E. S. Bojko (ZSRR)

ZASADA IZOMORFIZMU I TEORIA DRGAŃ W PRACACH SZKOŁY MOSKIEWSKO-GORKOWSKIEJ

Jest dziś rzeczą powszechnie wiadomą, że u podstaw teorii drgań leży zasada izomorfizmu. Przedmiotem badań teorii drgań są izomorficzne obiekty opisywane za pomocą układów matematycznych. Układ matematyczny składa się z wielkości elementów (liczb, punktów, wektorów, macierzy itd.) oraz relacji między nimi. Dwa układy matematyczne nazywamy izomorficznymi, gdy możemy stwierdzić wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między elementami jednego układu a elementami drugiego układu i jeżeli wszystkie relacje (operacje, zależności) — właściwe elementom jednego układu — zachodzą również w odniesieniu do elementów drugiego układu [1]. Izomorfizm dwóch układów matematycznych odpowiada izomorfizmowi dwóch konkretnych układów (realnych zjawisk fizycznych), które są opisane za pomocą tych układów matematycznych. Dwa układy konkretne można uznać za izomorficzne względem siebie, jeżeli oba mogą być odwzorowane za pomocą jednego i tego samego modelu matematycznego [2]. Zasada izomorfizmu leży u podstaw klasyfikacji wszystkich układów, które mogą być opisywane za pomocą modeli matematycznych. Według A. Rapoporta zalety klasyfikacji opartej na izomorfizmie są następujące: 1 — z klasyfikacji takiej łatwo można wywnioskować, że dany układ jest uogólnieniem innego, jeżeli obejmuje ten ostatni jako przypadek szczególny; 2 — odpowiednio — klasyfikacja układów konkretnych opisanych za pomocą tych układów matematycznych wykazuje, że jedna klasa obejmuje drugą; 3 — wszystkie twierdzenia wyprowadzone przy rozpatrywaniu układu matematycznego mogą być zastosowane do wszystkich wniosków wypływających z analizy układów konkretnych, opisanych tym układem matematycznym. Jako przykład takiej klasyfikacji może posłużyć klasyfikacja wielkości fizycznych, zaproponowana przez znakomitego fizyka angielskiego — J. C. Maxwella. Zastosowanie izomorfizmu matematycznego jako podstawy wyjściowej do zbudowania ogólnej teorii układów wywołało ostrą dyskusję.

Niemniej jednak ustalanie izomorfizmu prawidłowości stało się jedną z fundamentalnych metod nauki. Jeden z uczniów L. I. Mandelsztama, prof. S. M. Rytow, rozpatrując problem prawomocności posługiwania się zasadą izomorfizmu w fizyce wraz z pytaniem, czy nie sprowadza się ona do zwykłej zabawy w analogie matematyczne, pisał: „Jeżeli badając przyrodę odkrywamy istnienie obiektywnych praw wspólnych zupełnie różnym, zdawałoby się, zjawiskom, to nie podobna wskazać jakichkolwiek okoliczności, które mogłyby stać na przeszkodzie przyjęciu za pod-

[1] A. Rapoport: *Princyp matiematiczeskogo izomorfizma w obszczej tieorii sistiem.* W: *Sistiemnyje issledowanija.* Moskwa 1973 s. 160.

[2] Tamże s. 160.

stawę tej właśnie wspólności praw. Takie łączenie zjawisk jest dopuszczalne, jest bowiem oparte na samym fakcie istnienia ogólnych prawidłowości w przyrodzie" [3]. Dzięki zasadzie izomorfizmu i jej zastosowaniom wzrasta znaczenie analogii między obiektami. Analogie oparte na izomorfizmie są to analogie „uprawomocnione", różniące się od „przypadkowych" głębszym charakterem relacji. Zasadniczy fakt możliwości zachodzenia izomorfizmu w stwierdzonych analogiach stanowi o wyborze kierunku dalszych badań. Ponadto — „pojęcie izomorfizmu matematycznego jest potężnym instrumentem integracji teorii układów konkretnych" [4]. Powszechnie odczuwa się dziś potrzebę przeciwdziałania pogłębiającej się wciąż specjalizacji w nauce, która wobec braku ogólnonaukowego języka może w końcu doprowadzić do zupełnego rozdziału między uczonymi reprezentującymi różne dziedziny nauki, a nawet różne specjalności tej samej gałęzi nauki. Tym właśnie, między innymi, tłumaczą się liczne próby zbudowania „ogólnej teorii układów", opartej na zasadzie izomorfizmu. Przykładem nauki, „która według nowych linii podziału przecina tradycyjne sfery poznania naukowego, umożliwiając w ten sposób kontakty między uczonymi różnych specjalności" [5], jest cybernetyka, w której również znajduje szerokie zastosowanie pojęcie izomorfizmu.

