Dianni, Jadwiga

Pierwszy znany traktat rękopiśmienny w literaturze matematycznej w Polsce : Algorismus minutiarum Martini Regis de Premislia

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 12/2, 269-289

1967

Jadwiga Dianni

PIERWSZY ZNANY TRAKTAT RĘKOPIŚMIENNY W LITERATURZE MATEMATYCZNEJ W POLSCE

ALGORISMUS MINUTIARUM MARTINI REGIS DE PREMISLIA

Autorem pierwszego znanego, jak dotychczas, traktatu matematycznego napisanego w Polsce przez Polaka — jest wychowanek Akademii Krakowskiej, a potem i jej profesor, Marcin Król z Żurawicy (Martinus Rex de Premislia).

Osobie tego uczonego i jego twórczości naukowej poświęcili fragmenty prac L. A. Birkenmajer [1], K. Morawski [2] i J. N. Fijałek [3], ostatnio zaś szczegółowo opracował biografię Króla i zestawił jego pisma Z. Kuksewicz [3a]. Z wspomnianych prac wynika, że Marcin Król po odbyciu studiów w Akademii Krakowskiej i uzyskaniu stopni naukowych [4]

---

[1] L. A. Birkenmajer, *Marcin Bylica z Olkusza oraz narzędzia astronomiczne, które zapisał Uniwersytetowi Jagiellońskiemu w roku 1493.* „Rozprawy Akademii Umiejętności, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy", seria 2, Kraków 1893, t. 25, ss. 21—27.

[2] K. Morawski, *Historia Uniwersytetu Jagiellońskiego.* T. 1. Kraków 1900, ss. 399 i nast.

[3] J. N. Fijałek, *Polonia apud Italos scholastica, saeculum XV.* T. 1. Cracoviae 1900, ss. 105—111.

[3a] Z. Kuksewicz, *Marcin Król z Żurawicy, alias z Przemyśla.* „Materiały i Studia Zakładu Historii Filozofii Starożytnej i Średniowiecznej", seria A: „Materiały do Historii Filozofii Średniowiecznej w Polsce", Kraków 1961, t. 1, ss. 118—140.

[4] Data wpisu Marcina Króla do Uniwersytetu Krakowskiego nie jest pewna. W *Album studiosorum* czytamy następujące wpisy: 1) *1438 Tempore hiemali sive 1438/39 Martinus Stanislai de Żyrawice d. t.* Zatem — *scholar „intitulatus"* na półrocze zimowe 1438 r., a więc wpisany w jesieni 1437 r. (por.: *Album studiosorum Universitatis Cracoviensis.* T. 1. Cracoviae 1887, s. 92); 2) *1440 Aestate sub rectoratu mgri Johannis de Dobra medicinae doctoris — Martinus Johannis de Premislia, d. 30 gr* (por.: *ibidem*, s. 96). Ponieważ w spisie bakałarzy promowanych w 1444 r., w zapisce z XVI w., czytamy: *1444 Ad Quatuor tempora Cinerarum in decanatu mgri Johannis de Raciborsko — Martinus de Sirawicze (alias de Premislia iste fuit doctor Rex in medicinis. Collegiaturam iste in astrologia errexit)* (por.: J. Muczkowski, *Statuta nec non liber promotionum philosophorum ordinis in Universitate studiorum Jagellonica ab anno 1402 ad annum 1849.* Cracoviae 1849, s. 35) — wnioskuje stąd L. A. Birkenmajer (por. przypis 1), że rok wpisu 1438 jest prawdopodobniejszy, przy czym nadmienia, że uczony występuje w różnych dokumentach to jako przemyślanin, to jako żurawiczanin (wieś Żurawica leży o 5 km od Przemyśla).

Inny pogląd wyraża J. N. Fijałek (por. przypis 3). Przyjmuje on rok 1440 jako datę wpisu, stwierdzając przy tym, że w późniejszych dokumentach — od promocji magisterskiej począwszy — spotyka się już stale nazwisko: Martinus Rex de Premislia. Ten pogląd na datę wpisu znajduje potwierdzenie w fakcie, że gdyby założyć wstąpienie Marcina Króla do akademii w 1438 r., to stopień bakałarza byłby on otrzymał dopiero po sześciu latach studiów, w 1444 r., co stałoby w jaskrawej sprzeczności z otrzymaniem przezeń stopnia magistra w 1445 r., a więc w tak krótkim czasie po egzaminie bakalarskim. Cytowany pogląd podziela też J. Zathey (por.: *Historia Biblioteki Jagiellońskiej.* T. 1. Kraków 1966, s. 108).

Nie budzi natomiast żadnych zastrzeżeń data otrzymania stopnia magistra, zapisana w *Liber promotionum* pod data 1445 r.; wśród promowanych w tym roku widnieje: *Martinus Rex de Premislia* (por.: J. Muczkowski, *Statuta* [...], s. 36).

rozpoczął w tejże akademii wykłady, obejmując w roku akademickim 1444/1445 kolegiaturę Stobnera [5].

Collega Stobnerianus miał wykładać *Geometrię* Euklidesa, optykę (perspektywę), arytmetykę, muzykę (tj. rachunkową część akustyki), teoryki planet oraz objaśniać *Tablice alfonsyńskie*, poprzedzając te objaśnienia wykładem arytmetyki liczb ułamkowych [6]. Stwierdziwszy, że scholarzy napotykali duże trudności w przyswajaniu tych zagadnień z nie zawsze w sposób dostępny opracowanych rękopisów obcych autorów [7], Marcin Król postanowił sam ułożyć nowo ujęty traktat o ułamkach — *Algorismus minutiarum*. Traktat został napisany przed rokiem 1445; w tym właśnie roku udaje się Król w długą wędrówkę po różnych uniwersytetach zagranicznych, o czym obszernie mówią wyżej wymienieni autorzy [8].

Algorismus minutiarum zachował się w zbiorach rękopiśmiennych Biblioteki Jagiellońskiej w trzech kopiach zawartych w kodeksach o sygnaturach: 1859, 1927, 1844. Autograf nie dochował się czy też do dziś nie został odszukany.

W pierwszym kodeksie (1859) traktat Króla znajduje się na kartach 81*v*—111*v* [9]. Skopiował go Wojciech z Opatowa, co zapisał w kolofo-

---

[5] Potwierdzenie tego faktu znajdujemy w liście kardynała Zbigniewa Oleśnickiego do Marcina Króla. Mimo wyjazdu Króla za granicę kolegiaturę tę dla niego zatrzymano. Gdy jednak uczony po otrzymaniu stopnia doktora medycyny w 1448/49 r. w Uniwersytecie Bolońskim — wbrew obietnicy danej Długoszowi w Rzymie — w 1449 r. udał się na Węgry na dwór wielkorządcy Hunyadiego, Oleśnicki — którego poparcie umożliwiło Królowi studia zagraniczne — listem wysłanym w grudniu 1449 r. lub w styczniu 1450 r. domagał się kategorycznie powrotu Króla, tak ze względu na swój własny stan zdrowia, jak i konieczność podjęcia wykładów: *Longo tamen tempore et longa expectatione delusi sumus, nec non solum sed ipsa Cracoviae Universitas, quae votis nostris obtemperans ordinarium locum pro vobis in hunc diem reservat* (por.: *Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia.* T. 2: *Codex epistolaris saeculi decimi quinti.* Cracoviae 1876, cz. 2, ss. 86, 92; por. także: Biblioteka Jagiellońska (dalej: BJ), rkps 42, s. 100 oraz BJ, rkps 48, s. 114.

[6] Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (dalej: AUJ), rkps 68.

[7] W zbiorach rękopiśmiennych Biblioteki Jagiellońskiej zachowały się z tego okresu traktaty o ułamkach Jana de Lineriis i Jordana Nemorariusa: rkps 551 z 1383 r., ss. 102—109; rkps 552, ss. 137—150; rkps 562 z 1385 r., ss. 127—143; rkps 573, ss. 55—85; rkps 602, ss. 69—82 i ss. 209—216 (komentarz *Modum representationis minutiarum*); rkps 1929, ss. 289—352 i ss. 353—376 (komentarz); rkps 1924, ss. 271—298 (ze zbiorów Macieja Miechowity, zawierający *Jordani Nemorarii Minutiarum tractatum*).

[8] Do podanych wyżej wiadomości o studiach Króla za granicą dodamy jeszcze, że swoją „wędrówkę" zaczął od Pragi; 18 XII 1446 został przyjęty do grona magistrów tamtejszego uniwersytetu (por.: J. Muczkowski, *Wiadomość o założeniu uniwersytetu w Krakowie.* Kraków 1851, s. 101). Podczas studiów w Bolonii uzyskał lektorat astronomii (por.: *I rotuli dei lettori legisti et artisti dello Studio Bolognese.* Ogłosił U. Dallari. T. 1. Bologna 1888, s. 26). Do Krakowa wrócił Król w 1450 r. i tu pozostał do końca życia. Zajmował w dalszym ciągu kolegiaturę Stobnera, w każdym razie — w latach 1451 i 1452, ogłaszał bowiem na te lata *judicia* (por.: BJ, rkps 1918, rkps 764), co należało do obowiązków kolegiata Stobnerowskiego; ufundował też katedrę astrologii (por.: AUJ, rkps 46, s. 29). Dokładnej daty śmierci Króla nie znamy, zmarł przed 1460 r. (por.: *Monumenta* [...]. *Codex epistolaris* [...], cz. 2, s. 338).

[9] BJ, rkps 1859. Kodeks papierowy o wymiarach 21 × 15 cm (por.: T. Żebrawski, *Bibliografia piśmiennictwa polskiego. Z dziejów matematyki i fizyki oraz ich zastosowań.* Kraków 1873, ss. 28—29; oraz: W. Wisłocki, *Katalog rękopisów Biblioteki Uniwersytetu Jagiellońskiego.* T. 1. Kraków 1877, ss. 440—441). Oprawa bardzo skromna: deski powleczone świńską skórą, niebarwioną; ślady po metalowych guzach i dwóch zapięciach na paski; ornament prosty liniowy, rylcem. Górna część oprawy obłamana i prowizorycznie naprawiona. Na grzbiecie nalepka

nie na k. 111*v*: *Explicit nova compilatio Algorismi minuciarum per me Albertum de Magna Opatow Anno Domini MCCCCXLVII in Bursa Divitum in Vigilia Assumptionis Mariae edita per magistrum Martinum Polonum*[10]. Pismo: drobna kursywa pospieszna, tekst rubrykowany, inicjały czerwone; na niektóre pozostawiono puste miejsca. Na marginesie: znaki mnemotechniczne; nieliczne glosy marginalne i interlinealne, zwłaszcza na początku.

W drugim kodeksie (1927) spotykamy traktat Marcina Króla na k. 379*v*—424*r*[11]. Skopiowany jest ręką Jana z Olkusza[12], właściciela kodeksu, co potwierdza zapiska na kolofonie na k. 424*r*: *Et sic est Algorismi minuciarum et est editus per magistrum Martinum de Premislia Polonum Anno Domini 1445^to*[12a]. Kopia *Algorytmu* jest na ogół staranna, tekst rubrykowany, inicjały bardzo proste, czerwone, wstępny nieco ozdobniejszy. Rysunki są sporządzone cyrklem. Nieliczne glosy marginalne i interlinealne, zwłaszcza na początku *Algorytmu*.

W trzecim kodeksie (1844) *Algorismus minutiarum* zajmuje k. 549*v*—592*v*[13], tj. dwa ostatnie seksterny. Niektórych rysunków kopista nie wykonał, pozostawiając na nie puste miejsca.

