Maślanka, Krzysztof

Riemann, Mertens i komputery

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 49/2, 33-52

2004

Krzysztof Maślanka
Obserwatorium Astronomiczne
Uniwersytetu Jagiellońskiego
Kraków

RIEMANN, MERTENS I KOMPUTERY

Motto:
„Czytajcie klasyków [matematyki], a wystrzegajcie się wtórnych źródeł.
Ten, kto czyta [tylko podręczniki], jest jak człowiek, który na wystawnej uczcie je przyniesiony suchy prowiant”[1].
H. M. Edwards

„BARDZO PRAWDOPODOBNE” PO RAZ PIERWSZY

W ośmiostronicowej pracy Bernharda Riemanna z roku 1859, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*O ilości liczb pierwszych mniejszych niż dana wielkość*), jedynej, wśród nielicznych jego prac, poświęconej teorii liczb, znajduje się jedno z najbardziej zagadkowych – a z pewnością najbardziej brzemienne w skutki – zdanie, jakie kiedykolwiek napisano w matematycznej publikacji:

> „[...] es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien”[2].

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 49: 2004 nr 2 s. 33–51

> [...] jest bardzo prawdopodobne, że wszystkie pierwiastki są rzeczywiste. Oczywiście, ścisły dowód byłby tu bardzo pożądany. Po kilku krótkich, nieudanych próbach odłożyłem chwilowo na jakiś czas poszukiwania tego dowodu, bowiem nie wydaje się on niezbędny dla kolejnego przedmiotu moich badań.

Po napisaniu tych słów ich autor żył jeszcze siedem lat. Cztery ostatnie to zmagania z postępującą gruźlicą. Zapewne nie raz wracał do zapowiedzianych poszukiwań dowodu. Nie znalazł go jednak. Pomimo wysiłków wielu matematyków do dziś nie znalazł go nikt.

Chodzi tu o pierwiastki, czyli rozwiązania równania ξ(‰ + $i\,t$) = 0, gdzie

$$\xi(s) := \Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

Ryc. 1. Georg Friedrich Bernhard Riemann
ur. 17 września 1826 r. w Breselenz (obecnie Niemcy)
zm. 20 lipca 1866 r. w Selasca (Włochy)

a ζ oznacza sławną funkcję, której związek z liczbami pierwszymi zauważył jeszcze Euler. Geniusz Riemanna podpowiedział mu, by tę właśnie funkcję, oryginalnie określoną na rzeczywistej osi liczbowej, badać na całej płaszczyźnie zespolonej – w duchu głębokiej, choć jawnie nieprecyzyjnej, wypowiedzi matematyka francuskiego, Jacquesa Hadamarda:

> „Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe." [Najkrótsza droga pomiędzy dwiema prawdami w dziedzinie rzeczywistej wiedzie poprzez dziedzinę zespoloną.]

W roku 1989 wybitny francuski matematyk i historyk matematyki, André Weil (1906–1998), opublikował informację na temat możliwej genezy pracy Riemanna z 1859 r. Przyjaciel Riemanna, matematyk Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852), na ostatniej, niezadrukowanej stronie swego egzemplarza sławnej książki Gaussa *Disquisitiones arithmeticae* (w tłumaczeniu francuskim z 1807 r.) zapisał dowód pewnego równania funkcyjnego dla funkcji ζ wraz z łacińską adnotacją: „Scripsi 7 April 1849". Jak pisze Weil:

„Jest rzeczą szczególnie istotną, że właśnie w kwietniu 1849 roku Riemann ostatecznie opuścił Berlin i udał się do Getyngi. Eisenstein był jego bliskim przyjacielem. Jest zatem nie tylko możliwe, ale wręcz bardzo prawdopodobne, że, zanim Riemann wyjechał, obaj przyjaciele dyskutowali o tym dowodzie. To właśnie mogło być genezą pracy Riemanna z r. 1859”[3].

Hipotezę, postawioną dość przypadkowo przez Riemanna w jego pracy z 1859 r., formułujemy dzisiaj następująco: wszystkie zespolone miejsca zerowe funkcji ζ (w literaturze oznaczane najczęściej literą ρ i nazywane po prostu „zerami”) leżą dokładnie na pewnej prostej zwanej krytyczną: $\rho = \frac{1}{2} + i \cdot \gamma$, gdzie $i = \sqrt{-1}$. Cztery pierwsze zera mają postać:

$$\tfrac{1}{2} + i\ 14.13472514173\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} + i\ 21.02203963877\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} + i\ 25.01085758015\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} + i\ 30.42487612586\ldots$$

Gdyby istotnie część rzeczywista wszystkich tych liczb był równa ½, wówczas liczne inne hipotezy teorii liczb byłyby również poprawne. Sformułowane w przeszłości nieco na wyrost, stałyby się automatycznie pełnoprawnymi twierdzeniami. Jednak, w zasadzie, mogłoby się zdarzyć, że któreś, bardzo odległe („wysokie”) miejsce zerowe odstaje od prostej krytycznej. (Można łatwo pokazać, że byłyby, co najmniej, cztery takie miejsca – ze względu na symetrię względem osi x oraz symetrię względem samej prostej krytycznej.) Oznaczałoby to dalej, że nasza wiedza o rozkładzie liczb pierwszych jest, z samej ich natury, wysoce niepełna.

Do dziś nikt nie wie, czy intuicja Riemanna okaże się słuszna[4]. Ten nieśmiały i chorowity człowiek miał, na ogół, rację, ale w matematyce rangę ostateczną ma wyłącznie precyzyjny dowód, a nie pogląd autorytetu – choćby i kogoś na miarę Riemanna. Jednak wspomniana praca, choć pełna niezwykle pomysłowych obliczeń, daleka jest od tej precyzji, która jest obowiązkowym standardem dzisiejszych publikacji. Wiele jej zdań może robić wrażenie, że swoje wyniki autor, w jakiś niepojęty sposób, był stanie bardzo wyraźnie „zobaczyć”, zanim jeszcze próbował je udowodnić. Nie jest to prawda. Lapidarny artykuł z 1859 r. daje obraz Riemanna jako genialnego wizjonera. Jego nieopublikowane notatki dają natomiast obraz Riemanna jako wytrawnego, skrupulatnego rachmistrza. Można powiedzieć, że opublikowana wersja to jedynie zwięzłe streszczenie dogłębnych i bardzo starannych badań. Jeśli po 1859 r. Riemann nie wrócił do tematu liczb pierwszych w formie bardziej przejrzystej, z większą ilością komentarzy[5], to zapewne wskutek postępującej choroby.

Matematyk Carl Ludwig Siegel (1896–1981), który miał okazję przeglądać prywatne notatki Riemanna, zdeponowane w bibliotece w Getyndze[6], znalazł w nich pewien ważny wynik, którego Riemann nigdy nie ogłosił: efektywną formułę do obliczania zespolonych zer funkcji ζ. Prawdopodobnie na podstawie wyników numerycznych uzyskanych za pomocą tej formuły Riemann postawił swą sławną hipotezę. Formuła ta została opublikowana przez Siegela w 1932 r.[7]. Odtąd nosi ona nazwę formuły Riemanna-Siegela. Siegel nie był zresztą pierwszy, który przeglądał spuściznę po Riemannie. Był jednak jedynym, któremu nie brakło cierpliwości oraz fachowej wiedzy, by w trudnych i pozornie chaotycznych notatkach znaleźć prawdziwe perły teorii liczb.