W teorii drgań ustalenie izomorfizmu prawidłowości wiąże się z zastosowaniem tak zwanego „podejścia drganiowego", które przyczyniło się do stworzenia jednolitej teorii drgań. Przyjmuje się powszechnie, że „podejście drganiowe" w badaniach zjawisk różnej natury fizycznej zapoczątkował J. W. Strutt (lord Rayleigh, 1842—1919) w słynnym traktacie *Theory of Sound* (*Teoria dźwięku*). Rayleigh jest jednym z twórców teorii drgań, a jego *Teoria dźwięku* pierwszym systematycznym jej wykładem. Traktat ten podsumowuje i wytycza dalsze drogi rozwoju teorii drgań. W istocie rzeczy owa praca Rayleigha zapoczątkowała proces wyodrębniania się teorii drgań jako samodzielnej dyscypliny, przy czym u jej podstaw leży zasada izomorfizmu. Rayleigh w szerokim zakresie posługuje się analogiami z zakresu elektryczności, co jest dziś w akustyce powszechnie praktykowane. Analogie ze zjawiskami elektrycznymi są tylko szczególnym przejawem zasady „izomorfizmu prawidłowości", na której świadomie opiera się współczesna teoria drgań i która, choć nie była *explicite* przez Rayleigha sformułowana, to jednak już wyraźnie występuje w jego pracach [6].

Jako pierwszy sformułował zasadę izomorfizmu w teorii drgań wybitny fizyk radziecki — L. I. Mandelsztam. W jednym ze swoich wykładów dał on następującą definicję teorii drgań: „Jakież więc są kryteria, według których wyodrębnia się naukę o drganiach? Różnią się one zasadniczo od kryteriów, według których dzieli się fizykę na optykę, akustykę itd. Kryterium tego ostatniego podziału stanowią zjawiska fizyczne, które jednakowo percepujemy [...] Jeśli idzie o drgania, rzecz ma się zgoła inaczej. Wyodrębniamy je [...] na zasadzie wspólnej metody i podejścia do badań, na zasadzie podobnego typu prawidłowości [...]

[3] S. M. Rytow: *Sowriemiennoje uczenije o kolebanijach i wołnach.* Moskwa 1951 s. 21.

[4] A. Rapoport: *Princyp...* jw. s. 160.

[5] A. Rapoport: *Matiematiczeskije aspiekty abstraktnogo analiza sistiem.* W: *Issledowanija po obszczej tieorii sistiem.* Moskwa 1969 s. 89.

[6] S. M. Rytow: *Przedmowa do „Tieorija zwuka".* Moskwa 1955, przekład Rayleigh (John William Strutt): *Theory of Sound.* London 1894.

przy zupełnie różnej treści fizycznej. Mamy tu do czynienia i ze zjawiskami akustycznymi, i mechanicznymi, i elektrycznymi, i optycznymi, które są odmienne w naszej percepcji. I ta właśnie okoliczność nadaje teorii drgań ogromne znaczenie. Badając jedną dziedzinę uzyskuje się jednocześnie intuicyjną znajomość zupełnie innej dziedziny. Uzyskuje się możność przeprowadzania daleko idących analogii; niejasności w optyce rozświetla, niczym reflektor, badanie drgań w mechanice itd. Teoria drgań jednoczy tedy, uogólnia różne dziedziny fizyki [. . .] Każda z dziedzin fizyki — optyka, mechanika, fizyka — przemawia w swoim «narodowym» języku. Ale istnieje również język «międzynarodowy», a jest nim język teorii drgań" [7].

Innymi słowy, zasada, według której wyodrębniamy przedmiot teorii drgań, różni się istotnie od tej, na której budujemy różne działy fizyki. Polega ona na tym, że w ogromnej różnorodności procesów drganiowych i falowych, różniących się zarówno co do swej natury, jak i właściwych im parametrów (na przykład okresy obrotu planet stanowią 10^{10} sek., okresy zaś drgań molekuł i atomów 10^{13} sek.), zachodzą ogólne, analogiczne pokrewne (izomorficzne) prawidłowości drganiowe i falowe i one właśnie stanowią przedmiot teorii drgań. „Podejście drganiowe" zaś, które zapoczątkował Rayleigh, nie jest niczym innym, jak ujawnieniem i badaniem tych właśnie (izomorficznych) prawidłowości drganiowych.

