Dianni, Jadwiga

Trygonometria w polskich pracach matematycznych do końca XIX wieku

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 19/2, 247-269

1974

Jadwiga Dianni

TRYGONOMETRIA W POLSKICH PRACACH MATEMATYCZNYCH DO KOŃCA XIX WIEKU

Trygonometria iest nayprzednieyszym żywiołem wszytkich geometrów i całą duszą ożywiającą wszytką machinę tey nauki

Rękopis Józefa Naronowicza Narońskiego z r. 1659.

WSTĘP

Zaczątki trygonometrii wiążą się z zagadnieniami starożytnego budownictwa oraz astronomii lub astrologii. Jeśli chodzi o budownictwo, to sięgnąć musimy do XVIII w. p.n.e., do zabytku egipskiego, tzw. *Papyrusu Ahmesa* [1]. W podanych tam obliczeniach odnoszących się do ostrosłupów występuje symbol „ŝķd" [3], określający stosunek dwóch wymiarów piramidy, mianowicie połowy głównej przekątnej do krawędzi bocznej, co odpowiadałoby naszej funkcji cosinus, lub — zdaniem niektórych uczonych — funkcji cotangens kąta stoku, tj. nachylenia ściany bocznej do podstawy. Wobec tego że nie znamy miar, jakimi się posługiwano, interpretacja tekstu Ahmesa może być różna. Obok „ŝķd" występują terminy *uchatebt* i *piremus*; oznaczają one prawdopodobnie miarę podstawy i wysokości; wedle objaśnień Ahmesa „ŝķd" odpowiadałby kątowi 52°, gdy za piremus weźmiemy krawędź podstawy bryły, a za *uchatebt* — przekątną kwadratowej podstawy, wówczas „ŝķd" byłby identyczny z cosinusem kąta, jaki krawędź piramidy tworzy z przekątną podstawy. Przy bardziej stromych ścianach grobowców egipskich „ŝķd" byłby tangensem kąta stoku. Niezależnie od tej czy innej interpretacji ten kąt jest stały przy niezmiennym „ŝķd", stąd musiał być ściśle zachowany przy układaniu ścian bocznych piramidy z odpowiednio uformowanych brył. W takiej „technicznej" trygonometrii określał egipski budowniczy ten stały stosunek terminem „seqt" [3].

Właściwa trygonometria jest dziełem matematyków i astronomów greckich. Tu na pierwszym miejscu należy wymienić Arystarcha z Samos (III w. p.n.e.), prekursora idei heliocentryzmu. Biorąc za podstawę własności trójkąta prostokątnego obliczył on stosunek odległości Ziemi od

---

[1] A. Eisenlohr: *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter „Papyrus Rhind" (British Museum).* Leipzig 1877; T. E. Peet: *The Rhind Mathematical Papyrus.* London 1923.

[2] A. Eisenlohr, jw., s. 125; T. E. Peet, jw., s. 98.

[3] O. Neugebauer: *Die Geometrie der aegyptischen mathematischen Texte.* W: *Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik.* Berlin 1931; L. Bernhardt: Zeitschrift für aegyptische Sprache und Altertumskunde. Leipzig 1893 s. 7 i nast.

Słońca i Księżyca, przy czym dla obserwacji wybrał okres, gdy Słońce, Księżyc i Ziemia tworzą wierzchołki trójkąta prostokątnego, a więc gdy połowa Księżyca jest oświetlona [4]. Mamy w tych rozważaniach zaczątek trygonometrii cięciw Badając stosunek łuków i cięciw, formułuje Arystarch twierdzenie, że wykładnik stosunku dwóch łuków jest większy, niż wykładnik stosunku odpowiadających cięciw [5].

Tego rodzaju zagadnieniami zajmował się szczegółowiej Hipparch z Nicei (Bitynia, II w. p.n.e.), jak również Menelaos z Aleksandrii (I w. n.e.), autor rozprawy *O cięciwach w kole*. Wspomina o tym Theon z Aleksandrii (IV w. n.e.) w komentarzu do *Almagestu* Ptolemeusza [6]. Jak podaje R. Wolf w swej *Geschichte der Astronomie*, wyniki swych obliczeń miał Hipparch zestawić w tabeli cięciw [7]. Rozprawy o cięciwach Hipparcha i Menelaosa zaginęły, zachowało się natomiast dzieło Menelaosa w trzech księgach, omawiające zagadnienia sferyki i trygonometrii sferycznej. Nie jest to jednak oryginał grecki, lecz wersja arabska i hebrajska oraz łacińskie tłumaczenie [8]. Jest to najstarsze dziś znane źródło trygonometrii sferycznej, stanowiące uniezależniony od dawnej „sferyki stereometrycznej" [9] pełny traktat trygonometrii sferycznej, obejmujący prócz własnych twierdzeń Menelaosa także osiągnięcia Hipparcha.

Rozważając w trygonometrii zależności boków i kątów trójkąta wprowadzamy funkcję sinus. Matematycy i astronomie greccy brali pod uwagę stosunek cięciwy do podwojonego kąta środkowego w kole. Ze zmianą wielkości tego kąta zmienia się długość cięciwy. Te właśnie obliczenia zawierały wspomniane wyżej tablice Hipparcha. Grecka trygonometria cięciw różniła się tylko formą od dzisiejszej trygonometrii sinusów. Wprawdzie — jak wspomnieliśmy — obliczenia Hipparcha i Menelaosa nie zachowały się, ale w *Sferyce* Menelaosa znajdujemy ważny szczegół: po raz pierwszy podane jest dokładne określenie cięciwy jako funkcji kąta środkowego w kole *chorda sive subtensa dupli arcui* [10]. Z tego podstawowego pojęcia wyprowadza Menelaos szereg ważnych twierdzeń odnoszących się do trójkątów sferycznych; niektóre z nich noszą do dziś nazwę „twierdzeń Menelaosa" [11]. Na „twierdzeniu Menelaosa o poprzecznych" oparł Ptolemeusz swe wywody trygonometryczne.

---

[4] Por. Περὶ μελεθῶν καὶ ἀποστηλμάτων ἡλίου καὶ σελήνης (*O wielkości i odległości Słońca i Księżyca*); A. N o k k e: *Programm des Freiburger Lyceum 1854;* E. N i z z e: *Program des Stralsundes Gymnasium 1856.*

[5] Twierdzenie o udowodnił dopiero Klaudiusz Ptolemeusz. Por. *Opera quae exstant omnia.* T. 1. Leipzig 1898 s. 43—44.

[6] „Przypisujemy Hipparchowi rozprawę w dwóch księgach »O cięciwach w kole«, a także Menelaosowi w sześciu księgach, por. *Commentaire de Theon sur le premiére livre de la composition mathematique de Ptolomée.* T. 1. Paris 1821 s. 130.

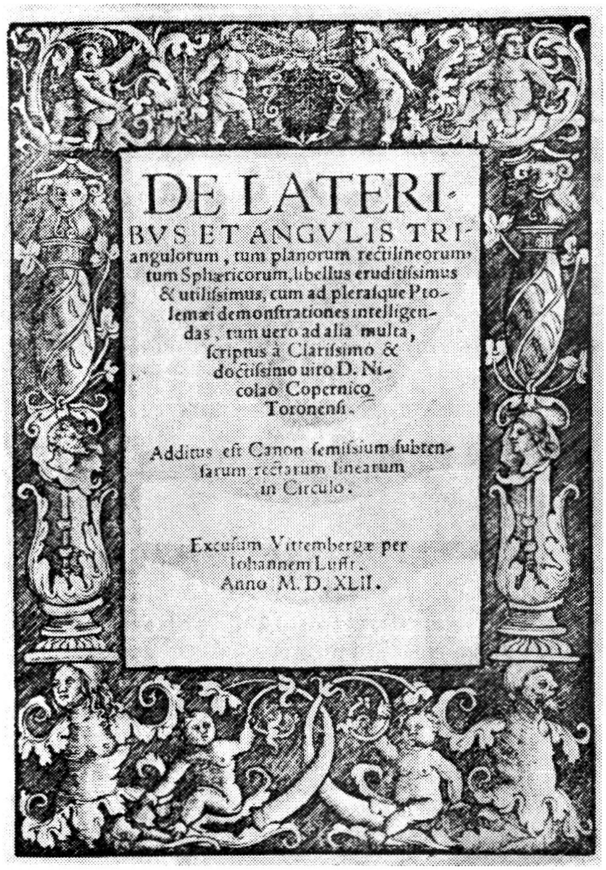
[7] R. W o l f: *Geschichte der Astronomie.* München 1877 s. 11.

[8] *Theodosii sphaericorum librii III et Menelai sphaericorum libri III.* Oxford 1758.

[9] Przedstawicielami tej najstarszej, ściśle z astronomią związanej sferyki są: A n t o l y k o s z Pitane (IV w. p.n.e.) autor rozprawy: περὶ κινουμένης σφαίρας (*De sphaera quae movetur liber,* Lipsk 1863) — najstarszy zachowany traktat greckiej literatury matematycznej; E u k l i d e s: *Phainomena.* Oxoniae 1703 s. 556—597; T h e o d o s i u s z Bitynii (por. przyp. 8) oraz E u d o k s o s z Knidos (V—IV w. p.n.e.). W rozumowaniach tych uczonych brak twierdzeń o trójkątach sferycznych; są tu uwzględnione tylko problemy związane z astronomią, przy czym wyróżnić się dają dwie metody badań, jedna oparta na konstrukcjach geometrycznych przez rzuty figur sferycznych na trzy płaszczyzny (tu widać wpływ matematyki egipskiej), druga rachunkowa, pochodzenia babilońskiego.

[10] Termin ten dotarł do Grecji prawdopodobnie od astronomów babilońskich.

[11] A. B r a u n m ü h l: *Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie.* T. 1. Leipzig 1900 s. 18.


DE LATERI-
BVS ET ANGVLIS TRI-
angulorum, tum planorum rectilineorum,
tum Sphaericorum, libellus eruditissimus
& utilissimus, cum ad pleraque Pto-
lemaei demonstrationes intelligen-
das, tum uero ad alia multa,
scriptus à Clarissimo &
doctissimo uiro D. Ni-
colao Copernico
Toronensi.

Additus est Canon semissium subten-
sarum rectarum linearum
in Circulo.

Excusum Vittembergae per
Iohannem Lufft.
Anno M. D. XLII.

Ryc. 1. Karta tytułowa *Trygonometrii* M. Kopernika (Bibl. Jag., Cim. 5103).
Рис. 1. Титульный листок *Тригономерии* М. Коперника (Ягел. библ.)
Phot. 1. La feuille de titre de *Trigonométrie* de Copernic (Bibl. Jag., Cim. 5103)

Pełny wgląd w grecką trygonometrię daje nam dzieło Ptolemeusza (II w. n.e.) Μαθηματικὴ σύνταξις[12], będące syntezą badań poprzedników wielkiego astronoma wzbogaconą jego własnymi odkryciami. Dzieło to pod nadanym mu przez astronomów arabskich tytułem *Almagest* było przez wiele wieków podstawą nauki o trójkątach, a więc trygonometrii.