Angielski matematyk i historyk matematyki, Eric T. Bell, porównał dorobek naukowy Riemanna do twórczości angielskiego poety (!) doby romantyzmu, Samuela T. Coleridge'a (1772–1834). Podobieństwo polega na tym, iż zarówno Riemann, jak i Coleridge opublikowali niewiele tekstów; były to jednak zawsze dzieła najwyższej próby[8].

Określenie: „bardzo prawdopodobne" nie przynosi chluby matematykowi; nie jest też z pewnością w duchu tego, co z taką mocą, 41 lat po pracy Riemanna, na II Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Paryżu, deklarował David Hilbert[9]:

„Wir müssen wissen. Wir werden wissen." [Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć.]

Było to entuzjastyczne, i niewątpliwie szczere, wyznanie wiary w skuteczność metod matematycznych, swoiste *credo* życiowe Hilberta, mające odtąd być deklaracją programową wszystkich matematyków. W ich dziedzinie nie ma miejsca na ignorancję, a zrozumienie musi być pełne. Słowa te wyryto później na jego nagrobku w Getyndze.

Ale w roku 1931 Kurt Gödel opublikował przełomową pracę *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (*O twierdzeniach formalnie niedowodliwych*[10] *zawartych w Principia Mathematica*[11] *oraz podobnych systemach*). Podał tam fundamentalny, bardzo ogólny wynik dotyczący wszelkich systemów aksjomatycznych. Pokazał mianowicie, że, korzystając z dowolnego układu aksjomatów, można sformułować takie twierdzenia, których, w ramach tego systemu, nie można ani dowieść, ani obalić; w szczególności, nie można nawet dowieść niesprzeczności danego systemu aksjomatów.

Wynik Gödela nauczył matematyków pokory i dowiódł, że ambitne zalecenia Hilberta są, z przyczyn fundamentalnych, zupełnie nierealne. Wracając do Riemanna: w tym sensie *sehr wahrscheinlich* nie brzmi tak źle – daje bowiem jeszcze nadzieję na uzyskanie pełnego dowodu; *unentscheidbare* zamyka już wszelką drogę i nie pozostawia cienia nadziei.

Praca Riemanna dotyczyła problemu postawionego jeszcze w starożytności: jak wśród wszystkich liczb naturalnych rozmieszczone są liczby pierwsze? Chociaż problem ten można bez trudu przedstawić uczniowi pierwszej klasy szkoły podstawowej, to próby rozwiązania go podejmowali najwięksi przedstawiciele królowej nauk. Jednak, jak stwierdził wybitny matematyk, Paul Erdös (1913–1996), nie doczeka się on nigdy zadowalającego rozwiązania – nawet po upływie miliona lat[12]. Jedno jest pewne: pełna informacja o liczbach pierwszych ukryta jest w rozmieszczeniu zespolonych zer funkcji ζ Riemanna[13].

Z braku lepszego pomysłu problem rozmieszczenia zer funkcji ζ atakowano już od dawna w sposób brutalny i mało estetyczny: metodami numerycznymi. Historia tych badań jest długa i pouczająca; dowodzi znacznego postępu w dziedzinie zarówno stosowanych algorytmów, jak i dostępnych mocy obliczeniowych – od tablic logarytmicznych, poprzez mechaniczne arytmometry, „komputery" analogowe, szybkie, wieloprocesorowe superkomputery, aż do najnowszego projektu[14], w którym liczne komputery z całego świata połączone w sieć posuwają się metodycznie wzdłuż prostej krytycznej polując na ewentualny kontrprzykład: niesforne miejsce zerowe. Znalezienie go byłoby niewątpliwie wielkim triumfem nowoczesnych technik obliczeniowych; jednocześnie byłby to bardzo smutny dzień dla teoretyków liczbowych. Fakt taki oznaczałby bowiem, że rozkład liczb pierwszych jest daleko mniej estetyczny (i daleko mniej zrozumiały), niż w przypadku prawdziwości hipotezy Riemanna.

Tabela[15] ilustruje postęp w numerycznych obliczeniach zer funkcji ζ.

Inna, znacznie bardziej ambitna strategia jest następująca: skoro główny problem okazał się zbyt trudny dla wielu matematycznych gwiazd pierwszej wielkości, należy zaatakować problem inny, „łatwiejszy, ale równoważny". Oczywiście, to ostatnie sformułowanie jest wewnętrznie sprzeczne; powinno być raczej: odmienny, *wyglądający* na łatwiejszy, ale równoważny. W czasie blisko 150 lat istnienia hipotezy Riemanna opublikowano kilkanaście takich równoważnych problemów, które zwykle nazywa się „kryteriami dla hipotezy Riemanna". Jedno z ciekawszych kryteriów znalazł w roku 1991 amerykański matematyk Xian-Jin Li pracujący w Brigham Young University, Utah[16]. W roku 2001 Jeffrey Lagarias podał zaskakujące kryterium[17], w którego sformułowaniu nie występuje wcale funkcja ζ. Najnowsze kryterium podał w lipcu 2003 r. matematyk z Caracas, Luis Báez-Duarte[18].

Tabela 1. Postęp w numerycznych obliczeniach zer funkcji ζ.

Autor(zy)	**rok**	**ilość zer**	**narzędzie**
B. F. Riemann	1859	3 (20?)	papier + ołówek
J. P. Gram	1903	15	tablice logarytmiczne i trygonometryczne
R. J. Backlund	1914	79	
J. I. Hutchinson	1925	138	
E. C. Titchmarsh	1935	1.041	„komputer" elektromechaniczny
A. M. Turing	1953	1.104	komputer elektroniczny, grant 40£
D. H. Lehmer	1955	10.000	
D. H. Lehmer	1956	25.000	
N. A. Meller	1958	35.337	
R. S. Lehman	1966	250.000	
J. B. Rosser, J. M. Yohe, L. Schoenfeld	1968	3.500.000	
R. P. Brent	1977	40.000.000	
R. P. Brent	1979	81.000.001	
R. P. Brent, J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter	1982	200.000.001	
J. van de Lune, H. J. J. te Riele	1983	300,000.001	
J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter	1986	1.500.000.001	komputer Cyber 205, 1500 godzin
A. M. Odlyzko	1989	70.000.000	od zera nr 10^{20}
A. M. Odlyzko	1992	175.000.000	od zera nr 10^{20}
A. M. Odlyzko	2001	10.000.000.000	od zera nr 10^{22}
J. van de Lune	2001	10.000.000.000	
A. M. Odlyzko	2002	20.000.000.000	od zera nr 10^{23}
S. Wedeniwski	2002	75.000.000.000	projekt ZetaGrid
S. Wedeniwski	2003	200.000.000.000	≈ 8,500 komputerów

„BARDZO PRAWDOPODOBNE" PO RAZ DRUGI

Niespełna czterdzieści lat po opublikowaniu przez Riemanna cytowanej na wstępie, jedynej w swym rodzaju pracy, matematyk Franz Mertens[19] napisał zdanie, w którym również pojawił się ów znamienny zwrot – *„sehr wahrscheinlich"*:

> „Da die Ungleichung $|\sigma(m)| < \sqrt{m}$, wie die Induction lehrt, sehr wahrscheinlich ist, so ist auch die Riemann'sche Behauptung sehr wahrscheinlich, dass die imaginären Wurzeln der Gleichung $\zeta(z) = 0$ alle den reellen Bestandtheil ½ haben"[20].