Stąd też wynika jedna z idei przewodnich L. I. Mandelsztama, którą A. A. Andronow nazwał ideą „interdyscyplinarnych związków teorii drgań" (org. „kolebatielnoj wzaimopomoszczi"), dotyczących różnych dziedzin fizyki. Polega ona na tym, jak pisze Andronow, że „należy prawidłowości drganiowe «zaatakować» jednocześnie z różnych stron, wybierając słabe punkty i korzystać z wyników uzyskanych w jednej dziedzinie (na przykład w mechanice), po pierwsze — celem wzbogacenia teorii drgań, a po drugie — celem osiągnięcia postępów w innej dziedzinie (na przykład w radiotechnice). Z ideą tą wiąże się charakterystyczna dla L. I. Mandelsztama postawa: nie rozwiązuje on [. . .] jakiegoś wyizolowanego problemu, dobierając w razie potrzeby różne metody analizy, lecz, mając określone założenia teoretyczne, dobiera istotne problemy, które można tym sposobem rozwiązać lub ujrzeć w nowym świetle, albo też sprawdzić słabe punkty samej metody analizy [8]. Takie postępowanie teoretyczne, oprócz tego, że sprzyja głębszemu poznaniu znanych już prawidłowości drganiowych, często umożliwiało Mandelsztamowi przewidzenie nowych, nie znanych jeszcze zjawisk, które później udawało się wykryć na drodze eksperymentalnej. Znana praca tego uczonego o promieniowaniu źródeł światła na powierzchni rozdzielającej dwa ośrodki była oparta na przeniesieniu do optyki doświadczeń radiotechniki. Zostało tu przewidziane, później odkryte, nowe zjawisko optyczne. Podobny sposób postępowania, który również doprowadził do przewidzenia nowego zjawiska optycznego, później potwierdzonego doświadczalnie, zastosował Mandelsztam w innej swojej pracy — o rozpraszaniu światła przez powierzchnię cieczy; w tym wypadku wykorzystał on odpowiednio zmodyfikowane rozwiązania dotyczące przestrzennego, fluktuacyjnego rozpraszania światła przez ciecz. Wreszcie praca Man-

[7] L. I. Mandelsztam: *Lekcji po optikie, tieorii otnositielnosti i kwantowoj miechanikie.* Moskwa 1972 s. 401—402.

[8] A. A. Andronow: *L. I. Mandelsztam i tieorija nieliniejnych kolebanij. Sobranije trudow A. A. Andronowa.* Moskwa 1956 s. 467.

delsztama i Papaleksiego, która umożliwiła przewidzenie, a następnie odkrycie rezonansu drugiego rzędu, oparta była na przeniesieniu do radiotechniki wyników uzyskanych przez astronomię.

Szczególnie wiele uwagi poświęcił Mandelsztam rozwinięciu idei „interdyscyplinarnych powiązań teorii drgań" w odniesieniu do zadań nieliniowych teorii drgań. Jako jeden z pierwszych dostrzegł on i pokazał nieadekwatność, w przeważającej ilości wypadków, liniowego opisu procesów drganiowych. Twierdził: „od dość już dawna znajdujemy się w sytuacji, że w związku z wprowadzeniem systemów nieliniowych, znacznie różniących się od liniowych [...] musimy odrzucić większość podstawowych koncepcji teoretycznych". I nie tylko odrzucić, lecz także opracować nieliniowe koncepcje teoretyczne, „które pozwolą nam uzyskać orientację w różnorodnych i skomplikowanych zjawiskach i umożliwią przewidywanie nowych zjawisk o charakterze nieliniowym" [9]. Co więcej, właśnie Mandelsztam przyczynił się do opracowania podstaw nowego działu teorii drgań — teorii drgań nieliniowych i do jej wyodrębnienia się jako samoistnej dyscypliny naukowej. Pod bezpośrednim wpływem idei tego uczonego powstała w latach 30-ych gorkowska szkoła drgań nieliniowych. Stworzył ją i stanął na czele uczeń Mandelsztama — A. A. Andronow.

Koncepcja „interdyscyplinarnych powiązań teorii drgań" w przypadku nieliniowych problemów teorii drgań nabiera właściwości szczególnych. Nie jest w tym przypadku konieczny postulat, aby problemy te opisywane były analogicznymi równaniami. Wystarczy, aby równania te należały do jednego typu, miały podobną przestrzeń fazową. Dla ilustracji posłużymy się przykładem przytoczonym przez A. A. Andronowa [10]. Zestawia się tu teorię drgań wirnika silnika synchronicznego i teorię systematycznego lotu samolotu przy stałym kącie natarcia.

Równania ruchu silnika synchronicznego (przy braku uzwojenia tłumiącego i przy wprowadzeniu pewnych założeń upraszczających) mają następującą postać:

$$\frac{dV}{d\tau}=Z, \qquad \frac{dZ}{d\tau}=A-\sin V+[B+C\sin V-D\sin^2 V]\,Z,$$

gdzie V = kąt określający odchylenie wirnika od jego biegu synchronicznego; A, B, C, D = stałe, określające obciążenie, moment bezwładności, oporność omową i oporność indukcyjną uzwojenia wirnika itd.

Jeżeli założyć, że oś wzdłużna samolotu jest zbieżna z kierunkiem siły ciągu śmigła i że kąt natarcia jest stały, to równanie ruchu samolotu w płaszczyźnie pionowej ma postać:

$$\frac{dV}{d\tau}=Z-\cos V, \qquad \frac{dZ}{d\tau}=2Z\,(\lambda-\mu Z-\sin V),$$

gdzie V = kąt między kierunkiem prędkości środka ciężkości samolotu a horyzontem; Z = kwadrat prędkości środka ciężkości; λ = współczynnik określający siłę ciągu śmigła, μ = współczynnik określający stosunek oporu czołowego do siły nośnej [11].