---

z sygnaturą. Wyklejka pergaminowa z próbami pisma i napisem ręką Jana Brożka *Ptolemeus et pars Euclidis*. Antefolium pergaminowe z czternastowiecznym tekstem liturgicznym. Kodeks pisany jest różnymi rękami, drobną kursywą, na ogół mało starannie. Powstał prawdopodobnie przez oprawienie poszczególnych osobno napisanych czy skopiowanych części, posiadających własną numerację składek. Zawiera: *Prodoscimo de Beldomandi Compositio astrolabii, Ptolemei Liber quadripartitus* z komentarzem, tegoż *Centiloquium*, Euklidesa *Geometrię* oraz fragmenty nie dające się zidentyfikować przy pomocy incipitów.

[10] „Kończy się nowe zebranie *Algorytmu ułamków* przeze mnie Alberta z Wielkiego Opatowa Roku Pańskiego 1447 w Bursie Bogatych w Wilię Wniebowstąpienia Panny Marii [skopiowane,] wydane przez magistra Marcina Polaka". Wojciech z Opatowa otrzymał stopień bakałarza w 1145 r. (por.: J. Muczkowski, *Statuta* [...], s. 37), magistra w 1447 r. (por.: *ibidem*, s. 38), dwukrotnie także wymieniany jest jako dziekan — w 1453 r. i 1458 r. (por.: *ibidem*, s. 44 i s. 50).

[11] BJ, rkps 1927. Kodeks papierowy o wymiarach 21 × 15,5 cm (por.: T. Żebrawski, *op. cit.*, ss. 27—28; oraz: W. Wisłocki, *op. cit.*, ss. 462—463). Oprawa bardzo skromna: deski powleczone świńską skórą, niebarwioną, ślady po pięciu metalowych guzach i dwóch zapięciach na paski; ornament bardzo prosty, rylcem. Na grzbiecie nalepka z sygnaturą. Wyklejka papierowa; na niej od góry napis *Liber magistri Johannis de Elkusz.* Inną ręką, późniejszą, dodana data: *1542*. Poza tym notatki treści geometrycznej i astronomicznej. U dołu nalepka z dawną sygnaturą (BBXXV 14). Antefolium i postfolium pergaminowe. Na antefolium ręką Jana z Olkusza spis zawartości kodeksu. Niżej ręką Brożka napis *Opuscula mathematica.* Kodeks pisany jest starannie kilkoma rękami; zawiera: Euklidesa *Geometrię, Prodoscimo de Beldomandi Compositio astrolabii, Canones astrolabii, Johannis de Muris Arithmetica, Tractatus de musica, Johannis Peckhami Perspectiva communis* oraz *Algorismus minutiarum*.

[12] W *Statutach* ogłoszonych przez Muczkowskiego wymieniony jest Jan z Olkusza promowany na magistra w 1444 r. (s. 36), z dopiskiem: *fuit licentiatus in medicinis et magnae reputationis temporibus suis.* Drugi Jan z Olkusza promowany jest na magistra w 1450 r. (*ibidem*, s. 41), dopisek tu brzmi: *licentiatus medicinae, Plebanus in Ilkusch.* Do którego z tych magistrów odnosi się wzmianka w *Statutach* o trzykrotnym piastowaniu godności dziekana w latach 1456 (s. 47), 1459 (s. 53), 1464 (s. 60) — nie wiadomo. Nie wiemy również, który z nich był właścicielem wymienionego kodeksu.

[12a] „I to jest *Algorytm ułamków* wydany przez magistra Marcina z Przemyśla Polaka Roku Pańskiego 1445".

[13] Odnośnie do opisu kodeksu por.: A. Bednarski, *O krakowskich rękopisach Perspektywy arcybiskupa Jana Peckhama.* Poznań 1933, ss. 7—8; oraz W. Wisłocki, *op. cit.*, s. 437. Kodeks pisany jest kilkoma rękami, m. in. przez Jana z Inowrocławia, który był właścicielem kodeksu, jak świadczy zapiska prowenien-

Incipit wymienionych kopij traktatu brzmi: *Modum arismetrarum gnaro intuitu sub tropolitis editum racionibus minutias attente rimando tria intima nutibus ultima supponentem duarum etenim revolvit varia sese invicem ambigencium pluribus onusta lumina opposite nature usibus Supputancium* [...]. Pierwsze litery incipitu tworzą kryptogram: *Magister Martinus de Rvssia Polonus* — na co zwrócił uwagę J. Zathey [13a].

Czy zachowane kopie sporządzone były z oryginału, czy z innych kopii — nie wiemy; niewątpliwie są w nich pewne błędy i zniekształcenia, niemożliwe dziś do sprawdzenia wobec braku autografu. Stosunkowo duża liczba kopii *Algorytmu* Marcina Króla wskazuje, że traktat posiadał bardziej istotne walory, niż inne traktaty arytmetyczne znajdujące się wówczas w uniwersytecie, napisane przez obcych autorów.

Postaramy się — przez przeprowadzenie analizy treści traktatu w oparciu o odczytany i ujednolicony w stosunku do zachowanych kopii tekst oraz jego polskie tłumaczenie [14] — wykazać, że uznanie, jakie traktat bezpośrednio po napisaniu znalazł u uczniów i kolegów autora, było w pełni zasłużone.

*

Na wstępie musimy zaznaczyć, że w nomenklaturze Marcina Króla ułamek nazywa się albo *minutia*, albo *minutum*. Pierwsza nazwa, figurująca w tytule traktatu, jest ogólniejsza i służy do oznaczania ułamków w ogóle; brzmi ona w liczbie pojedynczej: *minutia*, w liczbie mnogiej: *minutiae* albo też często *minuciae*. Wydaje się, że wprowadzając drugą nazwę, Król chce wyróżnić wypadek szczególny: ułamki fizyczne, czyli sześćdziesiątkowe; nazywa je odpowiednio: *minutum, minutia* (*minutum* to używany w tym wypadku jako rzeczownik rodzaju nijakiego — imiesłów bierny czasu przeszłego od *minuo* = zmniejszam), chociaż spotykamy również nazwę: *minutiae phisicae*.

Traktat *Algorismus minutiarum* rozpoczyna Król ogólnym rozważaniem, co to jest ułamek (por. ryc. 1). Jest to — mówi — liczba zapisana wprawdzie za pomocą dwóch liczb całkowitych, ale nie przejmuje ona własności tych liczb. Liczba całkowita to u Króla odpowiednik ilości: rolę tę spełnia tylko licznik ułamka. Ułamek natomiast jest to pewna wielkość, którą właściwie reprezentuje mianownik. Do mianownika przywiązuje Król własność ciągłości, której nie posiada licznik. Mówi wyraźnie: „Ułamek 2/3 nie wyraża konkretnie żadnej ilości, inne bowiem są 2/3 piędzi (miary długości) albo nawet piędzi kwadratowej (miary powierzchni), a inne są 2/3 sklepienia niebieskiego".

Prócz różnicy znaczenia obu liczb całkowitych w ułamku, wymienia autor i inne cechy specyficzne ułamka, których sformułowanie budzi podziw nawet z dzisiejszego punktu widzenia. Dwie z nich podkreślimy szczególnie. Liczba całkowita jako wyraz ilości może być dowolnie duża, może rosnąć — mówi Król — *in infinitum*. Ułamki natomiast o liczniku 1 z wzrostem mianownika maleją do zera, dowolny zaś ułamek

---

cyjna na wyklejce przedniej okładki: *Magistri Johannis de Junivladislavia Euclides, Perspectiva cum commento, Theorica planetarum, Sphaera materialis. Algorismus minutiarum* zajmuje dwa ostatnie seksterny z wyjątkiem kart 592—598, na których inną ręką wpisano: *Joh. de Gamundia De compositione cylindri.*

[13a] *Historia Biblioteki* [...], ss. 108—109.

[14] Tekst łaciński odczytała i opracowała na moją prośbę pod względem paleograficznym mgr M. Kowalczykówna, tłumaczenia na język polski dokonał dr J. Kołtowski. W komentowaniu trudniejszych miejsc tekstu pomagał mi dr A. Wachułka.

właściwy przy nieograniczonym (*in infinitum*) wzroście i licznika, i mianownika zbliża się do pewnej granicy (*terminus*), mianowicie do jedności.

W dążeniu do usunięcia trudności w wykładzie usiłuje autor wprowadzić elementy poglądowe. Udaje mu się to jedynie częściowo; przede wszystkim, stojąc na gruncie pitagorejskiej interpretacji jedności jako początku liczenia, która geometrycznie odpowiada punktowi, nie może skonstruować osi liczbowej. Wśród licznych rysunków nie ma ani jednego, gdzie jako początek oznaczeń występowałoby zero. Każdy odcinek jest oznaczony dwiema literami: *a* — początek odcinka, *b* — koniec odcinka. Król bowiem zdaje sobie sprawę, że można, i nawet należy upoglądowić ułamki za pomocą odcinków. A więc, mimo braków w logicznych podstawach ówczesnej matematyki, znakomita intuicja pozwala uczonemu zbudować piękny wykład o ułamkach, bogato ilustrowany graficznie.

Bliższe zapoznanie się z sensem i znaczeniem ułamka obiecuje autor umożliwić w dalszych wywodach traktatu, który dzieli na trzy rozdziały: *Tractatus primus de reductione minutiarum*; *Tractatus secundus de VII speciebus, puta: additione, subtractione, duplatione, mediatione, multiplicatione, divisione, progressione*; *Tractatus tertius de radicum extractione et quibusdam regulis* [15].

Na początku pierwszego rozdziału (*Tractatus primus*) omawia autor znaczenie, formę zapisu oraz własności ułamków, najpierw zwyczajnych (*vulgares*), a następnie sześćdziesiątkowych (*phisicae*). Ułamek zwyczajny definiuje w ten sposób: mianownik wskazuje, na ile części podzielono całość, licznik natomiast wyraża, ile tych części wzięto. Z takiego określenia wynikają następujące trzy własności ułamka zwyczajnego: gdy licznik jest mniejszy od mianownika, ułamek jest mniejszy od jedności; gdy licznik i mianownik są sobie równe, wartość ułamka wynosi 1 (*unitas*); gdy licznik jest większy od mianownika, ułamek jest większy od jedności. Bez szczególnego podkreślania faktu Król zauważa, że ułamek, w którym licznik jest połową mianownika, dorównuje połowie jedności. Autor nie rozwija tu jeszcze systematycznie upraszczania ułamków, ale dodaje, że gdy licznik ułamka jest równy trzeciej części mianownika, to ułamek stanowi trzecią część całości (*una tertia pars integri*).

Odrębnie traktuje Król ułamki sześćdziesiątkowe i stwierdza, że powstają one przez podzielenie jedności na 60 równych części. Ale jednością jest u Króla zawsze 1 stopień (*gradus*); i ta właśnie okoliczność spowodowała wprowadzenie nazwy *minutiae phisicae*. Wydaje się jednak, że nie tylko ten moment zdecydował o pozostawieniu ułamków sześćdziesiątkowych w powszechnie używanej postaci [16].

Ułamki sześćdziesiątkowe są i dla Króla pewną formą pozycyjnego

[15] „Pierwszy o sprowadzaniu ułamków do wspólnego mianownika, drugi o siedmiu formach operacji rachunkowych: o dodawaniu, odejmowaniu, podwajaniu, połowieniu, mnożeniu, dzieleniu i o tworzeniu postępów, trzeci o wyciąganiu pierwiastka i o pewnych regułach".