W jakich jednostkach obliczał Hipparch cięciwy, oczywiście nie wiemy, ale obliczenia Ptolemeusza pozwalają na wysunięcie pewnych wniosków. Przez podział średnicy koła na 120 części (μοιραὶ), dzielonych następnie w układzie 60-kowym na ἑξηκοστὰ πρῶτα καὶ δευτεφὰ otrzymuje się odcinki, z których wyznacza się długości cięciw. Tu nadmieniamy, że podobnie jak termin *chorda,* rachunek sześćdziesiątkowy stosowany przez astronomów greckich jest pochodzenia babilońskiego.

Pierwsza księga *Almagestu* zawiera tabelę cięciw i jej zastosowania w odniesieniu do trójkątów.

---

[12] K. Ptolemeusz: *Opera quae exstant omnia,* jw., s. 30.

Z innych pism Ptolemeusza na uwagę zasługuje roprawa Περὶ ἀναλήμματος (*De annalemate*) [13], w której zagadnienia trygonometrii sferycznej rozwiązywane są rachunkiem oraz konstrukcyjnie [14]. Jako ważny szczegół podkreślić należy, że w niektórych obliczeniach bierze Ptolemeusz pod uwagę połówki cięciw, a więc jest bliski trygonometrii sinusów, pojęcia tego jednak szerzej nie rozwija [15]. W rozważaniach swych wykorzystuje w pełni twierdzenia Menelaosa, stosujące dwie wyżej wymienione metody rachunku i konstrukcji. Rozwiązując np. trójkąt ukośnokątny, gdy dane są dwa boki i kąt między nimi zawarty, stosuje rzut ortograficzny. W późniejszej rozprawie *Planispherium* stosuje rzut stereograficzny [16].

W rozwoju trygonometrii ważną rolę odegrali matematycy i astronomowie hinduscy. Aryabhatta (V w. n.e.) [17] pierwszy wprowadza trygonometrię sinusów. Wprawdzie jej ślady znajdujemy w pracach Ptolemeusza, ale nie jest ona tam systematycznie rozważana. Brak źródeł historycznych dla astronomii greckiej nie pozwala stwierdzić, czy odkrycia uczonego hinduskiego są oryginalne, czy oparł się on na powstałej wcześniej — przed jego dziełem astronomicznym *Ganita* — trygonometrii sinusów. Aryabhatta podaje tablicę sinusów w odstępach co $3^1/_2°$, której wartości późniejszy matematyk hinduski, Bhaskara (XII w.) [18] dokładniej obliczył co 1°. Astronom Varaha Mihira (VI w.) w swym dziele *Pancha Siddhantika* [19] zestawił znane wówczas systemy astronomiczne (*Siddhantas*), m.in. objaśnia tam *Pulisa Siddhanta*, system oparty na trygonometrii sinusów. Imię „Pulisa" odnosi się do astronoma aleksandryjskiego Paulusa (IV w. n.e.) [20], co uzasadniałoby przypuszczenie, że ojczyzną trygonometrii sinusów jest Aleksandria.

Z syntezy trygonometrii greckiej i hinduskiej rozwinęła się trygonometria, szeroko rozbudowana przez matematyków arabskich. Niemałą rolę, jeśli chodzi o zastosowanie trygonometrii do astronomii, odegrało tu podłoże religijne. Każdy bowiem muzułmanin modląc się musiał zwracać twarz w kierunku Mekki, a wyznaczenie tego *Quibla* dla każdego miejsca podawano w rachunku astronomicznym. Uczony Muhammad Ibn Musa Alhwarazmi (IX w.) opracował ok. roku 820 tablicę sinusów [21], zaś Ahmed Ibn Abdullah Alhasib obliczył w *Kitab* wartości funkcji tangens i cotangens. Albatan (Albategnus, IX w) jest autorem dzieła *O ruchach gwiazd*, które przechowało się do naszych czasów w tłumaczeniu łacińskim Platona

---

[13] L. Heiberg: *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. Suppl. 40, Leipzig 1895 s. 1 i nast.; A. Braunmühl: Vorlesungen... jw., s. 11 i nast.

[14] M. Zacharias: *Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften*, t. 3 s. 1042 i nast. Objaśniona jest tu konstrukcja rzutów stereograficznych.

[15] A. Braunmühl: *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie*. W: *Abhandlungen der Leopoldinisch Carolinischen Akademie*. T. 71. Halle 1897 s. 8 i nast.

[16] S. Haller: *Beitrag zur Geschichte der konstruktiven Auflösung sphaerischer Dreiecke durch stereographische Projektion*. „Biblioteca Mathematica" 1896 t. 13 s. 71—80.

[17] S. Rodet: *Leçons de calcul d'Aryabhatta*. Paris 1879 s. 13.

[18] H. Colebrooke: *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara*. London 1817.

[19] Wydał Thibaut, Benares 1889.

[20] Zachowało się tylko jedno jego pismo astronomiczne Εἰσαγωγή εἰς τήν ἀποτελεσματικήν. Wydał A. Schatton, Würtenberga 1586.

[21] Wydał A. Björnbo, *Alhwarazmi Trigonometrische Tavler*. København 1909 s. 117 i nast.

z Ticoli (XII w.) pt. *De motu stellarum* [22]. W dziele tym jest podkreślona wyraźnie wyższość metody sinusów nad trygonometrią cięciw. Obok funkcji sinus wprowadza Albategnus *sinus complementi, sinus versus* oraz tangens i cotangens. Matematykowi temu zawdzięczamy wyprowadzenie ważnych twierdzeń trygonometrii kulistej.

Abulwafa (X w.) w zagadnieniach odnoszących się do trójkątów sferycznych podaje systematyczne zestawienie zasadniczych twierdzeń trygonometrycznych wraz z dowodami. Prace matematyków arabskich odegrały ważną rolę w historii trygonometrii, podane bowiem przez nich tablice odznaczają się dużą dokłanością. Np. Ibn Junius (XIII w.) ułożył tablice funkcji z dokładnością do 7 miejsc dziesiętnych [23], Uług Beg obliczył je z jeszcze większą dokładnością do 11 miejsc dziesiętnych.

Na XI wiek przypada działalność matematyka i astronoma Gebera Ibn Aflah z Sewilli, który w I ks. swego dzieła astronomicznego [24] podaje wykład o sposobach rozwiązywania trójkątów prostokątnych.

Szczytowym osiągnięciem trygonometrii arabskiej jest twórczość astronoma Nasir Eddin Altusi (XIII w.), autora dzieła *Schakl al Katta* [25]. Podkreślając wyższość „nowej" trygonometrii sinusów od „starożytnej" Greków, przedstawia uczony arabski historyczny rozwój tej dyscypliny, od Menelaosa począwszy, i to powiększa wartość tego dzieła, które stanowi pełny wykład trygonometrii płaskiej jako dziedziny matematyki uniezależnionej od astronomii. Wprawdzie autor wychodzi w swych wywodach z greckiej trygonometrii cięciw w odniesieniu do trójkątów prostokątnych ,ale trójkąty ukośnokątne rozwiązuje z zastosowaniem twierdzenia sinusów do poszczególnych przypadków.

Znaczenie trygonometrii arabskiej wynika nie tylko z rozważań funkcji trygonometrycznych jako stosunków, ale przede wszystkim z faktu, że twierdzenia wyprowadzone przez Greków drogą geometryczną mają u matematyków arabskich charakter algebraiczny.

Wśród matematyków europejskich średniowiecza pierwsze miejsce zajmuje Regionmontanus, kontynuator prac swego nauczyciela, Peurbacha, któremu śmierć nie pozwoliła ukończyć opracowania tablic trygonometrycznych *Nova Tabula sinum de decem minutis in decem per multas milionariae partes.* Dotychczasowe tablice Greków i Arabów podawały wartość funkcji trygonometrycznych w funkcji promienia koła, dla którego przyjmowano podział sześćdziesiątkowy. Peurbach nie wprowadził wprawdzie podziału dziesiątkowego, ale przyjmuje promień równy 600 000 części, podając funkcję sinus co każde 10 minut. Tablice jego uzupełnił Regiomontanus, zakładając r = 6 000 000, a potem 10 000 000 i obliczając sinus dla każdej minuty. Tablice te wyszły drukiem pt. *Tractatus Georgii Peurbachi super propositiones Ptolomaei de sinubus et chordis* (Norymberga 1541).

---

[22] Wydane ze spuścizny po Regiomontanie przez Melanchtona *Rudimenta astronomiae Alfragani item Albategnus astronomus peritissimus »De motu stallarum« et addit Joannes de Regiomonte.* Nürnberg 1537. Późniejsze wydanie: *Mahometis Albateni De scientia stellarum liber unus cum aliq. Addit. Joannis de Regiomonte ex Bibliotheca Vaticana transcriptus.* Boloniae 1647; wydanie najnowsze C. A. Nalino: *Al Batanis Opus astronomicum.* Milano 1903.

[23] C. Schoy: *Die Gnomonik der Araber.* Berlin 1923 s. 87.

[24] *Geberi filii Aflah Hispalensis de astronomia libri IX.* Norimberga 1534.

[25] Tłumaczenie francuskie *Traité de quadrilatéree attribué a Nasir Eddin Al Toussy,* dokonane przez A. P. Caratheodory, Konstantynopol 1891; A. Braunmühl: *Nasir Eddin Altusi und Regiomontan.* W: *Abhandlungen Leopoldinischer Akademie.* Halle 1897 s. 36.

Ryc. 2. Karta tytułowa *Trygonometrii* J. Tońskiego
Рис. 2. Титульный листок *Тригонометрии* Я. Тоньского
Phot. 2. La feuille de titre de *Trigonométrie* de Toński

Regiomontanus jest autorem ważnego w historii trygonometrii dzieła *De triangulis omnimodis libri quinque* (Norymberga 1535). Autor znał dobrze trygonometrię Ptolemeusza i arabską, ale dzieło jego zarówno pod względem treści jak i wskazań dydaktycznych jest w pełni samodzielne, toteż stało się punktem wyjścia dalszego rozwoju trygonometrii płaskiej i sferycznej. Zgodnie z poglądem Peurbacha Regiomontanus uważa trygonometrię za dyscyplinę niezależną od astronomii i w tym rozumieniu rozważa jej podstawowe twierdzenia. W ks. I jest mowa o trójkątach prostokątnych i ukośnokątnych sprowadzanych do prostokątnych, w ks. II jest podane twierdzenie sinusów, w ks. III — trygonometria kulista i tu widać wpływ *Sferyki* Menelaosa. W ks. IV rozważane są trójkąty kuliste, a w ks. V — zastosowanie trygonometrii do zagadnień. Przy rozwiązywaniu trójkątów Regiomontanus pierwszy podał wzór na obliczenie powierzchni trójkąta: $p = \frac{1}{2}\, b\, c \sin \alpha$. Śmierć autora w 1473 r. uniemożliwiła mu wprowadzenie pewnych uzupełnień, o których znajdujemy tylko wzmianki w wymienionym dziele [26]. Rękopis po śmierci Regiomontana pozostał w przechowaniu u patrycjusza norymberskiego Waltera i dopiero po jego śmierci w 1504 r. dostał się do rąk Jana Ernera, który jako biegły matematyk ocenił w pełni jego wartość, zwłaszcza w tych zastosowaniach, które wiążą się z trygonometrią sferyczną. Tą dziedziną bowiem szczególnie się interesował ze względu na swe badania astronomiczne i geograficzne.