---

[9] Tamże s. 451.

[10] Tamże s. 468—470.

[11] W przypadku $\lambda = 0$ i $\mu = 0$ zachodzi tak zwany przypadek Żukowskiego, rozważany przezeń w słynnej pracy *O parienii ptic* (1892).

Na pierwszy rzut oka, mówi Andronow, zadania te niewiele mają z sobą wspólnego. Jednakże odpowiadające tym zadaniom podziały cylindrów fazowych na trajektorie wykazują duże podobieństwo, a jedne i te same swoiste trajektorie określają zachowanie się układów: stany równowagi, cykle graniczne dwóch typów (obejmujące i nie obejmujące cylindra) i tak zwane krzywe rozdziału. Sens fizyczny tych szczególnych trajektorii jest w obu zadaniach zupełnie różny. Stan równowagi w zadaniu pierwszym — to synchroniczny obrót wirnika; w drugim — prostoliniowy lot samolotu. Cykl graniczny, obejmujący cylinder, to w pierwszym zadaniu wypadnięcie silnika z synchronizmu; w drugim pętlicowy ruch samolotu. Cykl graniczny nie obejmujący cylindra, to w pierwszym zadaniu oscylacje ustalone wirnika, tzn. drgania własne silnika synchronicznego; w drugim falisty lot ustalony samolotu. Te same terminy — stan równowagi, cykl graniczny itd. — oznaczają tu zupełnie różne rzeczy. Ale najważniejsze, zdaniem Mandelsztama, jest tu to, że zajmując się teorią drgań wirnika maszyny synchronicznej wzbogacamy nie tylko tę teorię, nie tylko teorię maszyn elektrycznych i elektrotechnikę, lecz również samą teorię drgań, gromadzimy doświadczenie i intuicję do owocnej pracy w innej dziedzinie o podobnych prawidłowościach, w tym wypadku w dziedzinie teorii symetrycznego lotu samolotu.

Andronow pisał w roku 1944: „Nie ulega wątpliwości, że płodna Mandelsztamowska idea «interdyscyplinarnych powiązań teorii drgań» nie tylko nie została jeszcze wyczerpana, jeśli idzie o wnioski, lecz można powiedzieć, że zrobiono tu dopiero pierwsze kroki” [12].

Tym pierwszym krokiem, a w istocie rzeczy pierwszą konkretyzacją Mandelsztamowskiej idei, stała się nowa dyscyplina naukowa — „ogólna dynamika maszyn”, której opracowaniem zajął się Andronow w ostatnich latach życia.

Zadaniem badań układów dynamicznych jest, w ujęciu Andronowa, łączne badanie ilościowe i jakościowe struktury podziału przestrzeni fazowej, dające opis zachowania danego konkretnego układu dynamicznego (a więc i „maszyny”, tzn. masywnego układu dynamicznego) oraz struktury przestrzeni parametrów, opisującej zachowanie tego układu przy zmianie parametrów.

Dla dynamicznego układu opisywanego przez układ równań różniczkowych

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_m)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczają zmienne fazowe układu, a $p_1, p_2, \ldots, p_m$ jego parametry, przez podział przestrzeni fazowej należy rozumieć podział przestrzeni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na trajektorie fazowe, tzn. na krzywe $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$. Pełny opis topologiczny tego podziału, tzn. wyodrębnienie w przestrzeni fazowej najważniejszych ruchów (stabilnych stanów równowagi i stabilnych ruchów okresowych i prawie-okresowych), ustalenie ich sfer przyciągania i wyjaśnienie układu wzajemnego położenia tych przestrzeni, daje w wyniku pełne zbadanie struktury podziału przestrzeni fazowej na trajektorie.

Przez strukturę przestrzeni parametrów $p_1, p_2, \ldots, p_m$ należy rozumieć topologiczną strukturę jej podziału na obszary odpowiadające róż-

[12] A. A. Andronow: *L. I. Mandelsztam*, jw. s. 472.

nym strukturom podziału przestrzeni fazowej na trajektorie. Granice tych obszarów odpowiadają wartościom bifurkacyjnym parametrów, tzn. wartościom parametrów, których przekroczenie może spowodować zmianę struktury podziału przestrzeni fazowej na trajektorie.