[16] Ułamki sześćdziesiątkowe powstały w Babilonie, tam bowiem rachowano w układzie sześćdziesiątkowym, co stwierdziło badanie tabliczek z pismem klinowym. Ułamki te docierają następnie do innych krajów; od II w. p.n.e. zasięg ich jest coraz większy, a w ręku astronomów aleksandryjskich stają się cennym narzędziem rachunku. Obszerne ujęcie tego rachunku podają pochodzące ze starożytności i średniowiecza *Scholia* do 10 księgi *Elementów* Euklidesa (por.: *Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euklids Elementen.* „Bibliotheca Mathematica", seria 3, zesz. 5/1904, ss. 225—233).

zapisu liczby, która utrwaliła się w wielowiekowej tradycji, od matematyki babilońskiej bodajże poczynając. Jednostki dalszych rzędów powstają tu za pomocą dzielenia stałego jednostki wyższej przez 60. *Prima minutia* to 1/60 stopnia, *secunda minutia*: 1/60 z 1/60, *tertia minutia*: 1/60 z 1/60 z 1/60 itd. Król, jego poprzednicy i jemu współcześni nie pisali tych ułamków w postaci ułamków zwyczajnych, lecz wyróżniali poszczególne rzędy dodatkowymi skrótami pisanymi u góry nad odpowiednimi cyframi. Np. zapis Króla

s^{na}	g^{ra}	m^a	2^a	3^a
2	7	20	25	30

oznacza: $2.60 + 7.60^0 + 20.60^{-1} + 25.60^{-2} + 30.60^{-3}$. Napisy u góry są skrótami mian: s^{na} = *signa* (tak nazywano rząd odpowiadający dziesiątkom w systemie dziesiątkowym); g^{ra} = *gradus*; m^a = *prima minutia*; 2^a = *secunda minutia*; 3^a = *tertia minutia*.

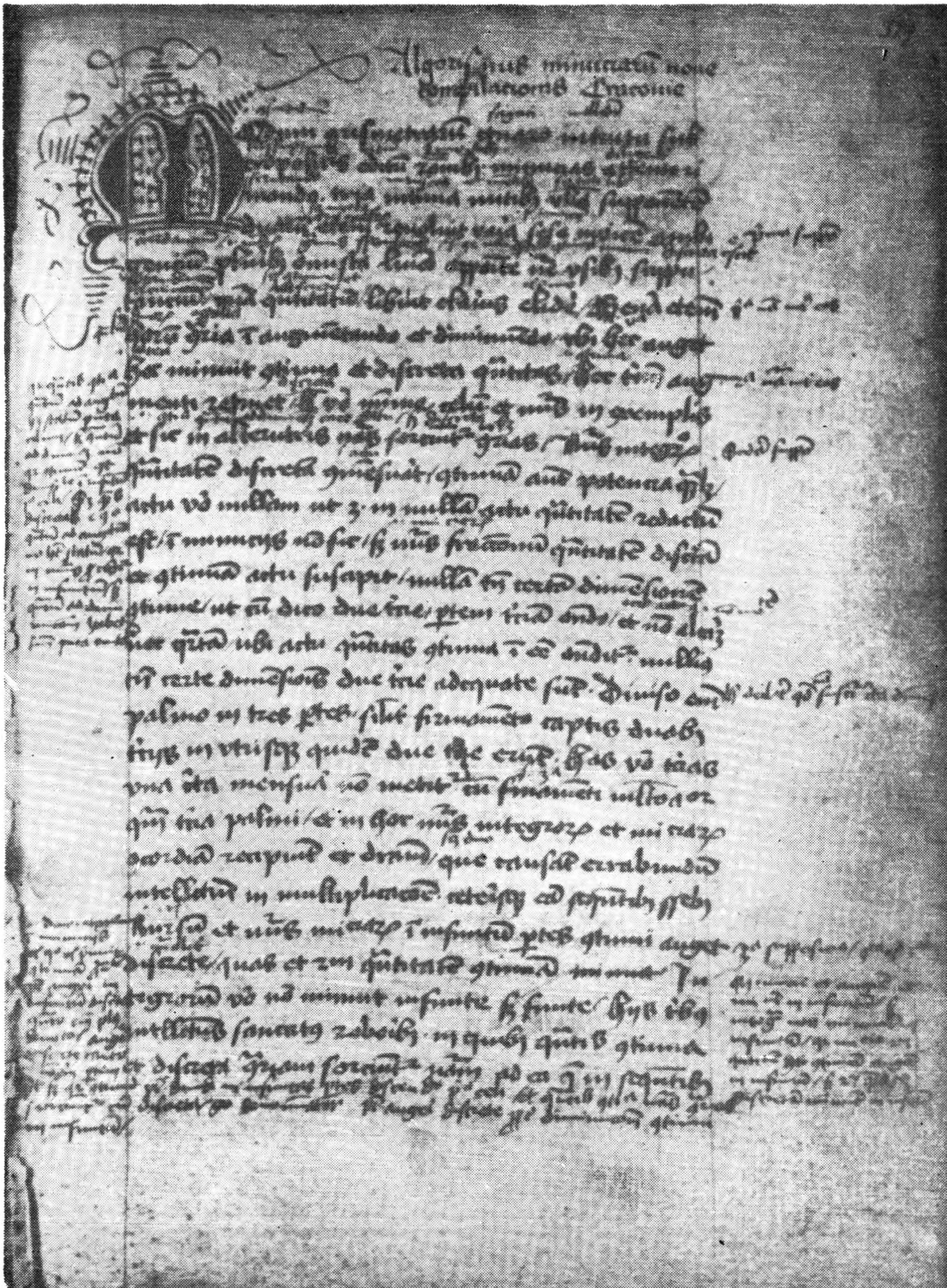
Król pojmuje, że nie ma istotnej różnicy między ułamkami zwyczajnymi a fizycznymi, ale ponieważ *Tablice alfonsyńskie* są zestawiane w ułamkach sześćdziesiątkowych, pozostawia je w ich dotychczasowej postaci. Ciekawe, że autor usiłuje wytłumaczyć obranie liczby 60 za podstawę układu pozycyjnego tym, że jest ona dogodna do dzielenia (*aptissimus ad divisionem*).

Z tekstu Króla widać, że bardzo biegle posługuje się on znakami hindusko-arabskimi. Zero stale zresztą nazywa *ciffra* [17]. Jednakże zapis cechuje pewna nieprecyzyjność. Szczególnie jest niejasne, dlaczego po stronie całkowitej każda cyfra odpowiada pewnemu rzędowi, a po stronie ułamkowej dla każdego rzędu są dwie cyfry. Takie przyporządkowanie dwóch cyfr jednemu rzędowi nigdy się więcej w traktacie nie powtarza. Wprost przeciwnie, przy zamianie ułamka sześćdziesiątkowego kończącego się na pewnym rzędzie na rząd niższy — Król dopisuje tylko jedno zero.

Bardzo obszerny rozdział pierwszy poświęca autor sprowadzaniu ułamków do wspólnego mianownika. Celem tych rozważań jest przede wszystkim porównywanie ułamków, a następnie ich dodawanie względnie odejmowanie. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika Król objaśnia wyczerpująco na kilku przykładach, by później sformułować ogólną regułę. Problem porównywania ułamków sprowadza on do zastąpienia danych ułamków przez inne o takiej samej wartości. Podstawowym momentem w jego rozważaniu jest współmierność odcinków.

Całość przedstawia odcinek o pewnej długości (por. ryc. 2). Dla porównania np. ułamków 2/3 i 2/4 autor dzieli ten odcinek raz na trzy części, drugi raz na cztery części. Aby dowiedzieć się, o ile różnią się odcinki odpowiadające 2/3 i 2/4, należało znaleźć wspólną miarę dla odcinka przedstawiającego 1/3 całości i dla odcinka przedstawiającego 1/4 całości. Wspólną miarą jest 1/12 jedności, bo 12 dzieli się i przez 3, i przez 4. A więc punkty podziału całości na dwunaste części będą się

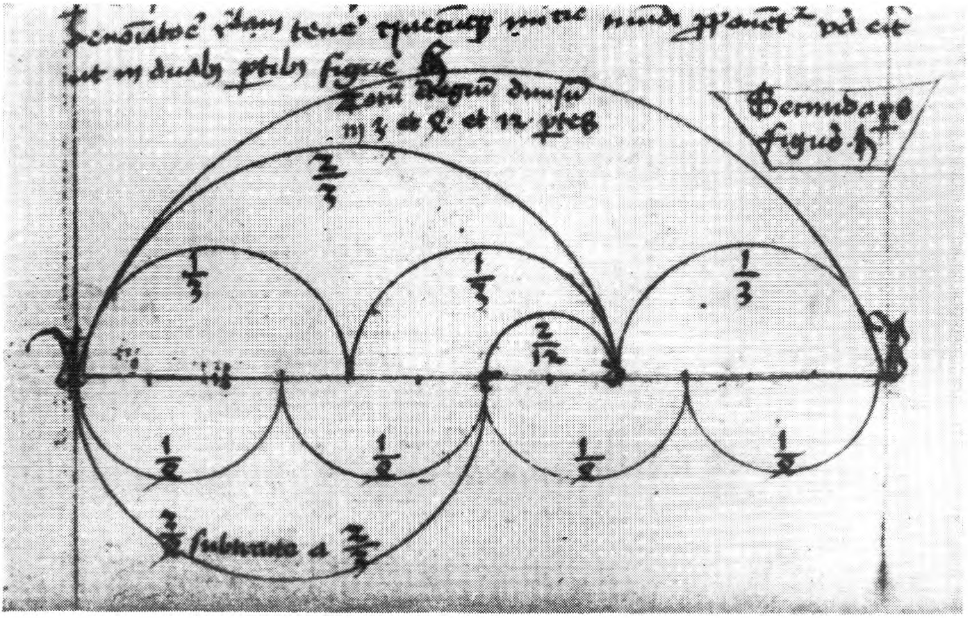
[17] Nazwa pochodzi od arabskiego *as-sifr* = puste, próżne. Nazwę tę w XIII w. latynizuje na *zephirum* Leonardo z Pizy Fibonacci w swej *Liber abaci*. Johannes Sacrobosco w *Tractatus de arte numerandi* (ok. 1249 r.) podaje: *ciffra vel figura nihil*. Pozostałe znaki arabskie nazywano: *characteres, numeri*. Nazwa *ciffra* na oznaczenie zera przetrwała w podręcznikach arytmetycznych do XVIII w., a nawet do początku XIX w. Jeszcze Gauss nazywa zero *cifra*.



Ryc. 1. *Algorismus minutiarum* Marcina Króla — pierwsza karta prawie współczesnej oryginałowi kopii sporządzonej przez Jana z Olkusza (BJ, rkps 1927, k. 379)

Рис. 1. *Algorismus minutiarum* Марцина Круля. Первая страница копии почти современной оригиналу, выполненной Яном из Олькуша

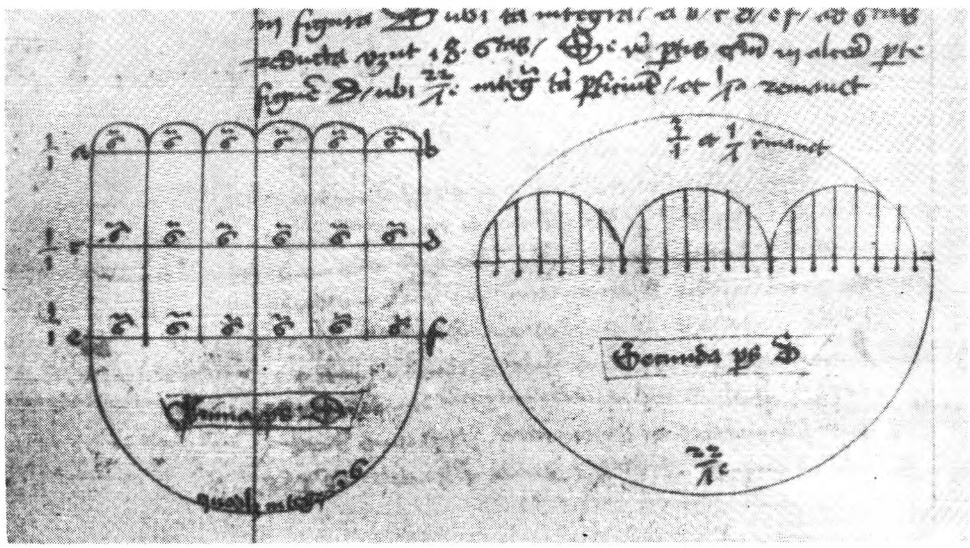
Fig. 1. The treatise by Marcin Król, sheet one of a copy from XVth century



Ryc. 2. Wykres ilustrujący sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika i ich porównywanie (tamże, k. 398)

Рис. 2. Графическая интерпретация, иллюстрирующая метод сведения дробей к общему знаменателю и сравнивания их (там же, с. 398)

Fig. 2. The graphic interpretation of the reducing of fractions to a common denominator



Ryc. 3. Jeden z poglądowych wykresów: liczby całkowite zostały przedstawione jako ułamki o mianowniku 1 (tamże, k. 388)

Рис. 3. Один из наглядных графических представлений: целые числа изображены в виде дробей со знаменателем 1

Fig. 3. Marcin Król in some cases reduces integers to fractions with 1 in the denominator

pokrywały z punktami podziału na trzecie i na czwarte części, a to pozwoli porównać dane ułamki. Koniec odcinka odpowiadającego ułamkowi 2/3 pokryje się z ósmym punktem podziału, koniec odcinka 2/4 — z szóstym punktem podziału. Różnica więc między tymi ułamkami wynosi 2/12 całości.