Jeśli chodzi o twórczość w dziedzinie trygonometrii matematyka francuskiego Viety, to w dążności do uogólnienia twierdzeń przy rozwiązywaniu trójkąta kulistego, w którym dane są trzy boki, wyprowadza dwa wzory analityczne, obejmujące wszystkie przypadki rozwiązywania trójkątów kulistych. Do odkryć Viety powrócimy jeszcze przy omawianiu goniometrii.

Śledząc dalszy rozwój trygonometrii możemy stwierdzić, że równocześnie z rozszerzaniem się treści tej dyscypliny kształtowała się jej symbolika, w ścisłym zresztą związku z ustalaniem się symboliki algebraicznej. Twierdzenia trygonometryczne udowadniano drogą rachunkową. Stosował je systematycznie T. Mayer w *Specimen Trigonometriae* (Getynga 1775), wyprowadzał on również drogą analityczną analogie Nepera.

Duże znaczenie miały prace Eulera, który wprowadził na miejsce funkcji trygonometrycznych wartości czysto algebraiczne. W związku z tym analitycznym ujęciem rozwijał funkcje trygonometryczne na szeregi, dzięki czemu wskazał nowe drogi badania tych funkcji. Tematyce tej poświęcił sporo rozpraw [27]. Eulerowi zawdzięczamy również udoskonalenie symboliki. W dotychczasowych wywodach trygonometrycznych ujętych słownie funkcje trygonometryczne oznaczano wielkimi literami alfabetu łacińskiego, tak że w przekształceniach zacierała się różnica między funkcjami kąta a bokami trójkąta. Euler usunął tę niezgodność, wprowadzając systematycznie litery alafetu greckiego, a więc: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Boki trójkąta oznaczał literami a, b, c odpowiednio do przeciwległych kątów α, β, γ.

Dalszy postęp przynoszą prace matematyków XVIII i XIX wieku. Lagrange w *Mémoires sur la trigonométrie sphérique* wyprowadza wzory trygonometrii kulistej, Cagnoli w *Trigonometria plana e sferica* (Paryż 1786) podaje wzory obejmujące związki między elementami trójkąta sferycznego, zwane dziś „wzorami Cagnolego".

Z roku 1782 pochodzi podręcznik Pfleiderera *Ebene Trigonometrie,* zawierający, obok wykładu trygonometrii, cenne uwagi historyczne. Pfleiderer był dyrektorem i nauczycielem matematyki w warszawskim Korpusie Kadetów.

Rozszerzoną trygonometrią jest tetragonometria oraz poligonometria, którą zajmowali się m.in. Lambert, Mayer, Lexell oraz Lhuillier w publikacji *Polygenométrie ou de la mesure des figures rectilignes* (Paryż 1789).

Przechodząc do zagadnień goniometrii [28] podkreślić należy pewną analogię ukształtowania się trygonometrii (uniezależnionej od astronomii)

---

[26] A. Braunmühl: *Beiträge zur Geschichte...* jw., 127—132.

[27] *Subsidium calculi sinuum.* W: *Acta Academiae Petropolitanae* 1760 s. 160; *Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata.* W: *Acta Academiae Petropolitanae* t. 1 1779 s. 72—86; *La Géometrie spherique tirée de la methode des plus grands et plus petits.* Berlin 1753 s. 223 i nast.

[28] Termin ten pojawia się po raz pierwszy w 1724 r. u Th. F. de Lagny. Podkreśla jego znaczenie G. A. Dazet: *Anfangsgründe der Goniometrie oder analytische Trigonometrie mit Polygonometrie.* München 1800.

z goniometrią (wydzieloną z trygonometrii). Tak jak tam w powolnym procesie wyodrębniania się dochodzi trygonometria do punktu szczytowego w dziele Regiomontana, tak i goniometria uniezależnia się od trygonometrii. Jej właściwym twórcą jest Vieta, bo chociaż ślady takich związków znaleźć można w dziełach Ptolemeusza i u matematyków arabskich, to te rozważania mają tam charakter raczej pomocniczy przy obliczaniu tablic trygonometrycznych. Pełne zrozumienie znaczenia goniometrii znajdujemy dopiero w rozprawach Viety, który tym tematem obszernie się zajmował, głównie z *Francisci Vietaei universalium inspectionum ad caconem mathematicum liber singularis* (Paryż 1579), oraz w *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* (1593, jedyna księga zachowana z tego zbioru rozpraw). Matematykowi temu zawdzięczamy również wyprowadzenie wzorów na sumę i różnicę kątów, kątów podwojonych oraz połówek kątów. Zagadnieniami goniometrii zajmowali się również matematycy XVII i XVIII w., a w XIX w. bogactwo tych formuł osiąga punkt szczytowy. F. F. Schweins np. podaje 781 wzorów goniometrycznych[29]. W związku z tymi badaniami rozwijała się teoria równań goniometrycznych. Problem graficznego przedstawienia, a więc wykresu krzywych odpowiadających funkcjom trygonometrycznym, zyskał trwałą podstawę z chwilą ukazania się w 1637 *Géometrie* Descartes'a, twórcy geometrii analitycznej. Odkrycia jego wykorzystali dla zbadania własności sinusoidy, tangensoidy i innych krzywych trygonometrycznych matematycy XVII i XVIII w., m.in. Barrow, Roberval, Faber, Gregory.

O zagadnieniu łączącym się z goniometrią, mianowicie o tzw. „prostaferezie" będzie mowa w następnym rozdziale.

TRYGONOMETRIA W POLSKIM PIŚMIENNICTWIE MATEMATYCZNYM

Aby odpowiedzieć na pytanie, kiedy i w jakim ujęciu zaczęto u nas w Polsce zajmować się trygonometrią, musimy — jak i w innych zresztą dyscyplinach — sięgnąć do zbiorów rękopiśmiennych.

Trygonometria początkowo nie stanowiła i u nas odrębnego przedmiotu badań ani nauczania, jak wynika to np. ze spisu wykładów w *Liber diligentiarum*. Przy objaśnianiu jednak tekstów astronomicznych zawartych w *Theoricae planetarum, Tabulae resolutae* czy wreszcie owych dominujących w astronomii średniowiecza tablicach Alfonsyńskich musiano wprowadzać elementy trygonometrii. Były one niezbędne również przy posługiwaniu się instrumentami astronomicznymi, jak dowiadujemy się z wykładu zapisanego w *Liber diligentarium* pt. *Canon astrolabi*. Matematykom krakowskim nieobca była trygonometria sinusów już na przełomie XIV—XV w. chociaż niewątpliwie posługiwali się w swych obliczeniach i grecką trygonometrią cięciw, objaśnianą wedle tekstu Ptolemeusza na wydziale artium. Ta wczesna trygonometria sinusów ma i u nas charakterystyczną terminologię, a więc *sinus versus, umbra recta* (tangens), *umbra versa* (cotangens)[30]. Niektóre z XV-wiecznych traktatów Marcina Króla z Żurawicy *Summa super Tabulas Alfonsii* zawierają rozważania oparte na trygonometrii sinusów[31]. Stwierdzając niezgodność podanych w tabli-

---

[29] F. F. Schweins: *Geometrie nach einem neuen Plan gearbeitet*. Göttingen 1808 s. 22—41.

[30] Biblioteka Jagiellońska rkp. 864.

[31] BJ rkp. 1927, s. 561—638 oraz Cod. Ossol. 76945 przy kopii *Komentarza Wojciecha z Brudzewa do Teoryk Peurbacha*.

cach Alfonsyńskich obliczeń położenia ciał niebieskich z rzeczywistym stanem nieba, chciał Marcin Król poprawić układ tablic, nie zdając sobie sprawy, iż uzgodnienie takie było niemożliwe w systemie geocentrycznym. Z treści traktatu można poznać, że autor znał dzieła matematyków arabskich, powołuje się bowiem na tezy Albataniego i Gebera, którego dzieło astronomiczne w tłumaczeniu łacińskim Gerarda z Cremony znane było w Polsce już w połowie XV w.

Ważną rolę w dalszym rozwoju trygonometrii w Polsce odegrał Marcin Bylica z Olkusza, lekarz i astrolog króla węgierskiego Macieja Korwina. W czasie pobytu na Węgrzech wszedł w bliski kontakt z przebywającym tam wówczas Regiomontanem i obaj uczeni (ok. 1467 r.) ułożyli tablice wydane w Norymberdze w 1474 r. pt. *Tabulae directionum profectionumque Magistri Joannni de Regiomonte in aetivatibus multum utiles.* Wbrew tytułowi, sugerującemu treść astrologiczną, traktat ten jest wykładem trygonometrii sferycznej, omawiającym szczegółowo rozwiązywanie trójkątów. O współpracy Bylicy świadczy zapisek Brożka w jednym z rękopisów Biblioteki Jagiellońskiej [32]. Traktat ten był wielokrotnie objaśniany i komentowany przez naszych uczonych, m.in. przez Michała z Wrocławia [33] oraz Wojciecha z Brudzewa [34]. Wśród zapisków pochodzących sprzed 1490 r. znajduje się na wklejonej karcie obliczenie trygonometryczne z użyciem funkcji sinus.

O tym, że w XV w. zajmowano się trygonometrią w ośrodku krakowskim, świadczą i inne zapiski. W rękopisie z końca XV w., w kopii traktatu astronomicznego *Tabulae resolutae* Wojciecha z Brudzewa, kilkakrotnie pojawiają się zastosowania tablic trygonometrycznych. W kodeksie 600 z 1468 r. (s. 251—268) znajdują się siedmiocyfrowe tablice sinusów. W *Almanachu* Stifla czytamy zapisek trygonometryczny Leonida z Dobczyc [35].