> Ponieważ, jak pokazuje zasada indukcji, nierówność $|\sigma(m)| < \sqrt{m}$ jest bardzo prawdopodobna, zatem bardzo prawdopodobne jest również przypuszczenie Riemanna [mówiące], że zespolone pierwiastki równania $\zeta(z) = 0$ mają wszystkie część rzeczywistą równą ‰ .

Zdanie to stanowi treść tzw. hipotezy Mertensa. Wcześniej hipoteza ta została zakomunikowana w liście Mertensa do Stieltjesa[21]. Przez następnych 88 lat przyciągała ona uwagę matematyków, bowiem jej prawdziwość pociągałaby za sobą prawdziwość hipotezy Riemanna. W roku 1985 dowiedziono, że jest ona fałszywa[22].

Ryc. 2. Franciszek Karol Józef Mertens
ur. 20 marca 1840 r. w Środzie koło Poznania
zm. 5 marca 1927 r. w Wiedniu

Licząca blisko 70 stron praca Mertensa zawiera tylko 19 stron tekstu; resztę stanowią obszerne tablice zawierające wartości[23] tzw. funkcji Möbiusa[24] oraz funkcji, którą autor oznaczył literą σ, a którą dziś, na jego cześć, oznacza się zwykle przez M i nazywa funkcją Mertensa:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = \prod_{i=1}^{k} p_i \\ 0, & p^2 \mid n \end{cases}$$

$$\sigma(x) \equiv M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n)$$

Innymi słowy: funkcja Mertensa dla danego x jest różnicą między ilością liczb naturalnych nie większych od x będących iloczynem parzystej liczby różnych czynników pierwszych, a ilością liczb naturalnych nie większych od x będących iloczynem nieparzystej liczby różnych czynników pierwszych.

Istotą pracy z 1897 r. jest następujące, krótkie i zupełnie elementarne, a jednak bardzo głębokie rozumowanie. Punktem wyjścia jest odwrotność funkcji ζ Riemanna, $1/\zeta$, dla której można łatwo podać warunek regularności (analityczności) na prawo od prostej krytycznej, a regularność ta oznacza właśnie brak miejsc zerowych dla samej funkcji ζ.

Dla $\mathrm{Re}(s) > 1$ mamy:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \left[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n-1)^s} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \int_{n}^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}} \mathrm{d}x$$

$$= s \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{M(x)}{x^{s+1}} \mathrm{d}x = s \int_{1}^{\infty} \frac{M(x)}{x^{s+1}} \mathrm{d}x$$

gdzie korzysta się z faktu, że funkcja Mertensa $M(x)$ jest stała w każdym z przedziałów $[n, n+1)$. Jeśli założyć, że hipoteza Mertensa $|M(x)| < \sqrt{x}$ jest poprawna (od roku 1985 wiemy, że tak nie jest, patrz poniżej), wówczas ostatnia całka definiuje funkcję *regularną* na półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(s) > ½$, skąd wynika, że $\zeta(s)$ nie ma tam zer, a to z kolei jest równoważne hipotezie Riemanna.

Przez kolejnych kilkadziesiąt lat po sformułowaniu przez Mertensa jego hipotezy „weryfikowano" jej poprawność tablicując wartości funkcji $M(n)$ dla coraz większych wartości argumentu[25]. Cierpliwość rachmistrzów w coraz większym stopniu zaczęły wyręczać komputery: znacznie szybsze, bardziej niezawodne. Wszechobecność komputerów jest dzisiaj faktem i jednocześnie znakiem obecnych czasów. Nikt nie kwestionuje ich przydatności. Ich wszechstronność jest zdumiewająca. Użyteczność komputerów w dużych praktycznych obliczeniach numerycznych jest niekwestionowana – zarówno w zagadnieniach naukowych (np. mechanika nieba), jak i przemysłowych. Bez komputerów nie byłoby lotu na Księżyc.

W zagadnieniach czysto teoretycznych, gdzie w grę wchodzi sprawdzenie choćby i bardzo dużej, ale skończonej liczby przypadków przydatność komputerów jest także niewątpliwa. Standardowym przykładem owej przydatności jest podany w 1976 r. przez Kennetha Appela i Wolfganga Hakena, matematyków z Uniwersytetu Illinois, dowód sławnego zagadnienia czterech barw, sformułowanego jeszcze w 1852. r. (Mówi ono, że na dowolnej mapie można pomalować wszystkie kraje czterema kolorami, tak, że kraje mające wspólną granice ze sobą mają różne kolory.) Appel i Haken użyli w tym celu trzech komputerów; bez ich pomocy sprawdzenie wszystkich przypadków byłoby zdecydowanie niemożliwe[26].

W ten sposób pojawiło się jakościowo nowe pojęcie: „dowód komputerowy". Z pewnością nie jest ono w duchu programu Hilberta i może niewątpliwie razić matematycznych purystów – zwolenników czystego myślenia. Ich niechęć nie jest bezpodstawna: o ile bowiem, dzięki komputerom, nie mamy cienia wątpliwości, że zagadnienie czterech barw jest prawdziwe, to zupełnie nie możemy powiedzieć, że *rozumiemy*, dlaczego tak jest. Pracujący w Laboratoriach Bella matematyk Ron Graham wyraził te wątpliwości następująco:

> „The real question is this: If no human being can ever hope to check a proof, is it really a proof?" [Oto prawdziwe pytanie: skoro żaden człowiek nie będzie miał nigdy żadnej nadziei na sprawdzenie pewnego dowodu, to czy będzie to prawdziwy dowód?]

Klasyczne, piękne dowody nie tylko pokazywały prawdę; dostarczały też inspiracji do dalszych badań, prowadziły w kierunku zrozumienia. W historii matematyki często z wielkim uznaniem witano nowe, prostsze dowody sławnych i głębokich twierdzeń[27].

W przypadku teorii liczb sprawa komplikuje się jakościowo: zwykle mamy tu do czynienia z nieskończoną liczbą przypadków, a wobec nieskończoności każda skończona liczba jest nieskończenie mała – i nawet jeśli powszechnie uważa się ją za bardzo dużą, jest to tylko naiwny antropomorfizm.

Historia teorii liczb zna wiele hipotez, które – sądząc na podstawie zgromadzonego, bardzo obszernego materiału numerycznego – uznano za „prawdopodobne" lub wręcz „bardzo prawdopodobne", a które ostatecznie okazały się fałszywe[28].

Czy zatem komputer może powiedzieć cokolwiek na temat prawdziwości hipotezy Riemanna? Wydawać by się mogło, że nic – chyba, że byłby to komputer nieskończenie szybki, albo, że miałby do dyspozycji nieskończony czas. Tak więc pozostaje jedynie kolekcjonowanie coraz „wyższych" zer funkcji ζ i polowanie na ewentualny kontrprzykład: miejsce zerowe leżące poza prostą krytyczną. Tu pojawia się kolejna, czysto techniczna trudność: interpretacja wyników takich obliczeń wymaga zawsze wielkiej ostrożności. Bardzo często wydaje się, że taki sensacyjny kontrprzykład zastał znaleziony; zawsze jednak jest to artefakt, a winę ponosi błąd programu[29].

