, więc uznajemy, że cały krzew usechł. Wniosek jest taki, że nie istnieje takie wartościowanie, które prowadziłby do prawdziwości korzenia, zatem badana formuła jest „zawsze" fałszywa, a zatem jest ona kontrtautologią.

Przykład 2:

Naszym zadaniem jest zbadać, czy formuła *~(r v ~r) & ~(p & ~p) & (p → r)* jest kontrtautologią. Stwórzmy korzeń i rozbijmy najpierw koniunkcje, a następnie alternatywę:

~(r v ~r) & ~(p & ~p) & (p → r) (1)
~(r v ~r) (2)
~(p & ~p)
(p → r)
r
~r
*

Prawdokrzew okazał się być uschnięty, mimo że nie rozbiliśmy wszystkich formuł złożonych. Jednak uschła nam jedyna gałąź, jaka powstała. Wniosek jest taki, że nie istnieje takie podstawienie wartości logicznych, które prowadziłoby do uzyskania przez formułę występującą w korzeniu wartości 1, czyli że badana formuła jest kontrtautologią.

2.3. Formuły kontyngentne

Gdy badamy pewną formułę KRZ pod kątem jej tautologiczności i okazuje się, że nie jest ona tautologią, to jeszcze nie wiemy, czy zalicza się ona do kategorii kontrtautologii. Chcąc sprawdzić, czy jest kontrtautologią, powinniśmy rozrysować nowy prawdokrzew. Gdyby i tym razem przynajmniej jedna z gałęzi pozostała żywa, wówczas uzyskujemy absolutną pewność, że badana formuła nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią, czyli że jest wyrażeniem kontyngentnym.
Przykład:

Czy formuła *(p & ~q) v (p → r)* jest wyrażeniem kontyngentnym? Musimy narysować dwa prawdokrzewy. W jednym sprawdzimy tautologiczność tej formuły, a w drugim jej kontrtautologiczność. Gdy okaże się, że nie jest ona ani tautologią, ani kontrtautologią, to będziemy wiedzieli, że jest wyrażeniem kontyngentnym.

<u>Tautologiczność formuły</u> (korzeń stanowi zanegowana formuła wyjściowa):

$$\begin{array}{c} \mathbf{\sim[\ (p\ \&\ \sim q)\ v\ (p \rightarrow r)\ ]}\ (1) \\ \sim(p\ \&\ \sim q) \\ \sim(p \rightarrow r) \end{array}$$

Rozbijamy owoc-implikację, ponieważ prowadzi ona do powstania wyłącznie owoców:

$$\begin{array}{c} \mathbf{\sim[\ (p\ \&\ \sim q)\ v\ (p \rightarrow r)\ ]}\ (1) \\ \sim(p\ \&\ \sim q) \\ \sim(p \rightarrow r)\ (2) \\ p \\ \sim r \end{array}$$

Teraz rozbijamy owoc będący zanegowaną koniunkcją:

$$\begin{array}{c} \mathbf{\sim[\ (p\ \&\ \sim q)\ v\ (p \rightarrow r)\ ]}\ (1) \\ \sim(p\ \&\ \sim q)\ (3) \\ \sim(p \rightarrow r)\ (2) \\ p \\ \sim r \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sim p & \quad\quad q & \quad\quad (\sim\sim q = q)^{9} \\ * & & \end{array}$$

[9] Na mocy prawa podwójnego przeczenia *~(~q)=q*.

Jedna gałąź pozostała żywa, a zatem uznajemy, że korzeń również żyje. Badana formuła nie jest tautologią.

<u>Kontrtautologiczność formuły</u> (korzeń stanowi formuła wyjściowa; rozbiliśmy korzeń, a potem owoc-koniunkcję):

$$\mathbf{(p \ \& \sim q) \ v \ (p \to r)} \ (1)$$

```
        /        \
p & ~q (2)      p → r
  p
 ~q
```

Teraz rozbijemy owoc-implikację:

$$\mathbf{(p \ \& \sim q) \ v \ (p \to r)} \ (1)$$

```
        /          \
p & ~q (2)        p → r (3)
  p                /   \
 ~q              ~p     r
```

Pozostała przynajmniej jedna gałąź żywa (mówiąc dokładniej – żadna gałąź nie uschła). Formuła występująca w korzeniu, przy pewnym wartościowaniu, uzyska wartość logiczną 1. Prawdokrzew żyje, więc badana formuła nie jest kontrtautologią. Skoro nie jest ona ani tautologią, ani kontrtautologią, jest więc wyrażeniem kontyngentnym.

2.4. Wynikanie logiczne

Z wynikaniem logicznym mamy do czynienia wówczas, gdy struktura wnioskowania jest tautologią. Mówimy, że ze zdania *A* wynika logicznie zdanie *B* wtedy, gdy zdanie implikacyjne jest podstawieniem prawa logicznego (tautologii). Chcąc sprawdzić, czy z danych przesłanek wynika logicznie wniosek, należy zrekonstruować strukturę logiczną tego wnioskowania i zbadać, czy jest ona tautologią.