Wiek XVI jest dla historii polskiej trygonometrii o tyle ważny, że wychodzi drugiem traktat Kopernika *De lateribus et angulis triangulorum,* wydany w 1542 r. w Wirtemberdze. Zawarta w nim trygonometria weszła później do dzieła *O obrotach* jako rozdziały 12, 13 i 14, po raz pierwszy w naszej historii matematyki samodzielna trygonometria. Podstaw wiedzy w tej dziedzinie nabył Kopernik podczas studiów w Akademii Krakowskiej w latach 1491—1495, przy czym ważną wskazówką jest zbiór książek o tej tematyce, które były w jego posiadaniu częściowo już podczas studiów w Krakowie, mianowicie tablice Alfonsyńskie *Tabulae directionum* Regiomontana, *Epitome Joannis de Monteregio in Almagesti Ptolomaei* (wyd. weneckie z 1496 r. było w rękach Kopernika już w 1497 r.). Wśród zapisków, jakie znajdują się w egzemplarzach tych dzieł, na szczególną uwagę zasługuje tablica secansów, opatrzona nazwą „ ὑποτεινούσα"; przy przedstawianiu bowiem funkcji trygonometrycznych w kole secans jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym, którego jedną przyprostokątną jest promień koła, drugą — tangens. Wartość funkcji secans od 0° do 90° dla r = 10^4, obliczone prawdopodobnie ok. 1520 r., dopisał

[32] BJ rkp. 597. Kopia oryginału sporządzona w 1467 r. oraz zapiski Brożka w rkp. 1853 *Alter erat Martinus de Ilkusch dr medicinae et astrologus summus promotus ad magisterii gradum anno 1459, postea plebanus budensis cuius opera Academia habet instrumento ex metallo a rege Ungariae Mathia donato. Hic erat familiaris Joanni Regiomontani et socius laboris in compositione Tabularum directionum quorum exemplar anno 1467 ad Universitatem transmisit.*

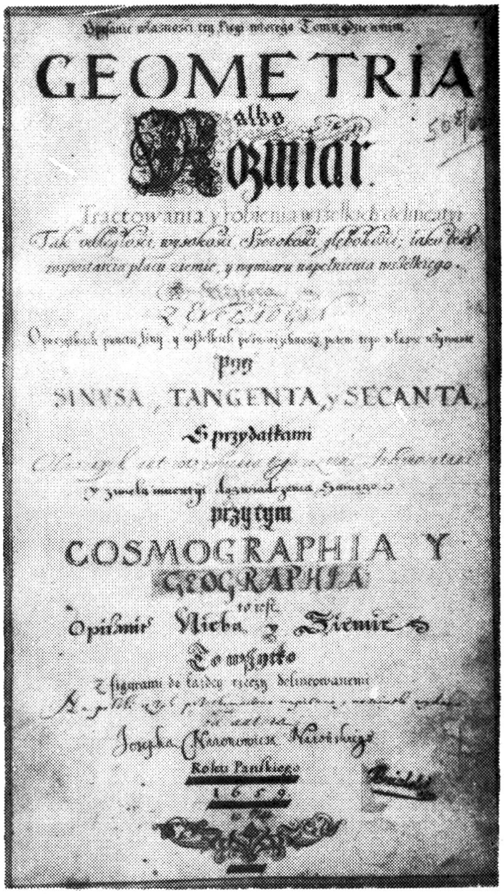
[33] BJ rkp. 574 s. 147—232.

[34] BJ rkp. 546 s. 153—176.

[35] L. A. Birkenmajer: *Mikołaj Kopernik.* Kraków 1900 s. 680—681.

Kopernik obok tabeli tangensów, którą Regiomontanus nazwał *Tabula fecunda*. Jest to pierwsza w historii matematyki tablica secansów. Zamieścił ją później Retyk w swym traktacie *Canon doctrinae triangulorum* zaznaczając, że pochodzi *ex amoenissimo horto Copernici* [36].

Sprawa niezależności trygonometrii Kopernika od dzieła Regiomontana została już wyświetlona przez naszych historyków nauki. Tu przypomnę tylko, że twierdzenia trygonometryczne podał Kopernik częściowo już w *Commentariolisie* sprzed roku 1512, a dzieło Regiomontana wyszło, jak wiemy, w 1533 r. Gdy zaś Retyk w 1538 r. przywiózł je do Fromborka, trygonometria Kopernika była już ukończona, jak wynika z wypowiedzi Retyka w jego zamieszczonej w tejże publikacji *Przedmowie*, dedykowanej J. Hartmanowi [37]. Ważnym dowodem samodzielności rozumowań naszego astronoma jest odrębność jego wykładu opartego na założeniach odmiennych od tych, na jakich oparł swą trygonometrię Regiomontanus.


GEOMETRIA
albo
Rozmiar.
SINVSA, TANGENTA, y SECANTA,
przytym
COSMOGRAPHIA Y
GEOGRAPHIA

Ryc. 3. Karta tytułowa *Pism matematycznych* J. N. Narońskiego

Рис. 3. Титульный листок *Математических произведений* Ю. Н. Наронского

Phot. 3. La feuille de titre de *Écritures mathématiques* de Naroński

[36] M. Curzze: *Reliquiae Copernicanae*. Berlin 1875 s. 35.

[37] *De lateribus et angulis triangulorum*. Wirtemberga 1542 s. 6.

Na początku rozdz. 12 dzieła *O obrotach* mówi Kopernik „Dowodzenia, których w całym prawie dziele używać będziemy, ściągają się do linii prostych i łuków oraz trójkątów płaskich i kulistych, z których chociaż wiele jest już znanych w «Elementach» Euklidesa, to jednak nie obejmują tego, co najbardziej żądamy, to jest, jakim sposobem z kątów boki, a z boków kąty otrzymać można. Dla tych powodów nie od rzeczy będzie, jeśli o tych liniach mówić będziemy, również o bokach i kątach tak płaskich jak i kulistych trójkątów, które Ptolemeusz tu i ówdzie w przykładach podał, aby w tym miejscu raz to załatwić i zrozumialszym potem uczynić dowodzenia, które podać mamy" [38].

Rozdział 12 ks. I zawiera goniometrię opartą na badaniach Ptolemeusza, ale zasady obliczeń tablic opierają się raczej na wzorach arabskich. Po zestawieniu cięciw odpowiadających kątom 120°, 90°, 60°, 30°, 72°, 36° udowadnia Kopernik najpierw tzw. twierdzenie Ptolemeusza, że w czworokącie wpisanym w koło prostokąt z dwóch przekątnych równy jest sumie prostokątów boków przeciwległych, a następnie twierdzenie, że jeśli w jednym półkolu dane są cięciwy dwóch nierównych łuków, wiadoma będzie także cięciwa różnicy tych łuków. Ostatnie twierdzenie rozdziału 12 brzmi: „Stosunek dwóch łuków, większego do mniejszego większy jest od stosunku cięciw". Świadczy to o znajomości faktu, że cięciwy (sinusy) nie są wprost proporcjonalne do kątów. Przy dalszym zmniejszaniu się kątów i cięciw stwierdza Kopernik: „Różnica między linią prostą a krzywą prawie przed zmysłami znika", można więc dla bardzo małych kątów przyjąć, że łuk równa się cięciwie. Ustalając zasadę układu swej tablicy dodaje Kopernik: „Sądzę, że dostateczne będzie, jeśli tylko połowy cięciw podpierających łuki dwa razy większe w tablicy umieścimy, przez to skrócenie zamkniemy w jednej ćwiartce to wszystko, co do półkola rozciągnąć należało, szczególnie zaś dlatego, że częściej używają w dowodzeniach i rachunkach połówki cięciw, aniżeli całe cięciwy. Tablicę połówek cięciw ułożyliśmy co szóstą część stopnia, czyli co 10′ łuku; ta obejmuje trzy kolumny, w pierwszej są stopnie okręgu koła i szóste części stopnia, druga zawiera liczby połówek cięciw łuków dwa razy większych, trzecia mieści różnice połówek cięciw, za pomocą których można proporcjonalnie dodać części odpowiednie do każdej minuty stopnia".

W rozdziale 13 zawarte są dowody odnoszące się do rozwiązywania trójkątów płaskich za pomocą twierdzenia sinusów. Kopernik nie używa jednak terminu „sinus", lecz *semisses subtensarum duplarum*. Porównanie metod, jakimi Kopernik w tej części trygonometrii rozwiązuje trójkąty, z rozważaniami Regiomontana wykazuje znaczne różnice. Świadczy o tym dobitnie fakt, że rozwiązując trójkąt w przypadku, gdy dane są dwa boki i kąt naprzeciw jednego z nich leżący, nie wyszczególnia Kopernik dwóch możliwości rozwiązania zależnie od tego, czy dany kąt jest ostry, czy rozwarty. Nie bierze zatem pod uwagę dwuznaczności czy niemożności rozwiązania. Regiomontanus natomiast rozróżnia te dwa przypadki. Gdyby Kopernik znał dzieło Regiomontanusa przed napisaniem swej *Trygonometrii*, niewątpliwie poprawiłby swój niedokładny wynik.

Oryginalność metody Kopernika wykazuje zwłaszcza rozdział 14. Omówiono w nim także twierdzenia trygonometrii sferycznej, której jako ważnej dla astronomii poświęcił sporo miejsca. Tekst tej części dzieła kilkakrotnie modyfikował, jak świadczą przekreślenia i dopiski w auto-

---

[38] J. Baranowski: *Mikołaja Kopernika, Toruńczyka »O Obrotach ciał niebieskich ksiąg sześcioro«*. Warszawa 1854.

grafie. Twierdzenia tu podane dotyczą albo rozwiązywania trójkątów, albo ich zastosowań.

Metoda dowodu Kopernika polega na przeniesieniu elementów trójkątów sferycznych na trójkąty płaskie, otrzymane przez przecięcie odpowiedniego, trójściennego kąta bryłowego, oraz przeniesienie na płaszczyznę równikową jednego z wierzchołków danego trójkąta sferycznego jako bieguna. Metoda ta sprowadza związki trygonometrii sferycznej do trygonometrii płaskiej. W toku dalszych rozważań, opartych na tym założeniu, widać wpływ trygonometrii arabskiej, a w tych twierdzeniach, w których można by przypuścić wpływ Regiomontana, dowód Kopernika jest prostszy niż u matematyka niemieckiego. Podstawowych twierdzeń podaje Kopernik mniej niż Regiomontanus, co wynika choćby z faktu, że posługuje się tylko funkcją sinus, wprowadzając w dowodach twierdzenie sinusów. Tym bardziej godne podziwu jest osiągnięcie tak szczupłymi środkami pięknie skonstruowanej całości.

Na lata 1554—1572 przypada pobyt Retyka w Krakowie [39]. Długoletnie przebywanie w Polsce, rola, jaką odegrał w wydaniu dzieła *O obrotach*, ścisłe kontakty z krakowskimi zwolennikami idei heliocentryzmu, wreszcie tu powzięte i częściowo zrealizowane plany naukowe związały tego uczonego z dziejami naszej nauki. O planach Retyka z tego okresu dowiadujemy się z jego korespondencji. W liście do Hajeka [40] z 28 października 1563 r. czytamy: „Obecnie wziąłem do ręki dzieła Kopernika i zamierzam je objaśnić naszymi komentarzami. Po niedawno bowiem minionej konjunkcji Saturna i Jowisza 25 sierpnia o godzinie pół do ósmej popołudniu przyjaciele proszą mnie, abym podjął tę pracę" [41]. W 1557 r. zamierzał Retyk wydać w Krakowie dzieła Jana Wernera i ten właśnie zamiar wiąże się z omawianym przez nas tematem, mianowicie z goniometrią. Werner bowiem jest twórcą pewnej charakterystycznej dla XVI w. metody, tzw. „prostaferazy". Polegała ona na przekształcaniu iloczynów i ilorazów funkcyj goniometrycznych na sumy i różnice [42].