Mając do dyspozycji wielką liczbę zespolonych zer można jeszcze potraktować je jako swoiste „dane obserwacyjne", jedyny w swym rodzaju, próbkowany „sygnał". W takim sygnale można szukać pewnych prawidłowości, obliczać rozmaite wielkości statystyczne i porównywać je ze znanymi rozkładami.

W ten sposób, zupełnie nieoczekiwanie odkryto, że statystyczny rozkład zer funkcji ζ jest, z niezrozumiałych powodów, identyczny (na poziomie błędu) z rozkładem wartości własnych tzw. macierzy losowych, które od lat 50. XX wieku fizycy z powodzeniem stosowali do heurystycznego opisu ciężkich, skomplikowanych jąder atomowych[30]. Tożsamość tych dwu rozkładów, znana jako hipoteza GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*), stanowi niezwykle tajemniczy związek czystej matematyki z fizyką kwantową. Wobec niewątpliwego kryzysu nowych idei w fizyce teoretycznej, najodważniejsi z uczonych ośmielają się widzieć w tym klucz do głębszego zrozumienia procesów fundamentalnych oraz postępu w poszukiwaniu teorii ostatecznej.

Dwa i pół tysiąca lat temu Pitagoras, na podstawie czysto rozumowych fascynacji, twierdził, iż „wszystko jest liczbą". Mamy dziś więcej podstaw, by podejrzewać, że pogląd ten to coś więcej, niż tylko pusty slogan, karykaturalna ekstrapolacja. W ciągu ostatniego ćwierćwiecza powoli, lecz dość wyraźnie zarysował się następujący, niezwykły obraz: z jednej, „matematycznej" strony niepozorna w swym wyglądzie funkcja ζ, kryjąca w sobie informację o liczbach pierwszych; z drugiej, „fizycznej" – złożone układy kwantowe, zbyt skomplikowane, by można je było opisać jakimkolwiek ścisłym formalizmem. Pośrodku tych tak odmiennych bytów – nieoczekiwany pomost w postaci dobrze określonego rozkładu statystycznego[31] opisującego zarówno zespolone zera ζ, jak i poziomy energetyczne ciężkich jąder atomowych. O tym pomoście nigdy byśmy się nie dowiedzieli, gdyby nie lawinowy postęp w dziedzinie elektronicznych technik obliczeniowych. Ale na proste pytanie: dlaczego? – nikt dzisiaj nie potrafi odpowiedzieć. Nieliczne namiastki „odpowiedzi" mogą robić wrażenie nienaukowych, ale świadczą jedynie o dogłębnej konsternacji wśród uczonych:

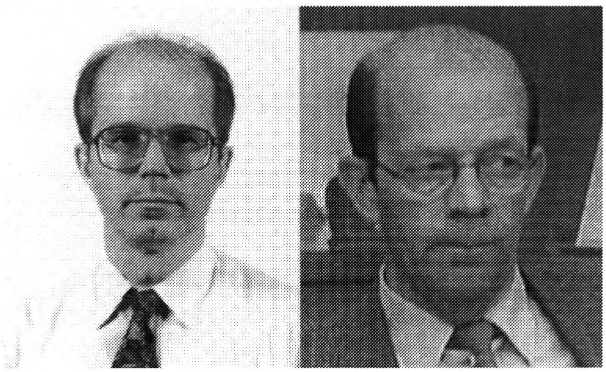
> „Just why number theory and quantum chaos should be soul mates is a mystery for the gods to unveil."[32] [Dlaczego teoria liczb i kwantowy chaos miałyby być bratnimi duszami? – tę tajemnicę mogą wyjawić tylko bogowie.]

KONIEC HIPOTEZY MERTENSA

W roku 1985 pojawił się fundamentalny, absolutnie ścisły wynik, w którym kluczową rolę odegrały również szybkie komputery – wynik daleko głębszy, niż zagadnienie czterech barw i daleko bardziej konkretny, niż hipoteza GUE. Tym razem nie trafił on do nagłówków prasy codziennej. Częściowo dlatego, że bardzo trudno byłoby go przedstawić w atrakcyjnej formie; częściowo zaś dlatego, że był to wynik negatywny: hipoteza Mertensa została obalona[33].

Dowód jest całkowicie precyzyjny, a do jego przeprowadzenia potrzebna była znajomość 2000 początkowych zespolonych zer funkcji ζ z wielką dokładnością 100 miejsc znaczących. Do ich obliczenia wykorzystane zostały najszybsze dostępne wtedy komputery zainstalowane w Academic Computer Center w Amsterdamie: CRAY-1, CDC Cyber 750.

Był to sukces po części planowy, po części zaś przypadkowy. Jak to często bywa, sytuacja musiała „dojrzeć" do tego odkrycia. Potrzebne było stosowne narzędzie, a takim – zupełnie nieoczekiwanie – okazał się odkryty na początku lat 80. XX stulecia skuteczny algorytm do łamania kodów kryptograficznych zwany[34] LLL lub po prostu L^3. Amerykański matematyk polskiego pochodzenia, Andrew Odlyzko[35], skądinąd wybitny specjalista od kryptografii, dostrzegł przydatność algorytmu LLL do rozwiązywania równań diofantycznych. (Trudno o bardziej wymowny przykład na to, jak ważną i przydatną cechą w nauce może być wszechstronność.) Skontaktował się z Hermanem te Riele[36], który już wcześniej pracował nad hipotezą Mertensa i dysponował zbiorem wysokiej precyzji początkowych zer funkcji ζ. W wyniku wspólnej pracy Odlyzko i te Riele pokazali, że dla pewnego x zachodzi: $M(x)\, x^{-\frac{1}{2}}$ jest większe od 1,06. To wystarczy: wynika stąd, że postawiona 88 lat wcześniej przez Mertensa hipoteza (pociągająca za sobą hipotezę Riemanna) nie jest prawdziwa[37].



Ryc. 3. Andrew M.Odlyzko i Hermanus J. J. te Riele

Fakt, że udało się to pokazać, był oczywiście znaczącym sukcesem, ale nie był szczególnym zaskoczeniem. Od lat 40. XX wieku, począwszy od pracy Alberta E. Inghama (1900–1967)[38] oraz innych matematyków, narastała wokół hipotezy Mertensa atmosfera sceptycyzmu. Hipoteza ta implikowała bowiem nie tylko poprawność hipotezy Riemanna (co byłoby nader „pożądane"); implikowała nadto nieuchronnie pewne dobrze określone własności zespolonych zer funkcji ζ – własności tym razem „bardzo nieprawdopodobne". Zera te musiałyby mianowicie spełniać warunki:

$$\sum_{\gamma} c_{\gamma}\, \gamma = 0,$$

gdzie γ oznacza część urojoną zespolonego zera, a wśród współczynników c_γ tylko skończenie wiele jest różnych od zera. Co najdziwniejsze: te niezerowe współczynniki c_γ powinny być liczbami całkowitymi!