Przez „maszynę" rozumiał Andronow masywny układ dynamiczny, tzn. taki układy dynamiczny, „którego przestrzeń fazowa nie zmienia się jakościowo przy dostatecznie małych (o dostatecznie małych pochodnych) zmianach prawych stron równań. Jest to określenie nader ogólne. Z tego punktu widzenia maszyną jest i maszyna parowa z regulatorem, i generator katodowy, i torpeda, i samolot..." [13], słowem, wszelkie urządzenia techniczne. Konkretyzacja idei „interdyscyplinarnych powiązań teorii drgań" w ogólnej dynamice maszyn polega na tym, że wyodrębnia się klasę układów dynamicznych — „maszyn", różnorodnych — jeśli idzie o ich treść fizyczną, ale powiązanych przez wspólne prawidłowości, teoretyczne punkty widzenia, modele matematyczne. Badając urządzenie techniczne koncentrujemy uwagę na strukturze jego równań różniczkowych, na własnościach jakościowych i ilościowych możliwych w nim ruchów, na prawidłowościach drganiowych, pozostających w relacji izoformizmu z prawidłowościami drganiowymi innego urządzenia technicznego.

Koncepcja opracowania ogólnej dynamiki maszyn nie została, niestety, zrealizowana, natomiast rozwinęła się z niej teoria znacznie bardziej ogólna — teoria układów dynamicznych, dla której dynamika maszyn Andronowa jest przypadkiem szczególnym.

Nad rozwinięciem ogólnej teorii układów dynamicznych pracuje obecnie jeden z uczniów Andronowa, profesor J. I. Nejmark. Podstawową koncepcją teoretyczną ogólnej teorii układów dynamicznych jest właśnie idea „interdyscyplinarnych powiązań teorii drgań", „podejście drganiowe" do badania różnych konkretnych układów dynamicznych i w gruncie rzeczy teoria ta stanowi następny etap konkretyzacji zasady izoformizmu w teorii drgań.

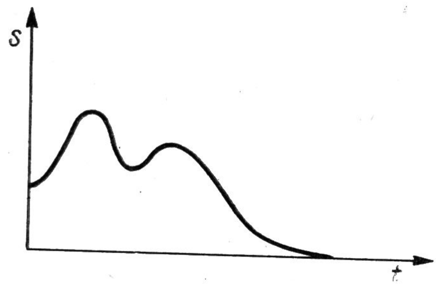
Reczą nową w pojmowaniu „podejścia drganiowego" — stosowanego w ogólnej teorii układów dynamicznych — jest przede wszystkim samo pojęcie „prawidłowości drganiowej". Pojęcie „drgania", „prawidłowości drganiowej" i ich treść zmieniały się w miarę rozwoju teorii drgań. Mandelsztam stwierdził, że „definicje są zadaniem trudnym i niewdzięcznym", że rzeczą ważną i bardziej celową jest tu co innego: „ważne jest wysuwanie idei ogólnych, wybór zasadniczych punktów widzenia". Jednym z nich jest o k r e s o w o ś ć. „Nie ulega wątpliwości, że to, co nazywamy dziś procesami drganiowymi, jest niezmiernie różnorodne — mówił Mandelsztam w swych wykładach z zakresu teorii drgań w roku 1944. — Wszakże teoria drgań rozwinęła się najwidoczniej na gruncie pojęcia — dziś jest ono pojęciem szczególnym w dziedzinie drgań — procesów okresowych lub prawie-okresowych" [14].

Procesy okresowe i prawie-okresowe badano w okresie działalności A. A. Andronowa. Nie doszło jednak jeszcze wtedy do jakiejś formalizacji tego pojęcia, w każdym razie jeden z najbliższych współpracowników Andronowa, profesor G. S. Gorelik, pisał: „Byłoby próżną stratą czasu usiłować przeprowadzić ostrą granicę między drganiami i «nie-

[13] A. A. A n d r o n o w: *Moj poslednij rozgawor s L. I. Mandelsztamom. Sobranije trudow A. A. Andronowa.* Moskwa 1956, s. 523.

[14] L. I. M a n d e l s z t a m: *Lekcji...* Jw. s. 409.

drganiami». Jest rzeczą nader wątpliwą, czy można przeprowadzić umowne rozgraniczenie, które pozwoliłoby orzec, czy na przykład proces przedstawiany na rynsunku jest, czy nie jest drganiem" [15].



Nieco później pojęcie zjawiska drganiowego zaczyna być ujmowane na gruncie pojęcia p o w t a r z a l n o ś c i, szerszego w porównaniu z pojęciem okresowości. Uczeń Mandelsztama, S. E. Chajkin, pisał w roku 1971: „Ogólną cechą charakterystyczną wszystkich ruchów drganiowych jest to, że są one ruchami wielokrotnie powtarzającymi się lub powtarzającymi się w przybliżeniu w określonych odstępach czasu" [16]. Formalizację pojęcia zjawiska drganiowego zaproponował J. I. Nejmark. Wprowadza on przede wszystkim pojęcie ruchu ustalonego. „Pod niezupełnie jednoznacznym terminem ruchu ustalonego rozumiemy ruchy, które ustaliły się po upływie pewnego dostatecznie długiego czasu i które odznaczają się cechą pewnej powtarzalności oraz cechą stabilności" [17].