Może dziwić nieco fakt, że Król, który doskonale zna upraszczanie ułamka i stale je stosuje, posłużył się tu ułamkiem 2/4 zamiast 1/2. Ale chodziło mu prawdopodobnie o to, aby podkreślić, że ułamki o równych licznikach nie są sobie równe, jeżeli różne są ich mianowniki.

Jako wynik przytoczonego rozważania Król ustala ogólną regułę, którą moglibyśmy tak ująć: jeżeli mianowniki ułamków nie mają wspólnych podzielników, to dla otrzymania wspólnego mianownika należy je przez siebie pomnożyć.

Następna reguła, którą Król wyprowadza, stanowi bardzo poważny krok naprzód w stosunku do sposobów stosowanych od czasu Leonarda z Pizy [18]. Chodzi o porównanie trzech ułamków o różnych mianownikach, będących zresztą liczbami względem siebie pierwszymi. Autor zaleca tu znalezienie wspólnego mianownika dla wszystkich trzech ułamków r ó w n o c z e ś n i e (podkr. — J. D.). W wypadku podanego przez niego przykładu: 2/3, 2/4, 2/5 — jest nim liczba 60. Autor uzasadnia wynik tym, że dla odcinków odpowiadających ułamkom 1/3, 1/4, 1/5 — analogicznie jak w przykładzie z dwoma ułamkami — wspólną miarą jest 1/60 całości. Król rozumie doniosłość swojej interpretacji i dlatego krytykuje w tym miejscu jednego z autorów znanych wówczas traktatów o arytmetyce, „mistrza Jana" (z Linières, de Lineriis), który w takim wypadku znajduje wspólny mianownik k o l e j n o (podkr. — J. D.) dla dwóch ułamków (pierwszego i drugiego, a potem drugiego i trzeciego) i podaje wynik wprawdzie prawidłowy, ale bez objaśnienia, co dla czytelników może być niezrozumiałe.

W ustępie zatytułowanym *Trzecia reguła* stwierdza Król wyraźnie potrzebę sprowadzania wszystkich branych pod uwagę ułamków do wspólnego mianownika tylko wtedy, gdy wszystkie mianowniki są różne. Ułamki o jednakowych mianownikach porównuje się łatwo przy niezmienionym mianowniku. Król dobitnie podkreśla, że np. dla ułamków 1/2, 1/3, 1/3, 1/3 wspólnym mianownikiem jest 6. Można by niewątpliwie — mówi — użyć także mianownika 54, ale byłoby to żmudne a zupełnie niepotrzebne [19].

Rozdział kończy autor szczegółowymi uwagami dotyczącymi pozycji liczb całkowitych w stosunku do rozważanego problemu. Liczbę całkowitą można — mówi — zawsze zamienić na ułamek o dowolnym mianowniku. Wystarczy w tym celu pomnożyć daną liczbę przez wybrany mianownik, a otrzyma się w ten sposób szukany licznik ułamka. Autor nie mówi nigdzie, że liczbę całkowitą należy uważać za ułamek o mianowniku 1, bo to nie mieści się w jego określeniu ułamka, ale nie brak takich oznaczeń w tekście (por. ryc. 3).

Nie wprowadza Król również nazwy ułamka niewłaściwego; mimo to zajmuje się ułamkami, w których licznik jest większy od mianowni-

[18] Mamy tu na myśli wspomnianą w przypisie 17 *Liber abaci* Leonarda z Pizy, książkę napisaną z początkiem XIII w., w której autor w oparciu o system pozycyjny cyfr hindusko-arabskich wyłożył całość ówczesnej nauki rachunków.

[19] Zauważymy, że prawie wszyscy współcześni Królowi i nawet późniejsi (w wiekach XVI i XVII) matematycy stosowali mechaniczne mnożenie pod rząd wszystkich występujących mianowników; wyjątkami byli: Chuquet, Tartaglia i Clavius.

ka i zaznacza, że z takiego ułamka można wydzielić całości. Jako przykład podaje jedną z Archimedesowych liczb wyznaczających wartość stosunku obwodu koła do średnicy, mianowicie 22/7. Autor nie zastanawia się, czy liczba ta jest dokładną, czy przybliżoną wartością wymienionego stosunku, a zmienia ją tylko przez mieszczenie mianownika w liczniku w liczbę mieszaną 3/1 + 1/7. Może przez podanie takiego właśnie przykładu Król chciał podkreślić użyteczność arytmetyki nie tylko w astronomii, ale i w innych naukach matematycznych. W napisanym w pięć lat potem traktacie o geometrii praktycznej [20] będzie on czytelnika odsyłał do swego *Algorytmu ułamków*.

Definicję ułamka jako wyniku dzielenia przez liczbę całkowitą uważa Król za najbardziej właściwą. Wykazuje, że definicja ta daje zupełnie wystarczającą a zarazem jasną odpowiedź nawet wówczas, gdy chodzi o obliczenie ułamka z ułamka. Przez właściwe zastosowanie określenia ułamka można ułamek z ułamka zamienić na ułamek z całości, który autor nazywa „prostym" (*simplex*). Dzieląc część całości na odpowiednią ilość równych części można też wyrazić stosunek takiej jednej części do całości. W wypadku kilkakrotnego pomniejszania podobnego ułamka, co się da krótko zapisać jako ułamek z ułamka z ułamka, otrzymamy wynik w ten sposób, że iloczyn liczników da licznik, a iloczyn mianowników mianownik ułamka prostego. Np. 1/2 z 2/3 z 2/6 jest 4/36.

Trudność widzi autor w zapisie. Bo jeżeli 1/2 1/3 1/4 oznacza (przy braku znaku dodawania +) sumę tych ułamków, to nie można w taki sam sposób zapisać operacji obliczania 1/2 z 1/3 z 1/4. W celu uniknięcia dwuznaczności proponuje tu autor przekreślanie kreski ułamkowej: $\not/$ za przykładem — jak mówi — Żydów (*more Judeorum*); problematyka symboliki matematycznej była — jak widać — w Polsce rozważana od pierwszych samodzielnych traktatów matematycznych. Autor nie nazywa tej operacji wprost mnożeniem ułamków przez siebie, ale gdy przejdzie później do omawiania mnożenia — skorzysta z tych wyników.

Nie zraża autora jeszcze trudniejszy problem wyznaczania, jaką częścią danego prostego ułamka jest inny prosty ułamek. My byśmy to zagadnienie dzisiaj potraktowali jako dzielenie ułamka przez ułamek albo nawet jako zamianę ułamka piętrowego na ułamek zwyczajny.

Król rozważa przykład, który formułuje w ten sposób: o ile 1/3 jest większa od 1/4 ze względu na 1/3? Różnicę tych ułamków — mówi autor — można łatwo otrzymać przez sprowadzenie ich do wspólnego mianownika. Wynosi ona 1/12 całości. Ale chodzi o to, jaki to jest ułamek 1/3?

Zmierzając do sformułowania odpowiedzi, autor przeprowadza rozumowanie, które znajduje potem praktyczne odbicie w pewnych konstrukcjach podziału okręgu koła na równe części. Aby więc znaleźć nadwyżkę 1/3 nad 1/4, dzieli on 1/3 najpierw na trzy równe części, a potem na cztery równe części. Trzecia część 1/3 wynosi 1/9, a czwarta część 1/3

[20] *Marcina Króla z Przemyśla alias Mistrza Marcina z Żórawicy inaczej Marcinem Królem z Przemyśla zwanego Geometrya Praktyczna.* Przełożył i skomentował L. A. Birkenmajer. Warszawa 1895. Podaje tu Marcin Król (s. 6): „Gdyby ktoś pragnął znaleźć z łatwością średnicę jakiegoś koła, niech weźmie wartość obwodu, którą mnożąc przez 7, a powstały iloczyn dzieląc przez 22, otrzyma iloraz równy średnicy koła". Objaśnienia, jakie autor podaje w związku z dzieleniem, są szerszym rozwinięciem rozważań zawartych w *Algorismus minutiarum*, tu odniesionych do znalezienia średnicy Zodiaku.

wynosi 1/12. Należy teraz obliczyć stosunek tych dwóch części, a więc 1/3 do 1/12. Król zamienia ten stosunek na stosunek 12 do 9. Nie objaśnia bliżej, dlaczego to robi, ale prawdopodobnie korzysta z faktu, że ilość części, na jakie dzielimy całość, i wartość tych części — są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. A więc stosunek wartości części jest odwrotny do stosunku ilości powstałych części:

$$1/9 : 1/12 = 12 : 9.$$

Iloraz wynosi 1 i pozostaje reszta 3, a więc 1/4 z 1/12; wobec tego nadwyżka 1/3 nad 1/4 jest równa 1/4 z 1/3, co istotnie daje 1/12 całości.

Może być, że autor uważał to rozumowanie za tak elementarne, że wydawała mu się zupełnie zrozumiała końcowa reguła: „Aby ułamek prosty zamienić na ułamek ułamka, pomnóż mianownik ułamka przez niego samego, następnie mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego ułamka i dziel drugi iloczyn przez pierwszy". Wskazówka, jaką autor kończy przykład, mianowicie, że iloraz jest licznikiem a reszta mianownikiem szukanego ułamka, jest słuszna dla wszystkich tego rodzaju przykładów, tzn. dla takich ułamków, które są odwrotnościami liczb całkowitych różniących się o 1. W innych wypadkach przy stosowaniu tego samego rozumowania należałoby wartość ułamka określić inaczej.

Jako ilustrację praktyczną powyższego rozważania podaje Król rachunek przydatny w budowie astrolabium. Chodzi mu prawdopodobnie o podział okręgu na 360°. Z konstrukcji dziesięciokąta foremnego otrzymuje 1/10 część okręgu. Z konstrukcji kwadratu, następnie otrzymuje 1/40 część okręgu. 1/40 należy teraz podzielić na 9 części. Łatwiej dzielić — jak wiadomo — na 8 części. Każda 1/8 jest większa od 1/9. Na podstawie poprzedniego rozumowania można obliczyć, o jaką część 1/8 jest od niej 1/9 mniejsza. Rachunek doprowadza do 1/9 z 1/8 [21]. 1/8 jako mały łuk okręgu można z pewnością z dużą dokładnością podzielić na 9 części. Różnica otrzymanej poprzednio 1/8 okręgu i teraz otrzymanej 1/9 z 1/8 jest pożądaną dziewiątą częścią 1/40 części okręgu, a więc 1/360 częścią tego okręgu.