Własności te próbowano – bez powodzenia – zweryfikować numerycznie[39]. Sceptycyzm wciąż narastał. Jedynym sposobem uniknięcia paradoksu było dopuszczenie możliwości, że Mertens się mylił. W tej atmosferze pojawił się wynik Odlyzko i te Riele. Podany przez nich dowód również nie jest (i po żadnych modyfikacjach nie może być) w duchu zalecenia Hilberta: przesądza wprawdzie fakt istnienia liczby x, dla której nierówność Mertensa nie jest spełniona, ale nie pozwala nawet na jej oszacowanie, tym bardziej – na efektywne znalezienie. Tak, czy inaczej, kolejna hipoteza teorii liczb okazała się inna, niż wynikająca z olbrzymiego materiału numerycznego, przytłaczająco sugestywna intuicja. Jak napisali autorzy pracy[40], ten negatywny wynik „definitywnie zamknął jedną z możliwych dróg do dowodu hipotezy Riemanna":

> „The disproof of the Mertens conjecture closes off another possible road to proving the Riemann hypothesis."

Dwa lata po tym wyniku matematyk węgierski János Pintz pokazał za pomocą ścisłego rachunku[41], że pierwszy wyjątek (kontrprzykład) dla postawionej przez Mertensa hipotezy, czyli sytuacja, że

$$|M(x)|/\sqrt{x} > 1,$$

zdarzy się na pewno zanim x osiągnie wartość $X = \exp(10^{65})$. Jest jasne, że zakres $x \leq 10^4$, w którym Mertens badał swą funkcję $M(x)$, to niezmiernie drobny ułamek tego oszacowania. Jest także niemal pewne, że nawet bardzo odległe pokolenia przyszłych matematyków nie zdołają sięgnąć numerycznie do tak wielkiej wartości, by naocznie przekonać się o poprawności obliczeń Pintza.

Oczywiście, kwestia ewentualnej słuszności głównego problemu, tj. hipotezy Riemanna pozostaje nadal otwarta, a jego rozwiązanie – i tak niezmiernie trudne – oddaliło się jeszcze bardziej. Hojny amerykański multimilioner L. Thomas Clay, fundator nagród za rozwiązanie siedmiu Problemów Milenium w tym jednym przypadku może być zupełnie spokojny: jest mało prawdopodobne, by jego milion dolarów za hipotezę Riemanna został w najbliższym czasie komukolwiek wypłacony.

Podziękowanie:Panu Profesorowi Andrzejowi Schinzlowi z Instytutu Matematyki PAN dziękuję za wnikliwe przeczytanie tekstu niniejszego artykułu i wskazanie kilku usterek.

Przypisy

[1] Harold M. Edwards: *Riemann's Zeta Function.* Dover Publications, Inc., Mineola, New York 1974 s. ix, s. xi. Wybrane motto oddaje dobrze, jak sądzę, trwałość klasycznego dorobku matematyki – w całkowitym przeciwieństwie do np. astronomii, gdzie przemijalność publikowanych obecnie wyników jest niekiedy wręcz przygnębiająca. W krakowskim Obserwatorium Astronomicznym stare roczniki czasopism, pełne archaicznych technik obserwacyjnych lub nieprecyzyjnych danych, i stąd przez lata nie wykorzystywane przez nikogo, z czasem usunięto z bibliotecznego magazynu. „Czytaj zawsze preprinty dzisiejsze, a nie wczorajsze" – taką, niewątpliwie praktyczną radę, dał kilka lat temu pewien ceniony w świecie astrofizyk jednemu z młodszych adeptów astronomii.

[2] Georg Friedrich Bernhard R i e m a n n : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* „Monatsberichte Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin" 1859 s. 671.

[3] André W e i l : *Prehistory of the Zeta-Function.* [w:] *Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups.* Red: A u b e r t , B o m b i e r i and G o l d f e l d , Academic Press, 1989; André W e i l : *On Eisenstein's copy of the „Disquisitiones".* [w:] *Algebraic number theory.* Boston 1989 s. 463–469.

[4] Tak powszechne w wielu dziedzinach (i uchodzące tam za wielką zdobycz) głosowanie czy sondaż, w matematyce, jako metoda wyboru najlepszej możliwości, byłoby oczywiście czymś absurdalnym. Dlatego jedynie tytułem ciekawostki można podać, że znakomita większość matematyków sądzi (spodziewa się? wierzy?), że hipoteza podana przez Riemanna jest prawdziwa. Niemniej, wybitny matematyk John Edensor Littlewood (1885–1977) uważał (i podał nawet pewne heurystyczne rozumowanie), że hipoteza ta jest błędna. Z kolei specjalista od teorii zbiorów oraz filozof matematyki, Gregory Chaitin, dopuszcza możliwość, że prawdziwość tej hipotezy jest, z samej jej natury, niemożliwa do określenia. Paradoksalnie, powyższe trzy możliwości (prawdziwa, nieprawdziwa, niedowodliwa) nie wyczerpują wszystkich rozpatrywanych w literaturze możliwości! Na kolejną możliwość zwrócił uwagę w 1931 r. Denjoy; później wątek ten podjęli Good i Churchhouse (1963). Przedstawili oni pewne „dowcipne", zupełnie elementarne rozumowanie probabilistyczne dotyczące funkcji Mertensa. (Wykres tej funkcji – jakkolwiek jest ona, z samej swej natury, absolutnie deterministyczna – może robić wrażenie „błądzenia przypadkowego".) Wynik tego rozumowania mówi: „Hipoteza Riemanna jest prawdziwa z *prawdopodobieństwem* równym jeden". Cytowany powyżej Edwards stwierdził, że w tym przypadku argumenty probabilistyczne, „gdy je rozważyć starannie, są całkowicie absurdalne [quite absurd], chociaż dostarczają nikłego światła pozornej wiarygodności [*flitting glimmer of plausibility*] hipotezy Riemanna".

[5] Z czasem zadanie to wykonali inni, np. cytowany powyżej Edwards, który tej jednej pracy poświęcił całą monografię. Pierwszy jej rozdział omawia szczegółowo pracę Riemanna; pozostałych jedenaście rozdziałów poświęconych jest kwestiom, które Riemann pozostawił otwarte.

[6] G. F. Bernhardt R i e m a n n : nie opublikowane zapiski przechowywane w Handschriftenabteilung Niedersächsische Staatsund Universitätsbibliothek, Göttingen.

[7] Carl Ludwig S i e g e l : *Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie.* „Quellen Studien zur Geschichte der Math. Astron. und Phys." 1932 Abt. B: Studien 2, s. 45–80.