Przez ruchy drganiowe rozumiemy obecnie — w ramach pojęcia struktury przestrzeni fazowej i przestrzeni parametrów — bądź to, co wiąże się z samym faktem istnienia ruchu ustalonego, bądź to, co wiąże się z procesem przejścia od jednego ruchu ustalonego do drugiego [18].

W ramach tych pojęć wyodrębnione zostają trzy typy zjawisk drganiowych i sformułowane ich właściwości:

1. Zjawiska drganiowe pierwszego typu — to ruchy ustalone. Ich cechy ogólne to stabilność, masywność (z zastrzeżeniem co do stabilnej integralnej różnorodności z otoczką prawie-okresową) i powtarzalność. Modele matematyczne pierwszego typu: stabilny stan równowagi O (normalne, na powierzchni rozdziału i na powierzchni ruchów ślizgowych), stabilny ruch okresowy G, stabilny nieruchomy punkt 0, stabilna toroidalna różnorodność integralna S_x ze stabilną według Lapunowa otoczką prawie-okresową, stabilny zbiór I, który wszędzie przenika ściśle pewna trajektoria fazowa, niestabilna według Lapunowa.

2. Ruchy drganiowe drugiego typu, to procesy zmiany ruchów ustalonych w wyniku bifurkacji spowodowanych zmianą parametrów. Ich cechy charakterystyczne: „miękkie" i „twarde" [19] przejścia, swoista

[15] G. S. G o r i e l i k: *Kolebanija i wołny.* Moskwa 1959 s. 25.
[16] S. E. C h a j k i n: *Fiziczeskije osnowy miechaniki.* Moskwa 1971 s. 87.
[17] J. I. N e j m a r k: *Mietod toczecznych otobrażenij w tieorii nieliniejnych kolebanij.* Moskwa 1972 s. 32.
[18] Tamże s. 159.
[19] Terminy wprowadzone przez A. A. Andronowa. Zob. A. A. A n d r o n o w, S. E. C h o j k i n: *Tieorija kolebanij.* Moskwa 1937.

histereza w zmianie stanów ustalonych. Modele matematyczne zjawisk drganiowych drugiego typu to bifurkacje, przy których jeden ruch ustalony zastąpiony zostaje innym:

$$O \to G, \quad G_1 \to G_2, \quad O \to I, \quad G \to I, \quad I_1 \to I_2.$$

3. Trzeci etap zjawisk drganiowych stanowią procesy przejściowe. Procesy przejściowe określa ruch, który się ustalił i do którego zbliżają się one asymptotycznie. Zbiór procesów przejściowych danego ruchu ustalonego tworzy jego przestrzeń działania [20].

Aparat matematyczny ogólnej teorii układów dynamicznych stanowi metoda odwzorowań punktowych, rozwinięta w konsekwentną teorię w pracach J. I. Nejmarka i innych przedstawicieli gorkowskiej szkoły drgań nieliniowych. Podstawowe wyniki uzyskane w tym kierunku badań, jak również zarys nowej teorii — ogólnej teorii układów dynamicznych, wyłożone są w monografii J. I. Nejmarka *Mietod toczecznych otobrażenij w tieorii nieliniejnych kolebanij.*

Metoda odwzorowań punktowych umożliwia nowe spojrzenie na samo pojęcie układu dynamicznego i tym samym na sposób jego badania. Pojęcie układu dynamicznego ukształtowało się przede wszystkim w mechanice nieba, w której rozpatrywano głównie układy zachowawcze; równania ich ruchu zapisywano w postaci równań Hamiltona. Za życia A. A. Andronowa przez układ dynamiczny rozumiano uogólnienie pojęcia układu dynamicznego zdeterminowanego, opisywanego za pomocą równań różniczkowych. Obecnie istnieją dwa różne podejścia do określania pojęcia układu dynamicznego, jeden oparty na pojęciu stanu, drugi na pojęciu operatora funkcjonalnego. Metoda odwzorowań punktowych związana jest z pierwszym podejściem. Nejmark wprowadza nowe, znacznie bardziej ogólne pojęcie układu dynamicznego, „obejmujące zarówno układy zdeterminowane, jak i stochastyczne, zarówno opisywane za pomocą równań różniczkowych, jak i takie, jak automaty i maszyny dyskretne, które opisuje się za pomocą innych środków (funkcje algebry, łańcuchy Markowa itd.) [21].

Układem dynamicznym w rozumieniu Nejmarka jest wszystko, co zmienia się w czasie. Formalizacja pojęcia układu dynamicznego jest oparta na pojęciach stanu i operatora przekształcenia, opisującego przejście od jednego stanu do drugiego. Wobec tego model matematyczny układu dynamicznego stanowią przestrzeń fazową X i operator T. Przestrzenią fazową X układu S jest przestrzeń wszelkich możliwych stanów układu S. Operator T określa procedurę, której zastosowanie dla opisu $X(t)$ w momencie t pozwala na wyprowadzenie opisu $X(t + \Delta t)$ w momencie $t + \Delta t$. Stany X układu S są to punkty przestrzeni fazowej X.