Jakkolwiek, jak wspomnieliśmy wyżej, zachowuje Król dla ułamków fizycznych ówczesne znakowanie, to jednak zaznacza, że pierwsze *minutia* odpowiadają sześćdziesiątym częściom jedności, drugie 1/60 z 1/60 itd. Ta uwaga pozwala mu stosować zależność odwrotnie proporcjonalną do zamiany ułamków zwyczajnych na sześćdziesiątkowe i na odwrót. Porusza zaś te zagadnienia — jak mówi — ze względu na to, że tablice astronomiczne są układane bądź w ułamkach zwykłych (jak u Jana de Lineriis), bądź w sześćdziesiątkowych (jak w *Tablicach alfonsyńskich*).

Ułamki sześćdziesiątkowe mogą być wyrażone także za pomocą — jak byśmy dziś powiedzieli — jednostek różnych rzędów. Zamiana takich ułamków jednych na drugie odbywa się za pomocą dzielenia albo mnożenia przez 60.

W tym swoim dążeniu do powszechnej — że tak powiemy — unifikacji wszystkich ułamków, w czym szczególnie wyraźnie uwydatnia się nowatorskie ujęcie zagadnienia, Król wyjaśnia nawet, w jakich relacjach do ułamków zwyczajnych pozostają żydowskie *elochim*. A więc 18 *elochim* jest równoważne 1 minucie łacińskiej, 1080 *elochim* odpo-

[21] Kopista popełnił tu błąd pisząc 1/8 z 1/8.

wiada 1 godzinie — pisze Król — a moglibyśmy też przyjąć 1080 *elochim* jako równe 1 stopniowi. Zatem liczba 1080 jest zamiennikiem żydowskich *elochim* na ułamki fizyczne, a te już oczywiście dadzą się zamienić na ułamki zwyczajne.

Rozważania te kończy Król uwagą o oznaczeniach ułamków fizycznych. 60° tworzy *signum phisicum*, a więc kąt pełny zawiera 6 *signa phisica*. Ciekawe, że mówi on również o *signum commune*, które wynosi 30°, a więc kąt pełny zawiera 12 takich *signa*. Według Ptolemeusza okrąg dzieli się na 12 części; stąd 12 znaków Zodiaku.

Po obietnicy, że później wróci jeszcze do tego problemu, przechodzi Król do rozdziału drugiego (*Tractatus secundus*). Treścią rozdziału — jak zapowiada na początku — są działania na ułamkach wszystkich typów. Działań wymienia zgodnie z ówczesną tradycją siedem, a więc dodawanie, odejmowanie, podwajanie, połowienie, mnożenie, dzielenie i budowanie postępów. W końcu przyrzeka zilustrować mnożenie i dzielenie rysunkiem.

Ponieważ dodawanie ułamków o jednakowych mianownikach nie przedstawia ani praktycznej, ani teoretycznej trudności, poleca Król we wszystkich innych wypadkach sprowadzać ułamki do wspólnego mianownika, bez względu na to, czy to będą dwa, trzy, czy więcej ułamków. Przy dodawaniu ułamków zwyczajnych do fizycznych należy najpierw w znany już sposób zamienić ułamki fizyczne na zwyczajne i postępować podobnie jak poprzednio. Natomiast dodawanie ułamków fizycznych do siebie odbywa się tak, że dodaje się do siebie jednostki poszczególnych rzędów, przy czym w wypadku otrzymania liczby większej od 60, zamienia się 60 na jednostkę rzędu wyższego. Król przeprowadza tu wykład bardzo wyczerpujący; chodzi mu, jak widać, o to, by nie pominąć niczego, co mogłoby kiedyś sprawić słuchaczom trudności.

Odejmowanie, którym się następnie zajmuje, objaśnia Król analogicznie. Ułamki więc zwyczajne należy najpierw sprowadzić do wspólnego mianownika, a potem odejmować liczniki. Gdy trzeba kilka ułamków odjąć od jednego ułamka, wykonuje Król odejmowanie kolejno po dwa ułamki.

Przy odejmowaniu ułamków zwykłych i fizycznych należy albo ułamki fizyczne zamienić na zwyczajne, albo zwyczajne na fizyczne. Gdyby przy odejmowaniu ułamków sześćdziesiątkowych liczba któregoś rzędu w odjemniku okazała się większa od odpowiedniej liczby w odjemnej, należy — mówi Król, jak o tym zresztą wspomina też Jan de Lineriis — jednostkę wyższego rzędu zamienić na jednostki niższego rzędu i wykonywać odejmowanie. Gdyby zaś na miejscu bezpośrednio wyższego rzędu było zero, należy wziąć jednostkę poprzedniego rzędu, zostawić na pustym miejscu 59, a jednostkę zamienić na jednostki jeszcze niższego rzędu.

Odejmowanie ułamków fizycznych ma zastosowanie tylko w astronomii. Wprawdzie zawsze należy odejmować liczbę mniejszą od większej, ale w obliczeniach astronomicznych może zdarzyć się wypadek, że odjemna jest mniejsza od odjemnika. Trzeba wówczas pamiętać, że ułamki fizyczne odpowiadają kątom okręgu, a więc do odjemnej wystarczy dodać jedno *signum commune* okręgu poprzedniego. Wprawdzie Król nie mówi o tym wyraźnie, ale łatwo się domyśleć, że wynik wypadnie wówczas w poprzednim znaku. Znak ujemny wyniku, który by się tu doskonale nadawał, został wprowadzony do algebry o wiele później.

O następnym z kolei działaniu, a mianowicie o podwajaniu, wspomina Król raczej tylko ze względu na tradycję, podkreślając wyraźnie, że sprowadza się ono do dodawania liczby do niej samej.

Więcej uwagi Król poświęca połowieniu, gdyż tu zmienia się albo licznik — gdy jest parzysty, albo mianownik — gdy licznik jest nieparzysty. W tym ostatnim wypadku przy połowieniu następuje podwajanie mianownika. Podobnie przy obliczaniu trzeciej, czwartej itd. części należałoby mianownik zwielokrotnić trzy, cztery itd. razy aż do nieskończoności.

W wypadku połowienia ułamków fizycznych autor zaleca zamienić je na jednostki takich rzędów, aby ułamek dał się zapisać za pomocą liczby całkowitej. Można by tego uniknąć, ale wówczas należałoby dzielić przez 2 kolejno od najwyższego rzędu do najniższego, stosując przy tym zamianę powstałej ewentualnie reszty na jednostki niższego rzędu.

A teraz Król zajmie się mnożeniem. Na początku zaznacza, że w mnożeniu biorą udział obie części ułamka. Być może, ma tu na myśli wnioski wyprowadzone przy obliczaniu ułamka z ułamka. Obie więc części ułamków przy ich mnożeniu powiększają się, ale powiększenie to ma różne znaczenie dla wartości ułamka. Tak więc przez mnożenie mianowników otrzymujemy mniejsze części, i to jest dla wartości iloczynu decydujące. Autor przytacza bardzo trafny przykład: mnożenia $1/2 \cdot 1/2$, co daje w wyniku $1/4$.

Przez interpretację każdej liczby jako iloczynu jedności przez tę liczbę Król przechodzi do traktowania mnożenia ułamków jako wyrażania proporcji. Gdybyśmy, stosując dzisiejszą symbolikę, nazwali szukany iloczyn literą x, to powyżej podany przykład można by zapisać tak:

$$1/2 : 1 = x : 1/2.$$

$1/2$ powstaje z jedności przez połowienie, a więc x powstanie z przepołowienia $1/2$. W tym celu najlepiej napisać, że $1/2 = 2/4$. Interpretację tę zaczerpnął Król z określenia mnożenia liczb całkowitych. Mnożenie jest u niego — czego zresztą wyraźnie nie formułuje — skróconym dodawaniem. Jeżeli utworzymy postęp arytmetyczny, w którym wyraz pierwszy i różnica są równe mnożnej, to iloczyn w takim postępie znajdzie się na miejscu, którego wskaźnik jest równy mnożnikowi. A więc — jak mówi Król — iloczyn o tyle jest oddalony (*distat*) od mnożnej, o ile mnożnik od jedności. Jeżeli zatem mnożną jest 15, a mnożnik wynosi 6, to iloczyn znajduje się na szóstym miejscu w postępie: 15, 2.15, 3.15, itd. Stąd proporcja [22]:

$$x : 15 = 6 : 1.$$

Czy identycznie Król rozumował, czy korzystał już z zależności wprost proporcjonalnej, do której prowadzą postępy arytmetyczne —

[22] Rozumowanie to przypomina tworzenie ciągu potęg, które stosował Archimedes w swoim *Liczypiasku* (*Psammites*): „Tworzę z liczby 10 liczby w taki sposób, że dla każdych dwóch trzecia jest oddalona o tyle miejsc od drugiej, o ile pierwsza od początku". U Króla „odległość" wyraża się stosunkiem liczb, u Archimedesa — różnicą wykładników.

trudno z całą pewnością orzec; proporcja dała mu jednak możność interpretacji geometrycznej, którą mógł zaczerpnąć od matematyków arabskich. Mianowicie: aby np. pomnożyć 2/4 przez 1/2, buduje się prostokąt (Król mówi o kwadracie; być może, uważa prostokąt za „długi kwadrat"). Jeden bok ma 4 jednostki, drugi 2. Prowadzimy linie z punktu 2 na dłuższym boku i z punktu 1 na krótszym boku. Kwadrat leżący u zbiegu tych linij da licznik, a kwadrat leżący na przeciwległym końcu prostokąta da mianownik.

Król posługuje się na rysunku w swoim *Algorytmie* literami (por. ryc. 6), co zaciemnia rysunek. Na ryc. 4 przedstawimy zatem tę samą interpretację graficzną mnożenia (przykład: 2/4·1/2), używając cyfr arabskich.

Za pomocą takiej interpretacji graficznej Król mógł objaśniać mnożenie dowolnych ułamków. Istotnie, autor zamyka to w postaci formuły, którą przytaczamy w swobodnym tłumaczeniu: „Aby pomnożyć dwa ułamki przez siebie budujemy prostokąt, którego boki zawierają odpowiednio tyle jednostek, ile wskazują mianowniki jednego i drugiego ułamka. Kwadrat zawierający licznik iloczynu otrzymamy prowadząc linie z punktów, odpowiadających licznikom obu ułamków na obu bokach. Kwadrat znajdujący się w przeciwległym wierzchołku prostokąta zawiera liczbę, która jest iloczynem mianowników".

Np. mnożenie 2/5·3/7 ilustruje nasz ryc. 5.

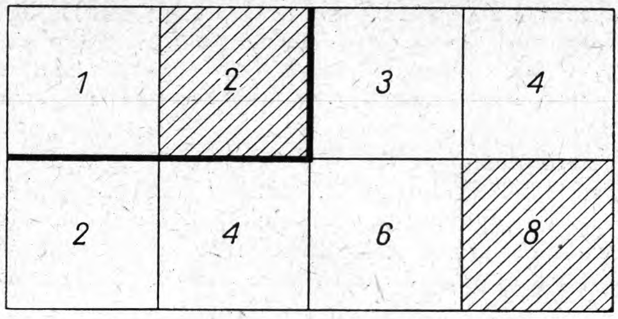
W dalszym ciągu omawia autor mnożenie sumy ułamków przez ułamek. Najpierw wykonuje się według znanej reguły dodawanie ułamków, a potem mnożenie. Iloczyny iloczynów ułamków oblicza się w ten sposób, że najpierw wyznacza się wartość poszczególnych iloczynów, a potem się je mnoży.

Dążność do pełnego wyczerpania omawianego tematu podsuwa Królowi nawet takie wypadki mnożenia, w których ułamki wyrażają się liczbami całkowitymi, w szczególności ułamki 1/1, ogólnie: a/a. Licznik tu wzrasta tyle razy, ile wskazuje licznik, a więc a razy; powoduje to a-krotny wzrost ułamka. Równocześnie wzrasta mianownik a razy, w wyniku czego nastąpi a-krotne zmniejszenie ułamka. W łącznym wyniku tych operacji wartość ułamka się nie zmieni. Tak zresztą — mówi Król — rozumują wszyscy arytmetycy.