[8] Eric Temple B e l l : *Men of Mathematics.* London 1937 The Camelot Press Ltd.. Książka Bella nie jest wolna od pewnych (nielicznych) błędów rzeczowych, niemniej jest to bardzo wnikliwy zbiór biografii. Każda z omawianych postaci jest już w tytule rozdziału scharakteryzowana jakimś trafnym, lapidarnym przydomkiem. Sam Riemann to *anima candida* („szczera dusza"). *À propos* skromnego ilościowo dorobku Riemanna i Coleridge'a: przypomina się tu dewiza naukowa młodego Gaussa: *Pauca sed matura* („Niewiele, ale dojrzałe"). Przeciwieństwem takiego podejścia jest niewątpliwie styl pracy wielu współczesnych naukowców, pracujących bez żadnej szerszej wizji, pod presją masowego kolekcjonowania punktów i cytowań, naiwnie wierzących, że ilość publikacji przejdzie w końcu w jakość. Co do samego Coleridge'a: był on pełen podziwu

dla matematyki, o czym świadczy fragment z jego listu do brata Georga z 31 marca 1791 r.: *„I have often been surprised, that Mathematics, the quintessence of Truth, should have found admirers so few and so languid.”* („Dziwiło mnie zawsze, iż Matematyka, ta istota Prawdy, posiada tak mało miłośników, a i to jeszcze tak nieruchawych.”) Szacunek, a tym bardziej podziw dla matematyki, to nieczęsta cecha wśród poetów. Z polskich twórców chlubnym wyjątkiem był Julian Tuwim, autor wiersza *Matematyka.*

[9] David Hilbert (1862–1943), uważany jest za ostatniego z wielkich matematyków, którzy byli w stanie ogarnąć całość zgromadzonej do jego czasów wiedzy matematycznej. O jego niekwestionowanym autorytecie świadczy fakt, że, pomimo niewygodnego pochodzenia, nawet naziści nie odważyli się pozbawić go posady profesora w Getyndze; pozostał na swym stanowisku po roku 1933. Jest jednak faktem, że ten niezmiernie wszechstronny i płodny naukowiec po tym roku nie napisał już nic.

[10] Tłumaczenie oryginalnego niemieckiego *unentscheidbare* jako „niedowodliwe”, w sensie: nie dające się dowieść, nie jest z pewnością zgrabne. W literaturze anglojęzycznej spotyka się, równie niezgrabne, tłumaczenie *undecidable.*

[11] *Principia Mathematica*, pretendujące do fundamentalnego dzieło Bertranda Russella (1872–1970) i Alfreda N. Whiteheada (1861–1947), napisane w latach 1910–1913. Miało być praktyczną realizacją filozofii matematyki według Hilberta: dogłębnego i kompletnego zrozumienia. Chodziło też i o to, by unikać irytujących paradoksów, powstających już na poziomie – zbyt swobodnie używanego – języka. Autorzy podali tam m. in. formalny, niezmiernie skomplikowany dowód faktu, że 1 + 1 = 2. Reakcja społeczności matematyków była mniejsza od oczekiwanej. Rozciągnięta do granic szaleństwa precyzja, dawała wprawdzie poczucie bezpieczeństwa od nieprzewidzianych paradoksów, ale jednocześnie okazała się paraliżująca. Z czasem matematycy zaczęli zaliczać autorów *Principiów* do filozofów. Sam Russell został w 1950 r. laureatem nagrody Nòbla z literatury (!) „w uznaniu jego różnorodnych i znaczących pism, w których broni ideałów humanitarnych oraz wolności myślenia”.

[12] P. Erdös w wywiadzie dla P. Hoffmana, „Atlantic Monthly” listopad 1987 r. s. 74.

[13] Wynika to z następujących związków dla funkcji ζ:

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{p^s}{p^s - 1} \propto \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

Pierwszy z nieskończonych iloczynów przebiega po wszystkich liczbach pierwszych p; drugi – po wszystkich zespolonych zerach ζ. Por. L. Euler: *Variae observationes circa series infinitas*. „Commentarii” 1737, 1744. Dowód jest krótki i zupełnie elementarny; korzysta on z tego, że każda liczba naturalna posiada jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze.

[14] Projekt ten ruszył w sierpniu 2001 r. Jego autorem i głównym koordynatorem jest Sebastian Wedeniwski z firmy IBM Deutschland. Idea jest następująca: obecnie większość komputerów działa w sieci, a spora część czasu to dla nich tzw. *idle time*, czas bezczynności. W tym właśnie marnowanym czasie może działać niewielki program zwany ZetaGRID. Mam on postać tzw. wygaszacza ekranu: włącza się dyskretnie w czasie bezczynności procesora, wykonuje część obliczeń, a w przypadku powrotu użytkownika do

pracy ustępuje mu miejsca. Każdy posiadacz podłączonego do sieci, niekoniecznie szybkiego, komputera może przystąpić do projektu ZetaGRID instalując ów program. Częściowe wyniki obliczeń są potem opracowane, a łączny rezultat byłby niemożliwy do uzyskania żadnym innym sposobem. Szczegóły projektu i najnowsze wyniki patrz: http://www.zetagrid.net.

[15] Na podstawie: R. Grohmann, S. Wedeniwski: *The IBM ZetaGRID Solution*. IBM preprint, June 17, 2002. Pionierzy tych obliczeń: Gram, Backlund oraz Hutchinson używali metody Eulera-Maclaurina sumowania szeregów, która jest wprawdzie skuteczna – dowolnie odległe zero można obliczyć z dowolną dokładnością – lecz czasochłonna dla „wysokich" zer. (Metodę tę odkrył Euler próbując oszacować wartość $\zeta(2)$.) Po roku 1932 zaczęto używać metody Riemanna-Siegela, równie skutecznej, lecz szybszej. Od 1987 r. Odlyzko używa własnej metody, która pozwala obliczać całe ciągi „wysokich" zer, niekoniecznie poczynając od pierwszego.

[16] Xian-Jin Li: *The Positivity of a Sequence of Numbers and the Riemann Hypothesis*. „Journal of Number Theory" 1997 t. 65 s. 325–333. Por. też: Enrico Bombieri, Jeffrey C. Lagarias: *Complements to Li's Criterion for the Riemann Hypothesis*. „Journal of Number Theory" 1999 t. 77 s. 274–287.

[17] Jeffrey C. Lagarias: *An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis*. arXiv:math.NT/0008177 v2 6 May 2001.

[18] Luis Báez-Duarte: *A new necessary and sufficient condition for the Riemann hypothesis*. Preprint, 13 July 2003. Kryterium to zostało zainspirowane przez nowe rozwinięcie dla funkcji ζ znalezione w 1997 r. przez autora niniejszego tekstu.

[19] Franciszek Karol Józef Mertens (1840–1927) to postać z pogranicza kilku narodowości i kultur: francuskiej, niemieckiej oraz polskiej. Urodził się w Środzie koło Poznania. Studiował matematykę w Berlinie u najlepszych mistrzów: Karla Weierstrassa (1815–1897), Leopolda Kroneckera (1823–1891), Ernsta Kummera (1810–1893) i Elwina Brunona Christoffela (1829–1900). W latach 1865–1884 był profesorem Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie; później pracował w Grazu (jako rektor tamtejszej politechniki) i Wiedniu. Do opuszczenia Krakowa skłonił Mertensa jego przyjaciel, profesor zwyczajny wykładający geometrię wykreślną na Politechnice w Grazu, Karl Pelz. Do czasu twórczej działalności naukowej Mertensa matematyka polska praktycznie nie miała jeszcze dorobku o zasięgu międzynarodowym. Zaliczanie go do matematyków polskich nie jest zabiegiem sztucznym, podyktowanym naiwnie rozumianym patriotyzmem: mówił on biegle po polsku, jego ślub miał miejsce w Krakowie, w kościele Mariackim; część swych prac napisał po polsku, zaś nawet w latach pobytu za granicą starał się przesyłać krakowskiej Akademii Umiejętności polskojęzyczne wersje swych prac. Por. Krzysztof Ciesielski, Andrzej Pelczar, Zdzisław Pogoda: *Franciszek Mertens (1840–1927)*. [w:] *Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki*. Red. Bolesław Szafirski. Kraków 2000, s. 301–312; Stanisław Domoradzki: *Franciszek Mertens (1840–1927)*. „Opuscula Mathematica" 1993 t. 13 s. 109–115; Andrzej Schinzel: *Historia teorii liczb w Polsce w latach 1851–1950*. „Wiadomości Matematyczne" 1993 t. 20 s. 19–50.