Zgodnie z tym określeniem klasyfikacja modeli matematycznych układów dynamicznych jest możliwa według struktury ich przestrzeni fazowej X (rozróżnia się przestrzeń fazową ciągłą lub nieciągłą, opis ciągły lub nieciągły zmiany w czasie stanu X) i według postaci operatora T.

Rozpatrując różne modele konkretnych układów dynamicznych można wyodrębnić modele układów dynamicznych klas DU (przestrzeń fazowa ciągła), modele automatowe (stany układu nieciągłe i przestrzenie

[20] J. I. Nejmark: jw. s. 160.
[21] Tamże s. 11.

fazowe nieciągłe), modele dynamiczne procesu adaptacji i uczenia się, modele układów dynamicznych sterowanych przez automaty, modele sterowniczych układów dynamicznych.

J. I. Nejmark w istocie rzeczy do badań konkretnych układów dynamicznych stosuje podejście analogiczne jak L. I. Mandelsztam: nie szuka on różnych podejść, różnych sposobów matematycznych i metod badawczych celem rozwiązania jakiegoś konkretnego zadania, lecz mając określoną, dobrze opracowaną metodę — metodę odwzorowań punktowych, dobiera realne problemy, do których zastosowanie tej metody może okazać się owocne. Taką właśnie drogą powstała ogólna teoria układów dynamicznych, w której uogólnienie pojęcia układu dynamicznego i sformułowanie teorii ogólnej było możliwe dzięki temu, że metoda odwzorowań punktowych, opracowana w zastosowaniu do tradycyjnych problemów teorii drgań, okazała się adekwatnym aparatem matematycznym do badania innych układów dynamicznych i dostatecznie ogólnym instrumentem ich opisu.

Tak więc szybko rozwijająca się ogólna teoria układów dynamicznych już dziś dysponuje sprawnym aparatem matematycznym. Wyrosła ona z teorii drgań i, podobnie jak ta ostatnia, oparta jest na zasadzie izomorfizmu prawidłowości drganiowych (jakkolwiek w znacznie szerszym pojęciu). Jednakże ta nowa teoria stanowi istotny postęp w dziedzinie badań nad dynamiką. Łączenie zjawisk na podstawie prawidłowości ogólnych jest jedną z metod badania fizykalnego, mającą ograniczony zakres zastosowania. Oprócz prawidłowości ogólnych (drganiowych) w układach dynamicznych występują również prawidłowości specyficzne dla danego konkretnego układu dynamicznego, których teoria drgań nie rozpatruje. Dlatego też, choć łączy ona z określonego punktu widzenia liczne działy nauk przyrodniczych, nie może zastępować tych działów. Natomiast może do tego pretendować ogólna teoria układów dynamicznych, do zadań jej bowiem należy nie tylko badanie ogólnych prawidłowości drganiowych układów dynamicznych, lecz również badanie szczególnych, specyficznych prawidłowości. Warto dodać, że szkoła gorkowska uzyskała już liczące się wyniki w zakresie badań konkretnych układów dynamicznych.

Należy tu jeszcze poruszyć kwestię miejsca i znaczenia teorii drgań w naukach przyrodniczych. Problem ten pozostaje w określonym związku z zasadą izomorfizmu, zależny jest od stopnia jej konkretyzacji w teorii drgań i nowych teoriach, które z niej wyrastają, i od dalszego poszerzenia sfery zastosowań zasady izomorfizmu w teorii drgań.

W latach 30-ych L. I. Mandelsztam mówił w jednym ze swoich wykładów o „skromnych zadaniach" teorii drgań, skromnych na przykład w porównaniu z zadaniami mechaniki kwantowej. Jednakże w roku 1944 zrewidował on swój pogląd i stwierdził, że „teoria drgań łączy, uogólnia różne działy fizyki". Twierdzenie to opiera on na ocenie roli izomorfizmu procesów drganiowych w różnych zjawiskach fizycznych. Zasada izomorfizmu wysunięta tu zostaje na pierwszy plan, ona bowiem, jak zaznacza Mandelsztam, decyduje o ogromnym znaczeniu teorii drgań. Co więcej, mówiąc o roli zjawisk okresowych (jednego z fundamentalnych pojęć teorii drgań) w rozwoju fizyki, Mandelsztam podkreśla w istocie fundamentalne znaczenie tej zasady w powstawaniu i rozwoju nauk: „...Być może, ma rację Whitehead, gdy mówi, że narodziny naszej

5

nauki (fizyki) wiążą się z zastosowaniem abstrakcyjnej idei okresowości do dużej liczby oddzielnych zjawisk konkretnych"[22].

Obecnie, kiedy pojęcie okresowości jest w teorii drgań tylko istotnym pojęciem szczególnym, kiedy pojęcie zjawiska drganiowego rozszerzyło się znacznie, poszerzyła się również sfera zastosowań teorii drgań.