Metodę tę opracował Werner około 1500 r., dzieło jednak nie zostało wydrukowane, a rękopis noszący tytuł *De triangulis sphaericis libri quatuor. De meteoroscopis libri sex* doznał podobnego losu co *De triangulis* Regiomontana. Dostał się bowiem do rąk Retyka, który w 1557 r. miał zamiar wydać to dzieło w Krakowie pt. *Joannis Werneri mathematici Norimbergensis. De triangulis sphaericis nunc primum studio et diligentia Georgii Joachimi Rhetici in lucem edita.* Planu tego Retyk nie zrezalizował, wydał tylko *Przedmowę* do tej pracy. Na jej egzemplarzu zachowanym w Bibliotece Jagiellońskiej, który był niegdyś własnością Brożka, czytamy jego własnoręczną zapiskę: „Jedynie tę Przedmowę wydano w Kra-

[39] J. Dianni: *Pobyt J. J. Retyka w Krakowie.* „Studia i Materiały z dziejów Nauki Polskiej" T. 1. 1953 s. 64—79.

[40] Tadeusz Hajek (Hagecius), uczony czeski, z którym Retyk zawarł znajomość w Pradze lub w Wiedniu.

[41] *Aphorismorum meteoroscopicorum seu frontis inspectio liber I Thaddei Hagecii ab Hagek, med. dr.* Francoforti 1584 s. 78. Teksty łacińskie tłumaczyła D. Turkowska.

[42] Nazwa od greckich słów προστιθέναι (dodawać), ἀφαιρεῖν (odejmować). Termin προσταφαίρεσις występuje już w *Almageście* Ptolemeusza (A. Braunmühl: *Beiträge zur Geschichte* jw., s. 246). Wynalazek logarytmów usunął prostaferezę, gdyż zgodnie z prawami logarytmowania należało zamieniać sumy i różnice na iloczyny i ilorazy. Tu dodamy, że odkrycie logarytmów ogłoszone w dziele Nepera *Mirifici logarithmorum canones ejusque usus in utraque trigonometria* (Edinburgh 1614) wiąże się ściśle z trygonometrią, było bowiem wynikiem badań w tej dziedzinie. Wzory odnoszące się do trójkątów sferycznych ujął w formę, znaną dziś pod nazwą „analogii Nepera".

kowie. Pozostałe dzieło zamierzał (Retyk) wydać do Niemiec, jak zrozumiałem z pewnego listu do Wolfiusa pisanego ręką samego Retyka. Nie wiadomo mi dotychczas, czy to dzieło zostało wysłane i czy wyszło drukiem". Prawdopodobnie przyczyną, dla której Retyk ociągał się z wydaniem dzieła była konieczność dokonania pewnych uzupełnień [43]. Rękopis Wernera uchodził za zaginiony do roku 1902, w którym odkryty został w Bibliotece Watykańskiej i opublikowany w 1907 r. przez A. A. Björnbo z dołączeniem facsimile przedmowy Retyka z 1557 r. [44]. Jej treść świadczy, jak silne węzły łączyły autora z krakowskimi zwolennikami heliocentryzmu. W pełnych entuzjazmu słowach pisze Retyk o zasługach Kopernika „czcigodnego starca [...] którego czciłem i szanowałem nie tylko jako nauczyciela, lecz jak ojca i pragnąłem zawsze okazać mu wdzięczność" [45]. W Krakowie również wykonywał Retyk obliczenia tablic trygonometrycznych w związku ze swym kanonem nauki o trójkątach. Pisze o tym do Pawła Ebera podkreślając w liście z 1 III 1562 wielkie wydatki, jakie za sobą pociąga układanie kanonu. O dalszych pracach związanych z trygonometrią dowiadujemy się z korespondencji z Ramusem z roku 1568 [46]. Uczony francuski interesował się żywo pracami Retyka i zachęcał go do gorliwego zajmowania się astronomią. Informując Ramusa o swych zamierzeniach donosi Retyk, że ma już pewne prace gotowe, m. in. dzieło o trójkątach płaskich i sferycznych. Że prace te były istotnie napisane i istniały jeszcze na początku XVII w., dowiadujemy się z *Historii astronomii* Weidlera, który stwierdza, że były przygotowane do druku, ale nie wyszły, oraz z listu Jana Łaskiego do Gesnera [47].

Dzieła Retyka po jego śmierci w Koszycach w 1574 r. zostały rozproszone. Część spuścizny rękopiśmiennej wraz z autografem Kopernika *O obrotach* przeszła do rąk jego ucznia Walentyna Otho. Z materiałów tych wydał on w 22 lat po śmierci Retyka słynne *Opus Palatinum de triangulis a Georgio Joachimo Rhetico coeptum, Valentinus Otho consumavit a. MDXCVI Neostadii in Palatinatu.*

Omawiając ogólnie twórczość naukową Retyka, której syntezą jest to wielkie dzieło, raz jeszcze podkreślimy, że wiąże się ona z rozwojem polskiej myśli matematycznej nie tylko przez ważny dla jego planów naukowych pobyt w Krakowie, ale przede wszystkim z uwagi na wpływ, jaki wywarł Kopernika na ukształtowanie się poglądów Retyka w odniesieniu do trygonometrii.

Część spuścizny rękopiśmiennej Retyka znalazła się w posiadaniu Bartłomieja Pitiscusa, Ślązaka z Zielonej Góry, kaznodziei na dworze palatyna Fryderyka IV. Z rękopisów tych wydał on traktat *Thesaurus mathematicus sive Canon sinuum ad radium 1000000000000000 a Georgio Joachimo Rhetico supputatus ac nunc primum in luce editus* Francoforti 1593, wyd. 2, 1613. Również na tej spuściźnie się opierając opublikował Pitiscus dzieło pt. *Trigonometria sive de solutione triangulorum tractatus brevis ac perspicuus* dołączone do książki *A. Sculteti Sphaericorum libri tres, Heidelberg 1595* [48]. Dalsze wydania tego dzieła Pitiscusa, w którym

[43] K. H. Burmeister: *Georg Joachim Rheticus*. T. 1. Wiesbaden 1967 s. 60.
[44] A. Björnbo: *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*. Leipzig 1907 s. 104 i nast.
[45] J. Dianni: *Pobyt J. J. Retyka w Krakowie* s. 74.
[46] Kopie tej korespondencji napisane ręką Brożka znajdują się w Bibliotece Jagiellońskiej rkp. 925.
[47] J. F. Weidler: *Historia astronomiae*. Wirtenberga 1741, s. 357.
[48] Scultetus był też Ślązakiem z Zielonej Góry.

po raz pierwszy użyty jest termin „Trigonometria" przypadają na wiek XVII (1600, 1603, 1608, 1612). To ostatnie wydanie nosi tytuł *Bartholomaei Pitisci Grunbergensis Silesii Trigonometriae libri quinque;* miał je w swej bibliotece Brożek.

Pitiscus wydał również w Frankfurcie w 1613 r. po raz drugi *Thesaurus mathematicus.* Znajdują się tu tablice sinusów i cosinusów od 0° do 45° obliczone z dokładnością do 15 miejsc dziesiętnych co 10″. Dzięki tej dokładności były one wzorem dla późniejszych tablic.

W 1612 r. ukazała się książka *Synopsis trigonometriae sive doctrinae triangulorum* Piotra Crügera, matematyka i astronoma gdańskiego, zdecydowanego zwolennika systemu heliocentrycznego. Zetknąwszy się z Brożkiem w czasie jego pobytu na Warmii ofiarował mu Crüger egzemplarz tego wydania.

Trygonometria Crügera tak jak i poprzednie jest „retoryczna", twierdzenia i dowody są ujęte słownie, nie ma tu symboli trygonometrycznych.

Doceniając wagę nauczania trygonometrii uwzględnił Joachim Stegman, rektor szkoły ariańskiej w Rakowie, w swym podręczniku *Institutionum mathematicarum libri duo* wydanym w r. 1630 dla uczniów tamtejszej szkoły, także trygonometrię. Znaczenie jej omawia pod kątem widzenia praktyki mierniczej, przy czym nowym szczegółem jest opis konstrukcji przyrządu, który nazwał *Quadrans resolutus,* a który miał służyć do odczytywania wielkości kątów bez użycia tablic trygonometrycznych.

Najważniejszą publikacją tego okresu jest *Trigonometria rectilineorum et sphaericorum triangulorum* Jana Tońskiego, profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego, wydana w 1640 r. Jest to drugi, po Koperniku, ogłoszony drukiem traktat trygonometrii napisany przez Polaka. Ujęcie treści świadczy o poważnej erudycji autora. Ważnym szczegółem jest uwaga odnosząca się do rozwiązywania trójkąta w przypadku gdy dane są dwa boki i kąt leżący naprzeciw jednego z boków. Toński wykazuje możliwość dwóch rozwiązań, w przypadku, gdy dany kąt leży naprzeciw mniejszego z danych boków. Nadmienia przy tym, że nie wszyscy matematycy, a nawet „nasz Kopernik" biorą pod uwagę te możliwości. Toński również zapisuje swe twierdzenia słowami nie wprowadzając znakowania literowego. W niektórych zagadnieniach trygonometrii sferycznej stosuje Toński prostaferezę, ale zaznacza przy tym wyraźnie, że jest metodą „starych matematyków" i że lepiej posługiwać się „nowymi metodami", mianowicie logarytmami. Jako zastosowanie części teoretycznej podaje zagadnienie z dziedziny miernictwa, astronomii, gnomoniki, na końcu zaś książki zamieszcza tablice trygonometryczne.

W publikacji Stanisława Solskiego *Geometra polski* z 1683 r. znajdujemy tylko wzmianki o liniach trygonometrycznych i ogólne uwagi o użyteczności trygonometrii w geometrii praktycznej.

Nieco szerzej omawia tę dziedzinę Wojciech Tylkowski poświęcając jej w swej *Geometria practica curiosa* z 1692 r. sporo uwag. Podaje zastosowanie funkcji trygonometrycznych, jednak bez dowodów.