[20] Franz M e r t e n s : *Über eine zahlentheoretische Funktion.* „Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften" 1897 Abt. 2a s. 761–830.

[21] Thomas Jan Stieltjes (1856–1894), matematyk holenderski. Godny uwagi jest związany z nim znamienny epizod natury psychologicznej. W roku 1885 Stieltjes ogłosił, że znalazł dowód na to, że $|\sigma(x)\ x^{\frac{1}{2}}|$ jest zawsze ograniczona. (Wówczas hipoteza Riemanna byłaby prawdziwa.) „Dowodu" tego nigdy nie opublikował, ale pogłoski o nim, oraz o jego ważkich konsekwencjach, krążyły wśród matematyków. Z perspektywy czasu i doświadczenia nie ulega wątpliwości, że Stieltjes się mylił i wiedział o tym. Najprawdopodobniej źle rozumiana troska o własną reputację nie pozwalała mu przyznać się do błędu. Por. T. J. S t i e l t j e s : *Lettre a Hermite de 11 juillet 1885, Lettre no. 79.* [w:] B. B a i l l a u d et H. B o u r g e t : *Correspondance d'Hermite et Stieltjes.* Paris 1905 Gauthier-Villars s. 160–164. Dzisiejszy katalog rozmaitych „dowodów" hipotezy Riemanna, dostępnych np. w internecie, jest również dość obszerny, a ich twórcy bardzo pewni siebie.

[22] Andrew M. O d l y z k o , Herman J. J. t e R i e l e : *Disproof of the Mertens conjecture.* „J. Reine Angew. Math." 1985 t. 357 s. 138–160.

[23] Można podziwiać cierpliwość Mertensa, znakomitego teoretyka, któremu przyszło wykonywać nużące zajęcie rachmistrza. Pracę nad tablicowaniem funkcji $\sigma(n)$ w zakresie do $n = 10.000$, która zajęła mu zapewne wiele tygodni, współczesny komputer wykonuje w ułamku sekundy. Dysponując szybkimi komputerami z odpowiednią ilością pamięci można bez trudu przedłużyć tablice funkcji Mertensa do $n = 10^9$. (Tablice te zajęłyby pięć tysięcy tysiącstronicowych tomów.) W zakresie tym nierówność Mertensa nie jest oczywiście ani razu naruszona. Jak sądzi matematyk Andrew Odlyzko, pierwszy kontrprzykład może pojawić się dopiero dla n rzędu 10^{30} lub jeszcze większego, lecz weryfikacja tego leży znacznie poza zakresem możliwości komputerów – zarówno tych dostępnych obecnie, jak i tych, które zostaną zbudowane w dającej się prognozować przyszłości.

[24] Nazwisko Augusta Ferdinanda Möbiusa (1790–1868) kojarzy się głównie z ważnym przykładem powierzchni jednostronnej (tzw. wstęga Möbiusa). Ważna teorioliczbowa funkcja μ została przezeń wprowadzona w pracy z 1831 r. *Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen* (*O pewnej metodzie odwracania szeregów*).

[25] Chodzi tu oczywiście nie tyle o weryfikację sensu stricte, bo to wymagałoby sprawdzenia nieskończonej ilości przypadków, ale o próbę znalezienia pierwszego kontrprzykładu.

[26] Dla ścisłości warto dodać, że dowód Apella i Hakena był słusznie krytykowany i został poprawiony w pracy N. R o b e r t s o n , D. S a n d r e s , P. S e y m o u r , R. T h o m a s : *The four-color theorem.* „J. Combin. Theory", Ser. B 1997 t. 70 s. 2–44.

[27] Klasycznym przykładem jest twierdzenie o liczbach pierwszych, zapostulowane jeszcze w wieku XVIII niezależnie przez Gaussa i Legendre'a, a potem badane (i niemal dowiedzione) przez Czebyszewa:

$$\pi(n) \equiv \text{ilość liczb pierwszych} \leq \text{n dąży do} \infty \text{ jak } n/\log n.$$

Twierdzenie to udowodnili niezależnie w 1896 r. Hadamard oraz de la Vallée Poussin przy użyciu analizy zespolonej. W 1949 r. Paul Erdös (1913–1996) oraz Atle Selberg (ur. 1917) znaleźli dowód „elementarny” – o tyle, że nie odwołujący się do zaawansowanych technik z teorii funkcji zespolonych, niemniej również bardzo skomplikowany. Towarzyszących temu okoliczności nie znajdzie się w żadnym podręczniku teorii liczb: należą one do historii nauki, ewentualnie do psychologii. Nie wszystkie one są jasne. Najwyraźniej pojawił się drażliwy problem pierwszeństwa. Punktem wyjścia dla tego dowodu był pewien wcześniejszy wynik Selberga (formuła asymptotyczna). Kolejny krok wykonał Erdös, zaś zakończenie rozumowania należało do Selberga.

Jest zrozumiałym faktem, że Erdös relacjonował wszystkim nowy wynik. Erdös był już wówczas bardzo znany; o Selbergu, młodym, bardzo zdolnym Norwegu, wiedziano znacznie mniej. Wiadomo też, że Selberg niechętnie przyjmował dochodzące do niego wtórne relacje. Pewne jest jedno: obydwaj wielcy uczeni już potem nie współpracowali. Por. wspomnienie pośmiertne ku czci Erdösa [w:] „The Times”, London, 25 Sept, 1996. Por. też najnowszą biografię Erdösa: Bruce Schechter: *My brain is open. The mathematical journeys of Paul Erdös*. Oxford 1998 University Press

Może się to wydać trywialne, ale wspólny, znaczący sukces nie zawsze utrwala współpracę. Nieodparcie przypomina się tu rewelacyjne osiągnięcie dwu krakowskich fizyków, Zygmunta Wróblewskiego i Karola Olszewskiego, którzy nieoczekiwanie, jako pierwsi, skroplili składniki powietrza (1883). Uprzedzili tym samym renomowanych uczonych francuskich. Niestety, z powodów, których źródłem bywają głębokie zakamarki ludzkiej psychiki, od tego wydarzenia zaczęła narastać wśród nich wzajemna, żywiołowa niechęć.