W roku 1937 A. A. Andronow rozważał z „drganiowego" punktu widzenia problem współistnienia dwóch gatunków biologicznych (autorem pierwszego modelu matematycznego takiego współistnienia jest V. Volterra). Jest to przykład przenikania teorii drgań w sferę biologii. Andronow zastosował metody teorii drgań nieliniowych do niektórych zadań nieliniowych teorii automatycznej regulacji. Leżąca u podstaw teorii drgań zasad izomorfizmu sprzyjała dalszemu rozszerzaniu tej teorii na nowe dziedziny nauki i techniki (chemia, biologia, cybernetyka i in.). Jednakże proces ten rozwijał się nie dość intensywnie. Jak zaznacza J. I. Nejmark, „...nawet zagadnienia pokrewne teorii regulacji i automatycznego sterowania tylko fragmentarycznie wiązano z teorią drgań. Co więcej, cała dziedzina procesów stochastycznych przeciwstawiała się jakoby dynamicznym zjawiskom drganiowym"[23]. Wypracowaniem ogólnej teorii układów dynamicznych zajął się J. I. Nejmark „w dążeniu do przywrócenia teorii drgań w pewnej mierze pozycji nauki o ogólnych prawidłowościach procesów dynamicznych"[24]. Jak widzieliśmy powyżej, pojęcie układu dynamicznego, wprowadzone przez Nejmarka, w zasadzie zmierza do rozciągnięcia teorii drgań („nauki o ogólnych prawidłowościach procesów dynamicznych") na wszystkie dziedziny nauk przyrodniczych, jakkolwiek konstruowanie modeli matematycznych konkretnych układów dynamicznych nastręcza często wielkie, nie zawsze dające się pokonać trudności.

Ogólna teoria układów dynamicznych Nejmarka, oparta na izomorfizmie prawidłowości drganiowych procesów dynamicznych, stanowiąca jedną z dróg integracji różnych dziedzin nauki, nadaje teorii drgań jeszcze większe znaczenie.

Teoria ta wyrosła z nauki o drganiach, przejęła jej interdyscyplinarny język i pokonując jej ograniczoność stała się teorią prawdziwie łączącą różne dyscypliny[25].

Przełożył Tadeusz Zabłudowski

Е. С. Бойко

ПРИНЦИП ИЗОМОРФИЗМА И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ В РАБОТАХ МОСКОВСКО-ГОРЬКОВСКОЙ ШКОЛЫ

В данной работе содержится анализ развития приложения принципа изоморфизма в теории колебаний (в московско-горьковской школе Мандельштама-Андронова). В дальнейшем развитии теории колебаний и смежных областей, а расширении „сферы ее влияния"

[22] L. I. Mandelsztam: *O naucznych trudach A. N. Kryłowa.* W: *Pamiati A. N. Kryłowa.* Moskwa—Leningrad 1958 s. 18.
[23] J. I. Nejmark, jw. s. 10.
[24] Tamże s. 8.
[25] Autor dziękuje profesorowi N. A. Fufajewowi za cenne rady, ułatwiające opracowanie tego artykułu.

существенную роль сыграло то обстоятельство, что теория колебаний в основу своего построения кладет принцип изоморфизма так называемых „колебательных” закономерностей. Широко и сознательно используемый в теории колебаний еще Рэлеем, он был сформулирован впервые в теории колебаний академиком Л. И. Мандельштамом. Конкретизации принципа изоморфизма в школе Мандельштама-Андронова заключаются в: 1) идее „колебательной взаимопомощи” различных областей физики, выдвинутой Л. И. Мандельштамом 2) так называемой „общей динамике машин” Андронова, 3) общей теории динамических систем Неймарка.

E. S. Bojko

LE PRINCIPE DE L'ISOMORPHISME ET LA THÉORIE DES VIBRATIONS DANS LES RECHERCHES DE L'ÉCOLE MOSCOVITO-GORKOVIENNE

L'ouvrage comprend l'analyse du développement de l'application du principe de l'isomorphisme dans la théorie des vibrations (dans les recherches de l'école moscovito-gorkovienne de Mandelštam et Andronov). Pendant le suivant développement de la tréorie des vibrations et des domaines limitrophes, le fait que la théorie des vibrations a considéré le principe de l'isomorphisme des régularités de vibration comme le point de départ pour ses réflexions, ce fait a joué le rôle important dans l'élargissement de la sphère d'influence de ladite théorie. Bien que ce principe soit déjà largement et sciemment appliqué dans la théorie des vibrations par Rayleigh, il a été formulé pour la première fois dans cette théorie par l'académicien L. I. Mandelštam. Le principe de l'isomorphisme dans les recherches de l'école Mandelštam-Andronov s'est concrétisé: 1° dans l'idée de «l'aide réciproque de vibration» de divers domaines de la physique, proposée par Mandelštam, 2° dans la conception de «la dynamique générale des machines», formulée par Andronov, 3° dans la théorie des systèmes dynamiques de Nejmark.