Niemniej ważną od publikacyj drukowanych jest XVII-wieczna spuścizna rękopiśmienna. W rękopisach Stanisława Pudłowskiego, profesora prawa, doskonale obeznanego z dziedziną nauk matematycznych, obok zapisków z różnych działów matematyki znajdują się i wzory trygonometryczne. Jak zamierzał nasz uczony opracować te zagadnienia — nie wiemy — gdyż prace jego przygotowane do druku zaginęły. Z notatek odnoszących się do trygonometrii [49] widać, że był dobrze obeznany z tą dziedziną, wyjaśnia bowiem znaczenie linii trygonometrycznych w pierwszej ćwiartce koła o promieniu jednostkowym. Wprowadza wprawdzie nazwy funkcji trygonometrycznych, ale uważa je za skróty oddzielając kropką od oznaczenia kąta, np. sin. A, cos. B. Jeśli chodzi o wzory podające związki między funkcjami tego samego kąta, to spotykamy je wprawdzie w rękopisach XVIII-wiecznych, ale są one tworzone dla celów prostaferezy.

W rękopisie ks. Franciszka Zajerskiego z r. 1619, zamiłowanego w naukach matematycznych, w części odnoszącej się do trygonometrii widać wpływ prac Pitiscusa [50]. Zapiski nie tworzą systematycznej całości, niemniej jednak pamiętać należy, że jest to druga z kolei po Koperniku trygonometria opracowana (choć nie ogłoszona drukiem) przez Polaka. Objaśnienia podane są słownie, bez użycia symboli, ale z tekstu widać, że znane były Zajerskiemu pojęcia *sinus rectus, sinus versus, sinus totus, sinus complementi* oraz *tangens* i *secans*.

Najwybitniejszy matematyk polski XVII w., Jan Brożek nie poświęcił trygonometrii specjalnego opracowania. Ale i ta dziedzina nie była mu obcą. Świadczą o tym zachowane zapiski. We wspomnianej wyżej *Trygonometrii* Pitiscusa z 1612 r. prócz licznych uwag marginesowych znajdują się na wklejonej kartce (2 strony) przykłady rozwiązywania trójkątów z zastosowaniem twierdzenia sinusów, przez co rozumowanie staje się prostsze niż u Pitiscusa, w analogicznym przykładzie. W egzemplarzu książki *Trigonometria triangulorum logarithmica practica secreta mirabilis Georgii Germanni Borussi* (Gdańsk 1627), którą autor przysłał Brożkowi, znajdują się na czterech wklejonych kartkach (7 stron) przykłady rozwiązywania trójkątów z zastosowaniem rachunku logarytmicznego. Podane tu obliczenia odnoszą się częściowo do wielokątów gwiaździstych, a ten właśnie problem omówiony — jak wiemy — szczegółowo w *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum* (Gdańsk 1652) zajmował żywo Brożka.

Najważniejszym zabytkiem rękopiśmiennym tego wieku jest traktat trygonometryczny zachowany jako autograf Józefa Naronowicza Narońskiego z 1659 r. Jest to pierwsza trygonometria w języku polskim. Wśród dyscyplin matematycznych, które Naroński opracował, największą wagę przywiązywał do trygonometrii ze względu na swe prace kartograficzne i geograficzne.

Po tych osiągnięciach, jakie przyniósł wiek XVII, nie możemy stwierdzić w pierwszej połowie XVIII w. dalszego postępu w interesującej nas dziedzinie. Fakt ten jest zrozumiały, gdy zważymy upadek nauk w Polsce w tym okresie. Zmianę zasadniczą przynosi dopiero druga połowa XVIII wieku, pod wpływem przenikającej do Polski filozofii Oświecenia i powstających w związku z tym zainteresowań naukowych. Większość publikacji z tego okresu ma charakter podręcznikowy, a typowym przykładem tej „nowej" literatury matematycznej powstałej pod wpływem Ch. Wolfa, wybitnego pedagoga, przedstawiciela filozofii Oświecenia, jest dzieło Jakuba Nakcyanowicza, profesora Akademii Wileńskiej *Praelectiones mathematicae ex Wolfianis Elementis adornatae atque sic usui auditorum*

---

[49] BJ rkp. 495 i 2468; J. Dianni: *Stanisław Pudłowski, profesor Akademii Krakowskiej i jego studia matematyczne*, „Studia i Materiały z dziejów Nauki Polskiej" Ser. C, zesz. 12. 1967, s. 3—43.

[50] Biblioteka Kórnicka rkp. 690, s. 102—144.

matheseos accomodatae wydane w Wilnie 1761 r. Tom I poświęcony geometrii zawiera na s. 273—300 *Elementa trigonometriae planae*. W przedmowie podkreśla autor znaczenie trygonometrii teoretycznej jako ważnego działu geometrii, a następnie mówi o jej użyteczności w praktyce mierniczej.

W podręczniku pijara Ignacego Bazylego Bystrzyckiego, wydanym w Warszawie w roku 1769 pt. *Geometrya albo niektóre łatwiejsze sposoby do rozmierzania wszelkich długości, szerokości, wysokości lub głębokości* jeden rozdział poświęcony jest trygonometrii. Nosi on tytuł *Trygonometrya albo mierzenie tryangułów*. Po podaniu definicji funkcji trygonometrycznych omówione są przypadki rozwiązywania trójkątów z zastosowaniem rachunku logarytmicznego. Jako przykład tej wczesnej polskiej terminologii trygonometrycznej cytujemy następujące zadanie: „Mając wiadomą hipotenuzę i jednego z katetów trójkąta prostowęgielnego wynaleźć węgły, które nie są wiadome".

Jak wiadomo ważnym czynnikiem dalszego rozwoju nauki i oświaty była działalność Komisji Edukacji Narodowej, która w swych progamach dla Szkół Narodowych wyznaczała dużą rolę nauczaniu matematyki a w odniesieniu do geometrii również i trygonometrii. Reformy te przyniosły także duże zmiany w metodach nauczania. „W miejsce dawnej — mówi Jan Śniadecki — zesztywniałej dialektyki scholastycznej podawanej w języku łacińskim zaprowadzono wiedzę, która była odbiciem najnowszych prądów i zdobyczy Zachodu" (*Pisma rozmaite* 1818, t. I s. 65). Ówczesne podręczniki spełniły swe zadanie przez podanie do wiadomości już osiągniętych w dziedzinie trygonometrii wyników i spopularyzowanie tej wiedzy wraz z wprowadzeniem polskiej terminologii. Tego właśnie typu podręcznik zatwierdzony przez Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych wyszedł w 1780 r. w Warszawie. Autorem tej *Geometrii dla Szkół Narodowych* był matematyk szwajcarski Szymon Lhuillier, paroletnim pobytem w naszym kraju (1775—1782) związany z nauką polską; tłumaczem na język polski — Jędrzej Gawroński, eksjezuita, gruntownie wykształcony, członek Towarzystwa do Ksiąg Elementarnych. Jako tłumacz podręczników Lhuilliera stał się Gawroński współtwórcą polskiej terminologii matematycznej.

Na końcu podręcznika Lhuilliera znajdują się dwa *Przydatki*. W pierwszym objaśnione są działania miernicze na gruncie, w drugim zasady niwelacji wraz z opisem przyrządów do niej służących.

Trygonometria wraz z dwoma *Przydatkami* zajmuje w wymienionym podręczniku s. 334—405, a więc stosunkowo dużo miejsca.

Na szczególne podkreślenie wśród publikacji tego okresu zasługuje *Geometrya praktyczna* pijara Ignacego Zaborowskiego, wydana w Warszawie w 1786 r. (dalsze wydania 1792, 1806, 1815). W rozdziale III (s. 163—246) omówione są obszernie zastosowania trygonometrii do geometrii praktycznej. Podręcznik ten realizuje w pełni postulaty Komisji Edukacji Narodowej, jakie miała spełnić literatura matematyczna tego typu, a więc przejrzyste, uporządkowane ujęcie całości omawianego tematu, połączonego w myśl nowych zasad dydaktycznych z poglądowością, z bogatą treścią konkretnych przykładów zastosowań praktycznych. Dzięki tym walorom jest książka Zaborowskiego cenną pozycją naszej literatury matematycznej.

---

[51] *Geometria* Lhuilliera miała kilka wydań w XVIII i XIX w. (1785, 1790, 1804, 1810).

W ostatnim dziesiątku w. XVIII wychodzi w Warszawie w 1790 r. podręcznik Józefa Łęskiego, profesora matematyki w Korpusie Kadetów. Jest to tłumaczenie na język polski książki P. Hongrewego, pt. *Teoretyczna i praktyczna nauka żołnierskich rozmiarów, czyli miernictwo wojenne* (1790). Tłumacz uzupełnił podkręcznik *Dodatkami,* których dwa rozdziały (III i V) poświęcone są trygonometrii płaskiej i „kulnej".

Publikacje pojawiające się w XIX stuleciu, coraz bogatsze treścią i o dużych walorach dydaktycznych, świadczą o żywym zainteresowaniu naszych matematyków omawianą tu dyscypliną. W 1813 r. wychodzi w Warszawie *Jeometryi część pierwsza złożona podług Lacroix,* której autorem jest profesor Uniwersytetu Warszawskiego Antoni Dąbrowski. W książce tej trygonometria zajmuje s. 190—234.

W 1817 r. wyszło w Wilnie drugie wydanie *Elementów* Euklidesa w tłumaczeniu Józefa Czecha. Dołączona jest do niego *Trygonometria płaska* Ronerta Simsona (wyd. w Edynburgu 1781). Tłumacz nie wymieniony. Publikacja ta zawiera *Podania przybrane* i *Opisania.* Zebrane są tu podstawowe pojęcia trygonometryczne, objaśnienia funkcji jako linii w kole, a nie jako związków między elementami trójkąta. Następnie w ośmiu *Podaniach* po omówieniu twierdzenia sinusów i tangensów są zestawione schematycznie w dwóch tabelach przypadki rozwiązywania trójkątów prostokątnych i ukośnokątnych.