W przypadku prawdokrzewu, gdy posiadamy już strukturę logiczną wnioskowania, postępujemy w następujący sposób: konstruujemy **korzeń**, wypisując **wszystkie przesłanki** (mówiąc dokładniej – formy logiczne tych przesłanek) jedna pod drugą i **dołączamy** jeszcze **zanegowaną konkluzję** (formę logiczną konkluzji) naszego wnioskowania[10].

---

[10] Por. G. Restall, op. cit., s. 41–45.

Zatrzymajmy się chwilę nad tą regułą postępowania. Korzeń tworzymy, wypisując funkcje zdaniowe jedna pod drugą. Są one formą logiczną przesłanek i zanegowanego wniosku. Konstruując korzeń, domyślnie przypisujemy jego częściom wartość logiczną prawdy. Wyrażenia w korzeniu występują jedno pod drugim, więc traktujemy je tak, jakby były połączone koniunkcją, czyli nasz korzeń to koniunkcja przesłanek wraz z zanegowanym wnioskiem. Napisanie zanegowanego wniosku jest równoznaczne z domyślnym uznaniem, że wniosek jest fałszywy. Jeżeli w naszym prawdokrzewie wszystkie gałęzie uschną, będzie to znaczyło, że nie ma takiego wartościowania, w którym przesłanki byłby prawdziwe, a wniosek fałszywy. Natomiast jeżeli przynajmniej jedna z gałęzi będzie kwitła, to będzie znaczyć, że istnieje takie podstawienie wartości logicznych za zmienne zdaniowe, które prowadzi do prawdziwości przesłanek i fałszywości wniosku; wówczas między przesłankami a wnioskiem nie będzie zachodzić wynikanie logiczne.

Reguły interpretacyjne przedstawiają się następująco:
– uschnięty prawdokrzew – zachodzi wynikanie logiczne
– żywy prawdokrzew – wynikanie logiczne nie zachodzi

Przykład:

Czy ze zdania „Jeżeli Piotr kocha Ewę, to pojedzie z nią dookoła świata" oraz zdania „Piotr kocha Ewę" wynika logicznie wniosek „Piotr pojedzie z Ewą dookoła świata". Struktura wnioskowania wygląda tak[11]:

$$[(p \rightarrow q) \ \& \ p] \rightarrow q$$

Sprawdzenie:

Korzeń będą stanowiły przesłanki wraz z zanegowanym wnioskiem.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \sim q \end{array}$$

Zastosujemy tylko jedną regułę dekompozycji:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \ (1) \\ p \\ \sim q \\ / \quad \backslash \\ \sim p \qquad q \\ * \qquad * \end{array}$$

[11] *p* – „Piotr kocha Ewę"; *q* – „Pojedzie z nią dookoła świata"; struktura pierwszej przesłanki $p \rightarrow q$, a drugiej *p*.

Wyhodowaliśmy owoce sprzeczne na każdej gałęzi prawdokrzewu. Prawdokrzew jest uschnięty, więc między przesłankami a wnioskiem zachodzi stosunek wynikania logicznego.

3. Zakończenie

Przedstawiona metoda niewątpliwie wymaga większego nakładu pracy niż nauczenie się metody zero-jedynkowej. Jednakże ta ostatnia kształtuje, po nabraniu pewnej wprawy przez jej użytkownika, dość mechaniczny styl pracy; w zasadzie nie wymaga myślenia podczas dokonywania rachunków na zerach i jedynkach. Dodatkowo przy większej liczbie zmiennych zdaniowych rośnie bardzo szybko ilość koniecznych do przebadania przypadków (zgodnie ze wzorem 2^n, gdzie *n* jest liczbą różnokształtnych zmiennych zdaniowych; np. n=2 daje $2^2=4$, a przy n=4 mamy $2^4=16$ przypadków do przebadania[12]). W przypadku prawdokrzewu nie ma większego znaczenia, ile różnokształtnych zmiennych występuje w badanej formule. Równie dobrze sprawdza się przy dwóch, jak i przy dziesięciu różnokształtnych zmiennych zdaniowych. Prawdokrzew jest dużo bardziej efektywny w działaniu niż metoda zero-jedynkowa. Metoda budowania prawdokrzewu daje również całościowy wgląd we wszystkie związki logiczne, w jakie uwikłane są badane przez nas formuły. Dodatkowo, jak się wydaje, tworzenie prawdokrzewu angażuje więcej procesów myślowych, dzięki czemu wpadnięcie w pułapkę „mechanizacji" myślenia zdaje się być mało prawdopodobne. Nieco większy nakład pracy, jaki należy włożyć, aby zacząć płynnie posługiwać metodą graficzną, prowadzi do głębszego rozumienie klasycznego rachunku zdań, co w naukowej działalności humanistów powinno zaowocować jakościowo lepszym poziomem myślenia.

[12] Logik Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898) sformułował *problem żaby*. Występuje w nim osiemnaście różnych zmiennych zdaniowych. Chcąc ten problem rozwiązać metodą zero-jedynkową, należałoby zbadać 262 144 kombinacji wartości logicznych (za K. Trzęsicki, op. cit., s. 51). Prawdokrzew jest metodą dużo bardziej efektywną (por. P. Suber, *Truth Tree for Propositional Logic*, [online] <www.earlham.edu/~peters/courses/log/treeprop.htm>, dostęp: 3.04.2011.