Przy mnożeniu liczb mieszanych należy je zamienić na ułamki i postępować według podanych poprzednio reguł. Przy mnożeniu natomiast liczb całych przez ułamki należy stosować obliczanie ułamków z całości, względnie, uważając liczbę całą za ułamek o mianowniku równym jedności, postępować też wedle powyższych reguł.

Z kolei przystępuje Król do mnożenia ułamków fizycznych przez zwyczajne. Tutaj trzeba najpierw zamienić ułamki fizyczne, a więc sześćdziesiątkowe, na zwyczajne według uprzednio omówionych sposobów, a potem już mnożyć wedle znanych reguł.

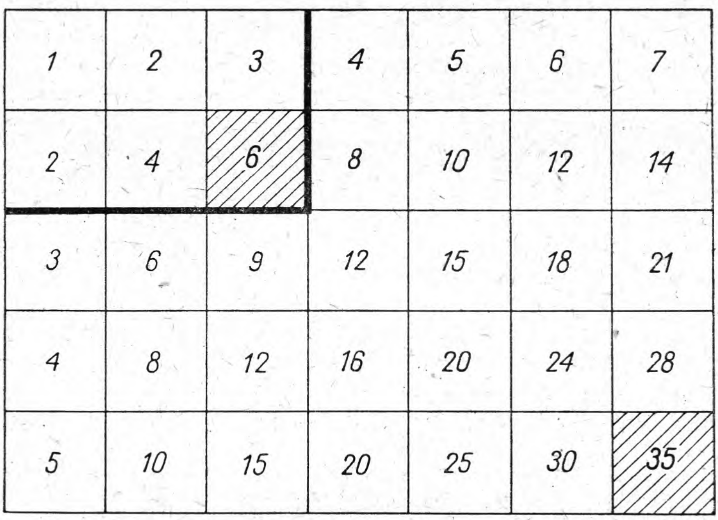
Niezwykle trafne i postępowe są reguły autora, dotyczące mnożenia ułamków fizycznych przez siebie. Król traktuje właściwie ułamek fizyczny jako iloraz liczby całkowitej przez odpowiednią potęgę liczby 60, jakkolwiek nie zapisuje tego w postaci ułamka zwyczajnego. Poleca po prostu czytelnikowi, aby takie przedstawienie ułamka sześćdziesiątkowego wyobraził sobie w myśli.



Ryc. 4. Przykład mnożenia ułamków metodą graficzną Marcina Króla: 2/4·1/2

Рис. 4. Пример умножения дробей с помощью графического метода Марцина Круля

Fig. 4. Multiplication of fractions graphically interpreted according to Król's method



Ryc. 5. Przykład mnożenia ułamków metodą graficzną Marcina Króla: 2/5·3/7

Рис. 5. Пример умножения дробей с помощью графического метода Марцина Круля

Fig. 5. Multiplication of fractions graphically interpreted according to Król's method

Oczywiście Król zakłada tu, zgodnie zresztą z tym, co mówił na początku traktatu — że ułamki fizyczne o różnych rzędach należy wyrazić w jednostkach najniższego rzędu. Mnożenie takich ułamków da się zrealizować w dwóch etapach: mnożenie liczb całkowitych; mnożenie potęg liczby 60. Król wie, że mnożenie potęg o jednakowych podstawach sprowadza się do dodawania wykładników. A więc jedna sekunda razy jedna sekunda równa się jedna kwarta, co należy rozumieć: $60^{-2} \cdot 60^{-2} = 60^{-4}$. Jedna sekunda razy jedna tercja tworzy jedną kwintę, to znaczy: $60^{-2} \cdot 60^{-3} = 60^{-5}$. Reguły te znajdą kiedyś znakomite zastosowanie, gdy ułamki sześćdziesiątkowe ustąpią miejsca liczbom dziesiętnym.

Mnożenie natomiast części „całkowitych", któremu — zgodnie z twierdzeniami drugiej księgi *Elementów* Euklidesa — towarzyszyć może zbudowanie odpowiedniego prostokąta albo kwadratu, radzi Król realizować sposobem, który jest mnożeniem „po przekątnej", a pochodzi, jak wiemy, od matematyków hinduskich [23].

Podrozdział o dzieleniu ułamków rozpoczyna się od stwierdzenia, że dzielenie jest działaniem odwrotnym w stosunku do mnożenia. Dla wykonania więc dzielenia należy odwrócić czynności, które były wykonane przy mnożeniu. Punktem wyjścia może być proporcja ustalona przy mnożeniu — z tym, że poszczególne jej wyrazy zmienią odpowiednio nazwę. A zatem iloczyn jest tu dzielną, mnożna — dzielnikiem, mnożnik — ilorazem.

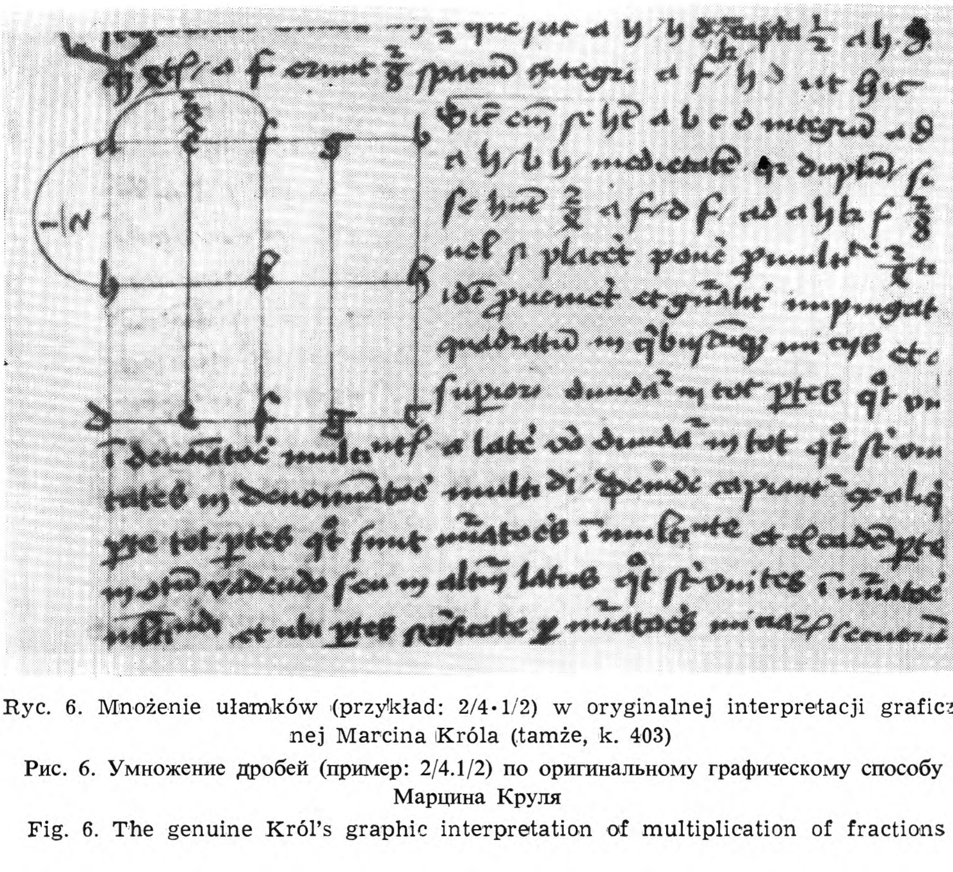
Odwracanie czynności wykonywanych przy mnożeniu można prowadzić aż do fazy interpretacji graficznej w postaci odpowiednich prostokątów, ale tylko wtedy, gdy i licznik, i mianownik dzielnej są większe od licznika i mianownika dzielnika. Przy dzieleniu np. 8/24 : 4/6 ostatnią liczbą prostokąta jest 24; ponieważ jednak bok stanowi 6 jednostek, to drugi — muszą stanowić 4 jednostki. Liczba odpowiadająca iloczynowi liczników wynosi 8; na boku o 6 jednostkach odcięto 2 jednostki, czyli na boku o 4 jednostkach musi się odciąć też 2 jednostki. Iloraz wynosi zatem 2/4.

Sposób ten zawodzi, gdy jest przeciwnie: licznik i mianownik dzielnej nie są większe od licznika i mianownika dzielnika. W takich wypadkach Król zaleca — dobitnie podkreślając, że nie stosował tego przy mnożeniu ułamków — sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika. Dzielenie polega wówczas na dzieleniu zmienionych liczników.

Następnie autor omawia dzielenie liczb mieszanych przez liczby mieszane. Po zamianie ich na ułamki stosuje się odpowiednio wyżej podane reguły.

W tym miejscu roztrząsania różnych wypadków dzielenia ułamków Król znajduje sposobność przejścia do ułamków o mianowniku równym jedności, czyli do dzielenia liczb całkowitych. Nie wprowadza nowego określenia dzielenia, tym niemniej traktuje ten problem jako — rozdzielanie. Jeżeli — powiada — liczba dzielona zawiera mniej jednostek niż liczba, przez którą dzielimy (mamy np. 5 chlebów i 7 osób), to trzeba każdą jednostkę dzieloną rozdzielić na tyle równych części, ile wskazuje dzielnik, i tych części wziąć tyle, ile wskazuje dzielna; jeżeli dzielna jest większa, to najpierw rozdzielamy całości, a resztę dopiero dzielimy według tego samego sposobu. Rozważanie takiego wypadku nie koliduje — jak łatwo stwierdzić — z określeniem ułamka

[23] Tradycja mnożenia „po przekątnej", zapoczątkowana przez Króla, przetrwała w Polsce aż do XVII w. Jeszcze u Brożka w jego *Arithmetica integrorum* z 1620 r. znajduje się przykład, który pokazujemy na ryc. 7.



Ryc. 6. Mnożenie ułamków (przykład: 2/4·1/2) w oryginalnej interpretacji graficznej Marcina Króla (tamże, k. 403)

Рис. 6. Умножение дробей (пример: 2/4.1/2) по оригинальному графическому способу Марцина Круля

Fig. 6. The genuine Król's graphic interpretation of multiplication of fractions


Caput VII. 59

ſtro, inter easdem diagonales quarum ſpacii numeros collegiſti. Quod ſi ex collectione duæ proueniant notæ, ſiniſtram ad ſequens diagonalium ſpacium reiicies, dextra collocata ſuo loco. Sed exẽplo res fiet manifeſtior.

Sint multiplicãda 3 5 6 7 8 4 *per* 4 7 0 1 9 6 *pono ſic; & multiplico ſecundum normam præſcriptam.*

Ryc. 7. Zalecane przez Marcina Króla mnożenie „po przekątnej" stosowano jeszcze w XVII w.: przykład z *Arithmetica integrorum* Jana Brożka (1620)

Рис. 7. Рекомендовавшийся Марцином Крулем метод умножения дробей „по диагонали". Этот способ применялся еще в XVII в.: пример из труда Яна Брожека *Arithmetica integrorum* (1620)

Fig. 7. An example of „diagonal" multiplication (XVIIth century) recommended by Król 200 years earlier

podanym przez autora na początku traktatu, a zawiera tylko pewnego rodzaju interpretację ułamka [24].

Przy dzieleniu ułamków sześćdziesiątkowych należy — wskazuje Król — oba ułamki wyrazić w częściach najniższego rzędu dla obydwu. Wówczas dzielenie sprowadzi się do dzielenia licznika przez licznik, a mianownika przez mianownik. Sposób ten wynika i z odpowiedniego potraktowania omawianej poprzednio proporcji, i z pojmowania dzielenia jako odwrotności mnożenia. Król nie mówi tu wprost o mnożeniu dzielnej przez odwrotność dzielnika, ale jest ono w jego sposobie zawarte. W dobranych przez autora przykładach wszędzie mianownik dzielnej daje się podzielić przez mianownik dzielnika; w innym wypadku należy — podaje autor — zamienić dzielną i dzielnik na jednostki jednakowych rzędów.