W tym samym roku 1817 ukazała się wartościowa publikacja Jana Śniadeckiego *Trygonometria kulista analitycznie wyłożona* (wyd. 2 1820) jako podręcznik uniwersytecki. W przedmowie — podkreśliwszy znaczenie trygonometrii sferycznej w matematyce stosowanej — przypomina autor zasługi Eulera w tej dziedzinie, który pierwszy „trygonometrię kulistą, przedtem dosyć zawiłą, w użyciu żmudną i w prawidłach swoich niepowiązaną, przerobił na analityczną rozprawę wyciągając z trzech zrównań całą osnowę twierdzeń do rozwiązywania trójkątów służących" [52]. Z jeszcze większą prostotą ujął te zagadnienia Lagrange w 1798 r., który „z jednego tylko zrównania całe pasmo prawd o trójkącie kulistym wydobył" [53]. Te właśnie odkrycia uzupełnia własnym wkładem Śniadecki w swej publikacji. Wykład składa się z 13 części: 1)*Zrównanie główne trygonometrii;* 2) *Zrównanie między bokami i kątami;* 3) *Analogie Nepera;* 4) *Rozwiązanie trójkątów kulistych prostokątnych;* 5) *Trójkąty o dwóch bokach prostych;* 6) *Rozwiązanie trójkątów ukośnokątnych;* 7) *Rozciągnienie nauki o trójkątach kulistych i prawidło na znaki;* 8) *Wyrażenia dostawy i ustawy przez styczne;* 9) *Powierzchnia trójkąta kulistego;* 10) *Wyrażenie linij trygonometrycznych przez łuki i dwojakie tych łuków znaczenie;* 11) *Wyrażenie przepełnienia przez boki i kąty;* 12) *Wyrażenie łuku przez funkcje linij trygonometrycznych;* 13) *Porównanie trójkąta kulistego z prostokątnym.* Najważniejszym szczegółem dzieła jest oryginalny dowód autora dotyczący tzw. „równań Delambre'a", wyrażających związek między bokami i kątami trójkąta sferycznego. Do czasu sformułowania tych wzorów przez Delambre'a rozwiązywano zagadnienia odnoszące się do trójkątów sferycznych rozkładając je na trójkąty prostokątne. Uproszczenie polegające na bezpośrednim rozwiązaniu trójkąta ukośnokątnego ogłosił Delambre w 1808 r. nie podając jednak dowodu. Gauss stosując to uproszczenie w swej *Theoria motus corporum coelestium* z roku 1809, nie odwołując się zresztą do Delambr'á, też nie podał dowodu. Pierw-

[52] *Acta Academiae Petropolitanae,* t. 1, 1779, s. 78.
[53] *Journal de l'Ecole Polytechnique,* 1798, t. 10, s. 270.

szy Śniadecki przesłał dowód w 1812 r. do Akademii Nauk w Petersburgu, wcześniej od Delambre'a, który dowód tych wzorów podał dopiero w roku 1814 w oparciu o analogie Nepera.

Zacytujemy fragment rozdziału *Powierzchnia trójkąta kulistego* z książki Śniadeckiego. „Powierzchnia trójkąta kulistego jest częścią powierzchni kuli, więc mając powierzchnię kuli i znając stosunek powierzchni trójkąta do powierzchni kuli znaleźlibyśmy powierzchnię trójkąta. Chodzi więc o to, by znaleźć ten stosunek. Wychodząc z założenia, że w każdym trójkącie kulistym suma kątów jest większa od dwóch kątów prostych, każdy trójkąt kulisty można uważać jako złożony z dwóch kątów prostych i przepełnienia, które wyraża się różnicą $A + B + C - 180°$". Jako twierdzenie pomocnicze udowadnia Śniadecki, że każdy trójkąt kulisty jest równy co do powierzchni trójkątowi równoramiennemu złożonemu z boków będących ćwiartkami koła i mającemu kąt równy przepełnieniu dwóch kątów prostych. Dochodzi w ten sposób do wzoru na powierzchnię trójkąta $\frac{r^2\pi}{2\times 90°}(A + B + C - 180°)$, stąd ogólnie: Powierzchnia trójkąta kulistego jest równa jego przepełnieniu dwóch kątów prostych, gdy powierzchnia trójkąta równobocznego równa się jedności. Tu dodaje Śniadecki: „Pierwszy podał to twierdzenie Albert Girard w *Invention nouvelle en Algèbre* (Amsterdam 1629). Ścisły dowód podał B. Cavalieri w *Directorium generale uranometrocum* (Bolonia 1639). Twierdzenie to cytuje Brożek w *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum* (Gdańsk 1652)". Z rozważaniami tymi związał Śniadecki zagadnienie znalezienia przepełnienia ze znanych dwóch boków trójkąta i kąta między nimi zawartego.

Obszerną recenzję o omawianym dziele Śniadeckiego napisał Józef Twardowski, profesor Uniwersytetu Wileńskiego [54]. Po podaniu zwięzłego rysu historycznego o powstaniu i rozwoju trygonometrii podkreśla Twardowski, omawiając treść poszczególnych rozdziałów rozprawy, jasne ujęcie tematu i umiejętne wykorzystanie źródeł, na których autor oparł swe wywody. Nie uważa jednak za wskazane odsyłanie czytelnika do odpowiednich miejsc tekstu *Algebry* [55], gdyż wykład algebry nie zawsze musi poprzedzać naukę trygonometrii, a pozatem podręcznik, który Śniadecki ma na myśli, był w owym czasie trudny do uzyskania. W odpowiedzi na tę recenzję broni się Śniadecki przed tymi zarzutami zarówno jeśli chodzi o ogólne rozplanowanie treści, jak i o wskazania dydaktyczne [56].

Jednym z obszerniejszych podręczników XIX w. jest wydana w 1818 r. książka Michała Pełki-Polińskiego, profesora Uniwersytetu Wileńskiego, pt. *Początki trygonometrii płaskiej* (wyd. 2, 1820). W trzecim wydaniu z 1828 r. dodane są wzory trygonometryczne oraz tablice logarytmów liczb i funkcji *sinus* i *cosinus*. Wykład oparty na systematycznie rozłożonym materiale jest zwięzły i jasny.

Z 1820 r. pochodzi wartościowa rozprawa Karola Hube, profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego *O trygonometrii kulistej rzecz krótka* [57]. Wychodzi tu autor od rozważań Delambre'a nawiązując w analizie porównawczej do badań Śniadeckiego i Gaussa. Rozpatruje szczegółowo analogie Nepera dla wykazania związku między geometrią analityczną i try-

[54] „Nowy Pamiętnik Warszawski", 1817, t. 9, s. 477—501.
[55] *Rachunku algebraicznego teoria przystosowana do linij krzywych*. Kraków 1783.
[56] „Nowy Pamiętnik Warszawski", 1818, t. 10, s. 168—178.
[57] *Rocznik Towarzystwa Naukowego Krakowskiego*, 1820, t. 5, s. 290—331.

gonometrią. Przy omawianiu wzorów trygonometrycznych Gaussa przeprowadza dowód drogą odmienną niż Śniadecki, nie kwestionując bynajmniej słuszności jego dowodu.

W 1827 r. w Krakowie Augustyn Frączkiewicz, profesor Uniwersytetu w Warszawie, wydał publikację *Dowody niektórych podań z trygonometrii płaskiej wraz z krótką uwagą nad pewnym rozwinięciem potęg dwumianu.*

Dużym walorem rozprawy Frączkiewicza jest podawanie wzmianek historycznych, w których omawia osiągnięcia wybitnych matematyków sięgając do dawniejszej i najnowszej wówczas literatury matematycznej. Cytując *Trygonometrię* Simsona dołączoną — jak mówiliśmy — do tłumaczenia *Elementów* Euklidesa, wspomina o dziele Lhuilliera *Elements d'analyse géométrique appliquée à la recherche des lieux géométriques* (Genewa 1809), w którym są również omówione zagadnienia trygonometryczne. Rozważając proporcje prowadzące do rozwiązań trójkątów płaskich cytuje formuły Snelliusa podane w *Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor* (Lugduni Batavorum 1627). Podkreśla znaczenie odkryć Eulera w dziedzinie trygonometrii. Powołuje się również na dzieła matematyków angielskich m. in. na Wallace'á.

W okresie tym zdawano sobie sprawę, jak ważną rzeczą jest wprowadzenie trygonometrii do nauczania. Stąd spora ilość podręczników dostosowanych do potrzeb szkół różnego typu. Jednym z takich jest publikacja o dużych walorach dydaktycznych *Jeometrya dla Szkół Wydziałowych* wizytatora szkolnego Onufrego Lewockiego, wydana w Warszawie w 1828 roku (wyd. 2, 1830).

Z tegoż roku 1828 pochodzi podręcznik A. Krauza *Matematyka na kl. II Szkoły Zimowej Artylerii w Warszawie,* obejmujący też zwięzły wykład trygonometrii.

W 1836 r. wyszło w Warszawie tłumaczenie z języka francuskiego książki Lefebure'a de Fournay *Leçons de Géométrie analytique* dokonane przez pijara Fr. Kasterskiego. Ponowne wydanie opracowane przez A. F. Bernhardta, profesora Szkoły Realnej w Warszawie, ukazało się w roku 1850.

Podręcznikiem uwydatniającym w pełni znaczenie trygonometrii dla praktyki jest książka *Jeometrya stosowana do potrzeb gospodarskich* W. Józefowicza, profesora Instytutu w Marymoncie, wydana w Warszawie 1844 r. Trygonometrię teoretyczną objaśnia autor zwięźle odsyłając czytelnika do podręczników Lewockiego i Polińskiego. Obszernie natomiast są omówione zagadnienia praktyczne w rozdziale *Zastosowania trygonometrii do uformowania sieci związanej.* Zawarty tu wykład zasad triangulacji oparty jest na pomiarach wykonanych w dobrach Instytutu Marymonckiego.

Tom drugi *Wykładu matematyki* K. Libelta, wydany w 1844 r. w Poznaniu, zawiera krótki wykład trygonometrii wraz z rozwiązywaniem trójkątów.

Dla studiujących matematykę w Uniwersytecie Jagiellońskim przeznaczony był podręcznik napisany przez profesora tejże Uczelni, Jana Steczkowskiego. Wyszedł on drukiem w trzech tomach w latach 1841—1859 w Krakowie pt. *Elementarny wykład matematyki.* Trygonometria znajduje się w tomie trzecim. Za najważniejsze zastosowanie trygonometrii uważa Steczkowski rachunki geodezyjne. Dla innych przykładów odsyła czytelnika do wydania drugiego *Trygonometrii* Śniadeckiego.

W 1857 r. wyszła w Poznaniu *Trygonometria prostolinijna i sferyczna* Witolda Turno, „byłego ucznia wolnego" Szkoły Politechnicznej w Paryżu. Z wagi nauczania trygonometrii zdawano sobie dobrze sprawę również w drugiej połowie XIX w., toteż uwzględniono ją obszernie w ówczesnych podręcznikach szkolnych. Stwierdzamy to np. w wydanej przez Stanisława Przystańskiego w Warszawie w 1859 r. książce *Trygonometria prostolinijna z zadaniami dla Szkół Okręgu Naukowego Warszawskiego*.

Jedną z najcenniejszych publikacji z dziedziny przez nas omawianej jest *Trygonometria z teorią wielkości urojonych i z notami,* którą wydał w Paryżu w 1870 r. Henryk Grach-Niewęgłowski, jeden z najstarszych wówczas polskich matematyków osiadłych na emigracji w Paryżu po roku 1831. Bardzo obszerny i jasny wykład poprzedzony jest *Przedmową do Czytelnika,* w której autor, podkreślając znaczenie trygonometrii i jej szybki rozwój, mówi: „Ta gałąź matematyki więcej się rozrosła w ostatnich czasach niż od Hipparcha i Ptolemeusza do Kopernika i ze szczupłej teorii rozwiązywania trójkątów prostokątnych i sferycznych stała się umiejętnością funkcyj kołowych".