[28] Jednym z najbardziej uderzających przykładów jest, postulowana na podstawie materiału numerycznego przez Gaussa oraz samego Riemanna w jego pracy z 1859 r., nierówność $\pi(n) - \mathrm{li}(n)$, gdzie $\mathrm{li}(n)$ to logarytm całkowy. W roku 1914 Littlewood dowiódł, że nierówność ta jest nieprawdziwa; co więcej, że znak różnicy $\pi(n) - \mathrm{li}(n)$ zmienia się, ze wzrostem n, nieskończenie wiele razy. Dziś wiemy, że pierwsza zmiana znaku nastąpi dla $n < 10^{371}$. Nie trzeba dodawać, że wartość ta jest poza zasięgiem wszelkich eksperymentów numerycznych. Co więcej, widać, że w teorii liczb wnioski wysnuwane na podstawie zgromadzonego materiału numerycznego, choćby były najbardziej sugestywne, ostatecznie mogą okazać się mylne.

[29] Podejrzane miejsce znalazł ostatnio (2002) A. Odlyzko. Jak napisał w swym najnowszym preprincie: „Two zeros near zero number 1023–846,369,741 cannot be located on the critical line.” Asekuracyjnie jednak dodał, że jest to „true but misleading statement”. W tej sytuacji napisałem do niego o bliższe wyjaśnienia. Oto jego odpowiedź:

„Dear Krzysztof,

Yes, it could be that RH is false, with a counterexample near zero number 10^{23}–846,369,741, but I do not expect that to hold.

If you remember the algorithm that Schönhage and I invented, first values of the zeta function are computed on an evenly spaced grid, and then those are used with an interpolation method to compute zeros. Now the main zero-locating program is only moderately intelligent, so every so often it runs into a situation where it does not find enough zeros, in which case it prints out a warning message, which is a sign to invoke a special program that goes in and does a more careful check. That is what happened *around zero number 10^{23}–846,369,741. Unfortunately, by the time I got around to invoking the special program, the grid values were gone, the result of a mistake I made in moving files around. Hence all I have is the output of the standard program which found 2 zeros too few.*

Best regards, Andrew"

[30] Andrew M. Odlyzko: *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function.* „Math. Comp." 1987 t. 48 s. 273–308; Andrew M. Odlyzko: *Primes, quantum chaos, and computers*, s. 35–46 [w:] *Number Theory, National Research Council 1990*; Andrew M. Odlyzko: *GUE eigenvalues and Riemann zeta function zeros: A non-linear equation for a new statistic.* „Physical Review" 1996 E 54, s. R4493–R4495. Fundamentalną monografią na temat macierzy losowych jest dzieło M. L. Mehta: *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels.* Wyd. drugie. New York 1991 Akademic Press.

[31] Jest to tzw. rozkład Gaudina będący rozwiązaniem nieliniowego równania różniczkowego typu Painleve V.

[32] Barry Cipra: *Prime Formula Weds Number Theory and Quantum Physics.* „Science" 1996 t. 274 s. 2104.

[33] Język angielski posiada tu dwa zgrabne, komplementarne określenia: *proof* (dowód) oraz *disproof* (dowód niepoprawności, obalenie).

[34] Skrót od nazwisk odkrywców: Arjen K. Lenstra, Hendrik W. Lenstra Jr. i Laszlo Lovász: *Factoring Polynomials with Rational Coefficients.* „Math. Ann." 1982 t. 261 s. 515–534.

[35] Andrzej Odłyżko (Andrew Odlyzko), matematyk amerykański pochodzenia polskiego, ur. w Tarnowie w 1949 r. Jako dziecko wyemigrował z rodzicami do USA. Na jednej z najlepszych amerykańskich uczelni – California Institut of Technology (Caltech) – słuchał znakomitych wykładów Thomasa Apostola, od którego dowiedział się m. in. o hipotezie Mertensa. Odkrywca (wspólnie z Arnoldem Schönhage'm) bardzo efektywnej metody obliczania „wysokich" zer funkcji ζ. Korzystając z tej metody obliczył kilka miliardów zer w pobliżu zera nr 10^{22} oraz nr 10^{23}, weryfikując tzw. hipotezę GUE (Gaussian Unitary Ensemble), co z kolei rzuciło wiele światła na hipotezę Hilberta-Pólya'i mówiącą, że zespolone zera funkcji ζ (minus ½, podzielone przez $\sqrt{-1}$) są wartościami własnymi pewnego operatora hermitowskiego, a zatem są wszystkie *rzeczywiste.* Pozostaje do dziś sprawą otwartą to, jakiemu układowi kwantowemu miałby odpowiadać taki operator hermitowski. Atrakcyjność tej ostatniej hipotezy polega na nieoczekiwanej unifikacji teorii liczb i mechaniki kwantowej, a to prowadziłoby pośrednio do wniosku, że najważniejsza z zagadek matematyki, hipoteza Riemanna, jest słuszna.

[36] Hermanus Johannes Joseph te Riele, ur. w 1947 r., wszechstronny uczony holenderski. Studiował inżynierię matematyczną w Delft University of Technology w latach 1965–1970. W roku 1975 uzyskał stopień doktora. Obecnie zatrudniony w CWI w Amsterdamie (Centrum Matematyki i Informatyki). Był szefem następujących projektów badawczych: *Symulacja fizyki plazmy oraz Matematyka finansów.* Obecnie kieruje projektem *Teoria liczb i bezpieczeństwo danych.*

[37] A. M. Odlyzko, H. J. J. te Riele, *dz. cyt.*

[38] Albert E. Ingham: *On two conjectures in the theory of numbers*. „Amer. J. Math." 1942 t. 64 s. 313–319.

[39] P. T. Bateman, J. W. Brown, R. S. Hall, K. E. Kloss and R. M. Stemmler: *Linear relations connecting the imaginary parts of the zeros of the zeta function*. [w:] *Computers in number theory*, Proc. Atlas Symp. Red. A. O. L. Atkin and B. J. Birch, New York 1971 Academic Press s. 11–19.

[40] A. M. Odlyzko, H. J. J. te Riele, dz. cyt.

[41] János Pintz, „Asterisque" 1987 t. 147–148 s. 325–333, s. 346.

Recenzent: prof. dr hab. *Wiesław Wójcik*

Krzysztof Maślanka

RIEMANN, MERTENS AND COMPUTERS

The article discusses two classic hypotheses of the theory of numbers: those of Riemann (1859) and of Mertens (1897), in the context of recent research using computer techniques.

The validity of Riemann's hypothesis remains an extremely difficult research problem of fundamental importance for the question of the distribution of prime numbers. The search for a possible counterexample to the hypothesis has led to the development of effective methods for the numerical calculation of "high" complex zeroes of the Riemann zeta function, and along with time, to the accumulation of high quantities of zeroes. The numerical material has made it possible to put forward a number of interesting statistical hypotheses, which, in the future, are likely to throw more light on the new and very promising field of physics: quantum chaos.

Mertens' hypothesis attracted the attention of mathematicians ever since it was announced, for if the hypothesis were true, it would mean that Riemann's hypothesis was true as well (although not vice versa). However, it was shown already in the 1940s that the hypothesis entails some paradoxical properties of zeroes in the zeta function. Since then it was suspected that the hypothesis might be false. The falsity of the hypothesis was indeed proved in 1985. A key role in proving the hypothesis false was played by modern numerical techniques used in cryptography and by the use of fast computers, without which the proof would not have been possible. This fact has important implications for the traditional understanding of the notion of mathematical proof.