Trafne potraktowanie przez Króla dzielenia ułamków sześćdziesiątkowych znajdzie w dwa wieki później potwierdzenie w sposobie dzielenia liczb dziesiętnych, gdy dzielnik zawiera rzędy dziesiętne niższe niż dzielna. Trzeba wówczas, jak wiemy, sprowadzić dzielną do takich rzędów dziesiętnych, jakie zawiera dzielnik; dzielenie przez ułamek zastępuje się więc dzieleniem przez liczbę całkowitą. Podziwiać należy intuicję, która kazała Królowi zachować formę ułamków sześćdziesiątkowych nawet wtedy, kiedy prawidła działań na ułamkach zwyczajnych zdawały się definitywnie rozwiązywać to zagadnienie.

Teraz Król przechodzi w swoim traktacie do omówienia postępów. Z ułamków — twierdzi — nie można tworzyć postępu. Postęp jest bowiem u autora — a zapewne i u wielu jemu współczesnych — związany ze wzrostem wartości wyrazów, następującym bądź wskutek dodawania, bądź wskutek mnożenia przez pewną stałą liczbę (i to liczbę tylko dodatnią!). Ponieważ obie części ułamka, tzn. licznik i mianownik, są jednakowo ważne, należałoby te operacje stosować do obu części; ale wówczas, zwłaszcza przy mnożeniu, nie następuje zmiana wartości, a więc nie ma powiększania, czyli nie ma postępu. Tak by można rozumieć twierdzenie Króla, przez niego samego nie skomentowane.

Ze względu na wielką rolę wyciągania pierwiastków zarówno w astronomii, jak i w geometrii — rozpatruje autor to zagadnienie w osobnym rozdziale (*Tractatus tertius*).

Pierwiastek drugiego stopnia widzi Król wyłącznie jako bok kwadratu, którego pole wyraża się liczbą pierwiastkowaną. Gdy licznik i mianownik są kwadratami, to pierwiastek ułamka jest równy ułamkowi, którego licznik i mianownik są odpowiednio pierwiastkami tamtych. Również i wtedy, gdy licznik i mianownik nie są pełnymi kwadratami, ale niewiele się od kwadratów różnią, to pierwiastek takiego ułamka można z pewnym przybliżeniem zastąpić przez pierwiastek ułamka, którego licznik i mianownik są odpowiednimi pełnymi kwadratami.

---

[24] Dla praktycznego stosowania wstępne rozważania Króla są bardziej dogodne niż ostatnie. Przypomnijmy analogiczne potraktowanie ongi tego rodzaju podziału przez wyłącznie praktycznie nastawionych arytmetyków egipskich: według nich $5/7 = 1/2 + 1/7 + 1/14$. A więc Egipcjanin nie podzielił każdego z 5 bochenków na 7 części, bo musiałby wykonać 30 „krajań". Zamiast tego podzielił 4 bochenki na połowy i 7 osobom rozdał po połowie; jedna połowa mu została. Pozostały cały bochenek podzielił na 7 równych części i rozdał po takiej części, podobnie podzielił na 7 części i rozdał 7 osobom pozostałą połowę bochenka. W sumie wykonał zatem co najwyżej 16 „krajań".

Przy innym natomiast liczniku i mianowniku poleca autor stosować taki sposób szukania pierwiastka drugiego stopnia: zarówno mianownik, jak i licznik ułamka mnoży się przez mianownik i kwadrat dowolnej liczby; pierwiastek iloczynu mianownika pomnożonego przez siebie i przez kwadrat obranej liczby daje mianownik pierwiastka, licznik zaś pierwiastka będzie wówczas pierwiastkiem iloczynu licznika i mianownika pomnożonego przez kwadrat obranej liczby. Sposób ten wiąże się z przekonaniem autora, że operując dużymi liczbami, łatwiej otrzymać pierwiastek odznaczający się większym przybliżeniem. Oto reguła Króla w naszej aktualnej symbolice:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m n a^2}}{an}.$$

Król nie podaje rozumowania, które go doprowadziło do powyższej reguły, a stwierdza tylko, że zapewnia ona większą dokładność. Ilustruje to autor, niestety, na przykładzie pierwiastkowania ułamka 9/16, choć ułamek ten można pierwiastkować według reguły poprzedniej. Ciekawe, że Król tu — i w innych przykładach — za dowolną liczbę obiera 10; przeprowadzenie graficzne podziału na 10 równych części istotnie ułatwia odczytanie wyniku z większą dokładnością.

Przy pierwiastkowaniu ułamków fizycznych należy je zawsze zamieniać na jednostki rzędów parzystych i wyciągać pierwiastek z liczby całkowitej według reguły dla tych liczb; rząd natomiast otrzymamy przez przepołowienie rzędu liczby pierwiastkowanej. Gdy liczba ta nie jest pełnym kwadratem, pierwiastek jej oblicza się z przybliżeniem według sposobu podanego przez autora, posługującego się tu oczywiście wyłącznie zapisem sześćdziesiątkowym. Dość niejasno sformułowany w tym miejscu tekst Króla odtworzymy w takim oto ujęciu:

Pierwiastek z liczby 5 wyrażonej w sekundach daje 2 minuty i pozostaje jakiś ułamek. W naszej symbolice zapiszemy:

$$\sqrt{\frac{5}{60^2}} \sim \frac{2}{60} + \text{reszta.}$$

Król pisze ten pierwiastek: 2^m więcej B.

Ażeby znaleźć B, stosuje on drugą regułę, a za dowolną liczbę obiera 10. Liczba pierwiastkowana przyjmuje wtedy, w systemie sześćdziesiątkowym, wartość, którą aktualnie zapiszemy:

$$\frac{5 \cdot 60^2}{60^4}.$$

Jako wynik obliczenia pierwiastka Król zapisuje liczbę 22 wyrażoną w sekundach (być może, miał on do dyspozycji jakieś tablice) i podaje, że pierwsza cyfra 2 odpowiada poprzedniemu wynikowi, to jest 2^m; drugą cyfrę 2 autor mnoży przez 60 i z iloczynu 120 odrzuca zero, otrzymując w ten sposób 12 sekund — jest to poszukiwane B. Pierwiastek z 5 sekund z dokładnością do sekund wynosi zatem u Króla 2 minuty 12 sekund. Wynik jego różni się od poprawnego wyniku o mniej niż 3 sekundy.

Sposób swój usiłuje autor uzasadnić rysunkiem, ale i tu nie osiąga jasności. Nie wykluczone, że w zamierzonym objaśnieniu tej metody przy pomocy interpretacji graficznej chce on wykorzystać pitagorejskie gnomony, gdy z powierzchni odpowiadającej liczbie pierwiastkowanej, tj. 5 sekundom, usiłuje wykroić kwadrat o boku równym 2 minutom, resztę zaś zamienia na gnomon wyrażony w sześćdziesiątych częściach.

Należy zwrócić uwagę, że zapis Króla w powyżej przytoczonym przykładzie mógłby budzić wątpliwości. Bo jeżeli w samym założeniu każdy rząd może być wyrażony jakąkolwiek liczbą mniejszą od 60, to w każdym rzędzie może wypadać liczba dwucyfrowa, a więc zastępowanie rzędu jednym zerem wolno by uznać za niesłuszne. Król jednakże ma tu na myśli zerową wartość całej kolumny odpowiadającej danemu rzędowi. Taka niejednolitość zapisu liczby w systemie sześćdziesiątkowym datowała się od *Tablic* Ptolemeusza, bo przecież także posługując się znakowaniem jońskim, na oznaczenie liczby dwucyfrowej — z wyjątkiem dziesiątki — trzeba było użyć dwóch znaków, np. 12 = ιβ.

Wracając do toku wykładu, przy wyciąganiu pierwiastka stopnia trzeciego z ułamka radzi Król tak postępować, aby mianownik pierwiastka zgodził się z mianownikiem pierwiastkowanego ułamka. Łatwo to uzyskać, gdy licznik i mianownik rozszerzyć przez kwadrat mianownika. Licznik wówczas pierwiastkuje się wedle reguły dla trzeciego pierwiastka liczb całkowitych.

Autor zdaje sobie sprawę, że w wypadku, gdy licznik jest sześcianem, można by ułamka nie rozszerzać; przemawia za tym nawet interpretacja graficzna. Np. dla obliczenia $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ podaje on taką interpretację: bryła sześcienna składa się z 27 cząstek, a więc jej krawędź stanowią 3 cząstki; licznik ułamka wskazuje na to, że z tej bryły trzeba uzyskać sześcianik złożony z 8/27; przy jednej krawędzi ustawi się wówczas 2 takież cząstki, a więc $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ jest równy 2/3.

Mimo powyższego rozumowania autor popiera poprzedni sposób, a zatem:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{8.27^2}{27^3}} = \frac{2.3^2}{27} = \frac{18}{27}.$$

Sposób ten nie daje wyniku sprzecznego z interpretacją graficzną, gdyż stosunek 18/27 ma taki sam wykładnik jak 2/3.

Trudno sporządzić model dla interpretacji graficznej — powiada Król — można go sobie tylko wyobrazić, ale wątpliwe, czy to jest właściwe unaocznienie problemu. Jeżeli mimo to — podkreśla Król — ktoś na drodze wyobrażeniowej uzyska właściwy wynik, to wcale nie należy sądzić, jak to czyni jeden z poprzednich autorów [24a] traktatu o ułamkach, że wynik ten i tak jest fałszywy, i to dlatego jedynie, że różni się od ułamka pierwiastkowanego mianownikiem.

Ułamki sześćdziesiątkowe pierwiastkuje się jak liczby całkowite, tyle że dbać należy, aby ułamki te wyrażone były w jednostkach rzędu, z którego pierwiastek trzeci da się wyciągnąć, a więc w tercjach, sekstach, nonach itd. Trzeci pierwiastek tercji daje minuty, trzeci pierwiastek sekst — sekundy itd.

Wreszcie następuje ostatni w traktacie podrozdział: o proporcjach.

[24a] Król nie podaje tu nazwiska; ma na myśli — sądzę — wymienionego poprzednio w tekście „mistrza Jana" (de Lineriis).

Król omawia obszernie proporcje ciągłe znane z geometrii, w których bądź środkowe, bądź skrajne wyrazy powtarzają się, oraz rozważa proporcje nieciągłe, złożone z czterech różnych liczb. Zastosowanie proporcji widzi autor w praktyce, ale niestety, w podanych przez niego przykładach nie występują wielkości mierzalne.

Król omawia również proporcje powstające przez przestawienie wyrazów, sumowanie wyrazów, odejmowanie wyrazów itd. i nadaje tym proporcjom nazwy, które dzisiaj mają znaczenie tylko raczej historyczne, odpowiadają zaś wprowadzonym ongi nazwom greckim. Wymienia on pięć sposobów zmiany formy proporcji zaznaczając, że Anglicanus [25] odróżnia tylko cztery takie formy (którym również, jak i Król, nadaje nieaktualne dziś nazwy).