Ryc. 4. Pomiar wysokości wieży (z rękopisu J. N. Narońskiego)
Рис. 4. Измерение высоты башни (рукопись Ю. Н. Нароньского)
Phot. 4. L'arpentage de la hauteur de la tour (du manuscrit de Naroński)

Z 1886 r. pochodzi rozprawa Bronisława Gustawicza *Zasady goniometrii i trygonometrii prostokreślnej na podstawie rzutów algebraicznych* [58]. Po objaśnieniu na czym polegają rzuty algebraiczne, wyprowadza autor oparte na nich wzory goniometryczne i trygonometryczne zestawiając wyniki tabelarycznie. Wykazuje w toku wykładu, że ta metoda ułatwia dowodzenie twierdzeń, a zarazem daje możność powiązania trygonometrii z geometrią analityczną.

W ostatnim dziesiątku lat XIX stulecia wyszła drukiem zasługująca na szczególną uwagę książka pt. *Trygonometria płaska i kulista* Aleksandra Czajewicza, magistra Szkoły Głównej Warszawskiej.

Walory tego podręcznika są duże, zarówno pod względem naukowym, jak i dydaktycznym dzięki wprowadzeniu do wykładu nowych szczegółów, np. objaśnienie za pomocą rzutów wzorów na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów. Równie jasno i wzorowo pod względem dydaktycznym ujęte są zagadnienia trygonometrii sferycznej z wyczerpującym omówieniem przepełnienia kulistego. Książka Czajewicza, jest równie jak *Trygonometria kulista* Śniadeckiego, cenną pozycją naszej literatury matematycznej. Uzupełnia ją *Krótki rys historyczny powstania i rozwoju trygonometrii* wraz z zestawieniem najważniejszych dzieł z zakresu tej dyscypliny.

Na omówienie zasługuje jeszcze *Geometrya dla wyższych klas szkół średnich* Mocnika (w tłumaczeniu Maryniaka), podręcznik, który pod koniec XIX i na początku XX w. miał wiele wydań. Obecnie posiada on znaczenie, gdyż daje pogląd na ówczesny zakres nauczania matematyki w szkołach średnich zaboru austriackiego. A zakres ten, jeśli chodzi o trygonometrię był — zgodnie z instrukcjami ministerialnymi — duży, obejmował trygonometrię płaską i sferyczną.

Uzupełnieniem tego podręcznika był wydany w 1899 r. *Zbiór zadań* Ignacego Kranza, również tematycznie dostosowany do *Instrukcji Ministerstwa Oświaty*. Dobór zadań trygonometrycznych obejmuje całość zagadnień trygonometrii płaskiej i sferycznej oraz zastosowań. Świadczy w jak szerokim zakresie nauczano wówczas trygonometrii.

ZAKOŃCZENIE

W podanym powyżej przeglądzie uwzględniono te publikacje, których treść — w pewnej przynajmniej mierze — pozwala ocenić, w jakim zakresie zajmowano się u nas trygonometrią od jej zaczątków w Polsce aż do końca XIX w. Na ich podstawie możemy stwierdzić, że osiągnięcia naszych matematyków w tej dziedzinie są poważne, że doceniali oni w pełni tak znaczenie samej trygonometrii jak i jej zastosowanie praktyczne, obszernie — jak stwierdziliśmy — we wszystkich prawie publikacjach opracowane. Znając zagraniczną literaturą przedmiotu polscy matematycy potrafili ją odpowiednio wyzyskać do swych badań.

LITERATURA

1. K. H. Burmeister: *Georg Joachim Rheticus (1514—1574)*. Wiesbaden 1967—1968.
2. S. Dürr: *Jan Śniadecki — matematyk*. „Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej", T. 2: 1954 s. 439—469.

[58] *Sprawozdanie Dyrekcji Gimnazjum Św. Anny w Krakowie za r. 1886*, s. 1—32.

3. J. Nowak: *Budownictwo wojenne Narońskiego.* Warszawa 1957.
4. J. Ruxerówna: *O rękopisie Józefa Naronowicza Narońskiego.* w: *Sprawozdania z posiedzeń Akademii Umiejętności.* Oddział Matematyczno-Przyrodniczy 1913 t. 18: s. 10.
5. E. Stamm: *Geometria Kopernika.* „Wiadomości Matematyczne", Warszawa 1934, t. 57.
6. E. Stamm: *Z dziejów matematyki polskiej w XVII wieku w Polsce.* „Wiadomości Matematyczne", 1937, t. 40.
7. J. Tropfke: *Geschichte der Elementarmathematik.* Berlin 1923—1940.
8. A. Wachułka: *Jan Toński, profesor Uniwersytetu Krakowskiego w XVII wieku i jego matematyczne dzieło.* „Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej". Seria C zesz. 1: 1957 s. 59—122.

Я. Дианни

ТРИГОНОМЕТРИЯ В ПОЛЬСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТРУДАХ (ИЗДАНИЯ И РУКОПИСИ XV—XIX ВВ.)

На фоне общего развития тригонометрии в отдельные исторические периоды представлены достижения польских математиков, сохранившиеся в этой области печатные издания и рукописи.

В древние времена тригонометрия была вспомогательной наукой астрономии, классическим примером чего является Алмагест Птолемея (II в. н.э.). Процесс отделения этой области геометрии, который можно было частично заметить в греческой математике, ясно зарисовывается в геометрии арабской, выдающимся представителем которой является Наси-Эддин Альтуси. Труд немецкого математика Региомонтана (написанный в 1464 г., изданный в 1535 г.) определяет для тригонометрии и гониометрии место важное как независимых дисциплин в комплекте математических наук. Ее дальнейшее развитие связано с открытиями XVII, XVIII и XIX вв. с аналитической геометрией, теорией рядов, функций и уравнений.

В истории тригонометрии в Польше важное место на ряду с печатными изданиями занимают рукописные памятники или в виде записок, как у Брожка (XVII в.), или крупных фрагментов в рукописях Пудловского (XVII в.), или же в разработках, представляющих единое целое, например: *Summa super Tabulas Alfonsii* Марцина Крудя (XV в.). В 1659 г. был написан рукописный труд Юзефа Нароновича Наронского, включающий планиметрию на польском языке, старательно обработанную. Заслуга публикации труда, посвященного исключительно тригонометрии, принадлежит Копернику как автору трактата *De lateribus et angulis triangulorum* в 1542 г. Открытия XVII в. расширили область тригонометрии. Гданьский математик П. Крюгер в своей *Тригонометрии* в 1634 г. вводит вычисление с помощью логарифмов, причем он первый из европейских математиков составил отдельно таблицы логарифмов тригонометрических функций и таблицы логарифмов чисел.

Богата по содержанию также *Тригонометрия* Я. Тоньского, 1940 г..

Факт, что публикации XVIII в. носили характер учебников связан с реформой образования в этот период, по которой в учебную программу обучения математике входила тригонометрия. Характерной чертой содержания ее — согласно с педагогическими постулатами того времени — учитывать практическое применение, в основном в измерениях.

В XIX веке замечается дальнейшее обогащение обсуждаемой области. В 1817 г. вышла *Сферическая тригонометрия, изложенная аналитическим методом* Яна Сьнядецкого, базирующаяся на новейших достижениях того времени в области тригонометрии в интерпретации собственного метода автора, деятеля Виленского научного общества. С Варшавским центром связаны труды А. Фрончкевича и А. Чаевича. В Кракове издал свой за-

мечательный с точки зрения дидактики учебник Я. Стечковски, профессор математики Ягеллонского Университета. Работающий в эмиграции в Париже Г. Невенгловски является автором тригонометрии, выводы которой он связал с теорией мнимых чисел.

J. Dianni

TRIGONOMÉTRIE DANS LES OUVRAGES POLONAIS DES MATHÉMATIQUES (IMPRIMÉS ET MANUSCRITS DES XV^e—XIX^e SIÈCLES)

Sur la base du développement général de la trigonométrie dans les étapes particulières de l'histoire, on a présenté les réalisations des mathématiciens polonais dans ce domaine, conservees dans des manuscrits et des imprimés.

La trigonométrie se montre dans l'antiquité comme la discipline auxiliaire d'astronomie dont l'exemple typique est *l'Almageste* de Ptolémée (II^e s.n.è.). Le processus de la distinction de cette branche de la géométrie, se montrant en partie dans la mathématique grecque déjà, s'accentue nettement dans la trigonométrie arabe dont le représentant le plus éminent est Nasie-Eddin Altusi. Et l'ou vra ge de Regiomontan, mathématicien allemand (écrit en 1464, édité en 1535), attribue la place importante, dans l'ensemble des mathématiques, à la trigonométrie avec la goniométrie comme une discipline indépendante. Son développement prochain est lié avec les découvertes des XVII^e—XIX^e siècles, avec la géométrie analytique, la théorie des sries, des fonctions et des équations.

Dans l'histoire de la trigonométrie en Pologne il faut souligner l'importance des monuments manuscrits, à côté des imprimés, ou bien en forme des notes comme chez Brożek (XVII^e siècle), ou bien en forme des fragments plus détaillés dans les manucrits de Pudłowski (XVII^e siècle), ou enfin dans les études formant un tout, p.ex. *Summa super Tabulas Alfonsii* de Marcin Król (XV^e siècle). Le manuscrit de Józef Naronowicz Naroński date de 1659 et il contient la trigonométrie rectiligne et ses applications en arpentage. C'est la première trigonométrie en polonais, composée et élaborée soigneusement. Le mérite de la publication de l'ouvrage consacré uniquement à la trigonométrie, nous le devons à Copernic comme l'auteur du traité *De lateribus et angulis triangulorum* de 1642. Les découvertes du XVII^e siècle étendent la sphère de la trigonométrie. Le mathématicien de Danzig A. Crüger introduit dans sa *Trygonometria (Trigonométrie)* de 1634 le calcul logarithmique et, le premier parmi des mathématiciens européens, il dresse à part les tableaux des logarithmes des fonctions trigonométriques et les tableaux des logarithmes des nombres. Il faut noter encore que la *Trygonometria (Trigonométrie)* de J. Toński de 1640 est aussi riche dans son contenu.

Le caractère de manuel des publications du XVIII^e siècle est lié avec la réforme de l'éducation à cette époque, d'après laquelle le programme d'enseigner les mathématiques contenait aussi la trigonométrie. Le trait caractéristique des cours de cette trigonométrie — selon les principes didactiques à l'époque — était la prise en considération de ses applications pratiques, surtout en arpentage.

Au XIX^e siècle, la discipline que nous traitons se développe de plus en plus. En 1817 paraît *Trygonometria kulista analitycznie wyłożona (Trigonométrie sphérique analytiquement exposée)* de Jan Śniadecki, basée sur les plus modernes réalisations d'alors dans le domaine de la trigonométrie, interprétée selon la propre méthode de l'auteur agissant à l'époque au cercle scientifique de Vilna. Les travaux de A. Frączkiewicz et A. Czajewicz sont liés avec le cercle de Varsovie. A Cracovie a paru le manuel excellent du point de vue didactique de J. Steczkowski, professeur en mathématiques à l'Université Jagellonne. A l'émigration à Paris agissait H. Niewęgłowski qui était l'auteur de la trigonométrie largement conçue dont les conclusions il liait avec la théorie des nombres imaginaires.