Podrozdział jest ciekawy nie tylko ze względu na zawartą treść, lecz także na oddźwięki literatury, z jaką autor zapoznał się w związku ze swoją problematyką. Prócz przytoczenia matematyka angielskiego odwołuje się Król zupełnie wyraźnie do Jordana Nemorariusa [26], a także cytuje dzieło Mikołaja Oresme [27], nie wymieniając jednakże imienia autora *De latitudinibus formarum.*

Na koniec szczególną uwagę zwrócimy na jeden z podanych przez Króla przykładów konkretnego stosowania proporcji, mianowicie stosowanie proporcji do przeliczeń położenia ciał niebieskich podanego według *Tablic alfonsyńskich* na położenie względem Krakowa. Dla celów ściśle obliczeniowych autor zestawia trzy reguły mówiąc, że wystarczyłaby jedna dla obliczenia któregokolwiek bądź z wyrazów proporcji, gdy dane są trzy pozostałe wyrazy. Przykład ten i komentarz do niego można uważać za zapowiedź krytyki *Tablic alfonsyńskich*, którą Król istot-

[25] Historia notuje dwóch matematyków, którzy mają przydomek Anglicanus. Obaj żyli prawie równocześnie ok. połowy XIII w. i obaj pozostawili rozprawy o podobnej treści. Pierwszy z nich, Robertus Anglicanus z Montpellier (Montepessulano), napisał ok. 1231 r. traktat o kwadracie geometrycznym. Z traktatem tym *Geometria praktyczna* Marcina Króla wykazuje wiele podobieństwa. Drugi matematyk, Guilelmus Anglicanus, opracował też ok. 1231 r. dziełko *De umbris*, poświęcone przyrządowi zbliżonemu do astrolabium, zwanemu *saphea*, a obmyślonemu przez astronoma arabskiego Arzahela. Trudno orzec, czy Król znał publikacje obu uczonych, ale traktat Roberta Anglicanusa musiał niewątpliwie czytać. O dwóch tych matematykach trzynastowiecznych pisze: P. Tannery, *Traité du quadrant du Maitre Robert Anglais.* „Bibliotheca Mathematica", seria 3, zesz. 6/1897.

[26] Jordanus Nemorarius (XIII w.), uczony dominikanin rodem z „lesistej" Turyngii (łac. *nemora* = gaje, lasy; stąd nazwisko), jest autorem traktatu *Algorismus demonstratus* (por.: G. Eneström. „Bibliotheca Mathematica", seria 3, zesz. 3/1904, ss. 9—14). Prócz tego traktatu przypisywane są Nemorariusowi jeszcze dwa: *Demonstratio magistri Jordani de Algorismo* i *Tractatus duo de numeris et de minutiis* (por.: G. Eneström, *Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius.* „Bibliotheca Mathematica", seria 3, zesz. 14/1914, ss. 41—54). Czy Król znał wszystkie te traktaty, czy tylko pierwszy — trudno orzec.

[27] Dzieło *De latitudinibus formarum,* dość rozpowszechnione na uniwersytetach w wiekach XIV i XV, zostało opracowane przez Mikołaja Oresme'a (XIV w.). W dziele autor zestawia pewne własności figur i z tego zestawienia wyprowadza zależności wprost proporcjonalne oraz inne zależności między odpowiednimi zmiennymi. Otrzymane zależności sugerują mu sporządzenie pewnego rodzaju prototypu ujęcia graficznego problemu matematycznego. Rozważania o zależnościach wprost proporcjonalnych m. in. występujące u Oresme'a przytacza Król jako przykład zastosowania proporcji. Oresme był autorem także dwóch innych traktatów: *Tractatus proportionum* i *Algorismus proportionum*; ostatni zawiera obszerne rozważania o ułamkach. Traktatów tych Król widocznie nie znał, skoro ich nie cytuje.

nie później przeprowadzi w traktacie *Summa super Tabulas Alphonsi*, pozostającym do dziś — jak i *Algorismus minutiarum* — w rękopisie [28].

Jak widać z przeglądu treści *Algorytmu*, wykład arytmetyki podany przez Króla nie jest elementarny. Wprost przeciwnie, znajduje się na wysokim poziomie teoretycznym, jakkolwiek traktuje o rzeczach prostych. Autor nie poprzestaje na omówieniu reguł działań na ułamkach i ich zmechanizowaniu. Stara się odnaleźć zarazem i podaje dla ułamków i dla operacji na nich podstawy teoretyczne. Reguły wypowiedziane przez autora mają charakter ogólny. Zamieszczone przykłady służą raczej tylko ich zilustrowaniu. Znaczny stopień uogólnienia uzyskuje Król m. in. dzięki temu, że w interpretacji graficznej posługuje się odcinkiem *ab*, o którego długości właściwie nic nie mówi.

Definicja ułamka, jaką podaje Król na początku traktatu, jest aktualna i dla ułamków zwyczajnych, i dla sześćdziesiątkowych, i nawet — jak mówi — dla żydowskich *elochim*. Wszystkie te ułamki różnią się między sobą pod względem formy zapisu, nie ma to jednak znaczenia merytorycznego. Ułamki sześćdziesiątkowe dają się z powodzeniem napisać w postaci ułamków zwyczajnych; zachowując ich formę uświęconą przez tradycję, czyni się też ustępstwo dla działań, które tradycja dla tych ułamków przyniosła, ale jest ono drobne, mało znaczące. Najbardziej przekonywającym argumentem za tym, że między ułamkami różnych rodzajów nie istnieje żadna zasadnicza różnica, jest możliwość dwojakiego sposobu wykonywania działań doprowadzających do równych wyników.

Król nie ogranicza się do podania wskazówek potrzebnych do przeliczania wartości odczytanych z tablic ułożonych w układzie sześćdziesiątkowym na wartości według tablic zestawionych w ułamkach zwyczajnych, ale chce przekonać czytelnika, i to mu się w zupełności udaje, że pod względem matematycznym nie ma istotnej różnicy między tymi tablicami.

Warto podkreślić, że rozważania arytmetyczne doprowadzają Króla także do ustalenia pewnych wytycznych do wykonania konstrukcji geometrycznej w wypadku np. konstrukcyjnego podziału okręgu na 360 części.

Jako interesującą do pewnego stopnia metodę, która kilkakrotnie w traktacie dochodzi do głosu, należałoby podnieść, że przez pewne przekształcenia występujących w działaniach ułamków Król sprowadza je do działań na liczbach całkowitych.

Nie udało się wprawdzie autorowi postawić we właściwym świetle zagadnienia postępów dla ułamków, ale z wyjątkiem tego, bodajże jednego, nieudanego problemu — wszystkie zagadnienia wchodzące w zakres arytmetyki rozwiązuje on bez zarzutu.

Można by zarzucić traktatowi brak np. problemu podzielności liczb, który jest potrzebny i do dodawania, i do odejmowania, i do upraszczania ułamków. W przykładach jednak, z którymi Król ma do czynienia, dodawanie i odejmowanie jest należycie wyjaśnione, a upraszczanie autor zastępuje obliczaniem wykładnika stosunku bez dokładniejszych

---

[28] BJ, rkps 1927, ss. 561—637, (por.: L. A. Birkenmajer, *Marcin Bylica* [...], s. 115). Traktat ten wyprzedza o lat 10 pokrewnej treści pismo Georgiusa Peurbacha *Novae theoricae planetarum*, powstałe w Wiedniu w 1460 r. Traktat Króla bywa opatrywany w naszych bibliografiach dwojakim tytułem: 1) *Correctiones Tabularum Alphonsi* (egzemplarz krakowski, BJ, rkps 1927) oraz 2) *Summa super Tabulas Alphonsi* (egzemplarz przy komentarzach Wojciecha z Brudzewa do *Teoryk* Peurbacha skopiowanych w 1488 r., Ossolineum, rkps 759, k. 45*r*).

zresztą objaśnień. Takie postawienie kwestii ułamka pozwala mu na wprowadzenie proporcji i zależności proporcjonalnej zarówno prostej, jak i odwrotnej do wielu zagadnień z ułamków.

Traktat *Algorismus minutiarum* nie tylko więc spełnił swoje zadanie: wyjaśnił słuchaczom istotę ułamka i zastąpił rozmaitość ułamków jednolitością ich pojmowania, ale także stworzył podstawę do dalszych teoretycznych badań w tej dziedzinie. Dlatego traktat cieszył się tak wielkim uznaniem u kolegów autora i jego uczniów, dlatego też budzi i dzisiaj podziw dla umiejętności opracowania ogólnego zagadnień szczegółowych.

ТРАКТАТ МАРЦИНА КРУЛЯ *ALGORISMUS MINUTIARUM*

Трактат Марцина Круля из Журавицы — магистра Ягеллонского университета, преподавателя математики на кафедре Стобнера — озаглавленный *Algorismus minutiarum* (1445), является первым в истории польской математической литературы произведением, написанным поляком. В отделе древних рукописей Ягеллонской библиотеки сохранились три копии этого сочинения (сигн. 1859, 1927, 1844).

Исследование трактата показало, что он отличается высоким теоретическим уровнем. В нем не только сформулированы и описаны правила математических действий, но также дан своеобразный синтез этих действий. Выведенные правила носят общий характер, но они проиллюстрированы примерами, которые помогают лучше понять эти правила. Серьезного обобщения своих исследований Марцин Круль добился прежде всего благодаря тому, что в графической интерпретации действий над дробями он использует элемент *ab*, не указывая, впрочем, его длины.

Формулировка дроби, приведенная в начале трактата, относится как к простой, так и к шестидесятиричной дроби, и даже — по его словам — к еврейским Элохим. Эти дроби отличаются между собой лишь формой записи. Поэтому с помощью небольших превращений можно легко переходить от одного вида дроби к другому. Таким образом, рассматриваемые в трактате правила математических действий относятся ко всем видам дробей, а стало быть, с математической точки зрения между отдельными видами дробей нет существенных различий. Автор с помощью простого способа сводит действие над дробями к действиям над целыми числами.

Графическая интерпретация, сделанная автором трактата для того, чтобы в более наглядной форме представить излагаемые действия, не уменьшает абстракции трактовки предмета. Рассуждения Марцина Круля не теряют теоретического характера даже тогда, когда он анализирует возможность использования действий над дробями в сходных конструкциях, например, для деления полной окружности на 360 равных частей. Марцин Круль не освещает в своей лекции проблемы делимости целых чисел, хотя он и останавливается несколько раз — не уточняя названия — на способах упрощения дробей.

Трактат Марцина Круля из Журавицы в доходчивой форме разъяснял студентам сущность дроби прежде всего потому, что вместо различных видов дробей в нем дан единый метод их толкования. Кроме того, это произведение создало базу для дальнейших теоретических исследований в этой отрасли математики.

ALGORISMUS MINUTIARUM BY MARCIN KRÓL

The treatise by Marcin Król of Przemyśl — master at the Jagiellon University and collegiate at Stobner's cathedra — entitled *Algorismus minutiarum* from the year 1445, this country's first mathematical work written by a Pole, has been preserved in triplicate in the manuscript collection of the Jagiellon Library (sig. 1859, 1927, 1844).

Examining the paper's contents testifies to its high theoretical standard. The author does not content himself with formulating the definitions and describing the laws of operations, but he conceives them in a logically coherent way. The laws deduced are of a general character and the examples illustrating them aim rather at their comprehension being made easier. Marcin Król achieves a considerable degree of generalization since he makes use — when graphically interpreting the operations with fractions — of a segment *ab*, the length of which he does not define.

The definition of the fraction given in the beginning of his treatise applies both to common and to sexagesimal fractions, and even — as he says himself — to the Jewish Elochim. The fractions differ only by the form of recording, and simple transformations make it easy to pass from one form to another. Consequently, the laws of operations given by the author apply to all types of fractions. From the mathematical point of view, there is no essential difference between the various forms of fractions. Through certain transformations, the author reduces the operations with fractions to the operations with integers.

The graphic interpretation he makes use of for visual presentation does not affect the abstractedness of his exposition. Nor does the theoretical character of his considerations undergo any change in consequence of his attention being concentrated on how to exploit the operations with fractions for approximate constructions, say, for the division of the circle's circumference into 360 equal parts. In his treatise, Marcin Król did not take into account the problem of the divisibility of integers, although — at some occasions — he discussed the simplification of fractions without, however, introducing that term.

The work in question did not only elucidate the nature of the fraction through replacing the diversity of fractional forms by the uniformity of understanding them, but it also laid down foundations for further theoretical research in this field.