Pelagia Morejko

Klasyfikacja i klasyfikowanie

Nauczyciel i Szkoła 2 (9), 118-123

2000

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Pelagia Morejko

Klasyfikacja i klasyfikowanie

Wprowadzenie

Klasyfikacja jest jednym z ważniejszych pojęć w nauce w ogóle, a w matematyce w szczególności, ze względu na jej walor poznawczy. Dzięki bowiem klasyfikacji powstają nowe pojęcia. Klasyfikacja stanowi również element racjonalnej pracy (zabawy), co widoczne jest dość wyraźnie w życiu codziennym. Tam wszędzie, gdzie o efektach pracy decyduje dobra organizacja, trudno się obejść bez klasyfikowania wielorakich elementów tej pracy. Klasyfikowanie jako pewna umiejętność towarzyszy człowiekowi niemal od pierwszych dni jego życia, oscylując od form stanowiących zaczątek procesu budowania się tej umiejętności, poprzez różne formy przejściowe (nieporadne, jeśli obserwujemy czynności; niepełne, jeśli oceniamy efekt), do klasyfikacji zwanej operacyjną.

Definicja klasyfikacji

W nowoczesnych sklepach obuwniczych buty są sklasyfikowane według rozmiarów; w sklepie spożywczym nie stoją obok siebie na jednej półce mąka, masło, sery i wędliny, lecz produkty te są ułożone na różnych półkach; eksponaty w muzeum klasyfikuje się przez rozmieszczenie ich w różnych salach czy gablotach. W matematyce dokonujemy klasyfikacji wielokątów na wypukłe i niewypukłe, a także dokonując innego podziału: na trójkąty, czworokąty, pięciokąty itd.; liczby naturalne możemy podzielić na parzyste i nieparzyste; trójkąty dzielimy na ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne.

Analizując powyższe przykłady, dostrzeżemy, że za każdym razem w rozważanym zbiorze (butów, produktów spożywczych, wielokątów, liczb naturalnych, trójkątów) wyróżniono pewne podzbiory, przy czym spełnione były następujące warunki:

1) sumą (mnogościową) wyróżnionych podzbiorów jest dany zbiór;
2) każde dwa podzbiory są rozłączne;
3) wyróżnione podzbiory są niepuste.

Podzbiory, o których wyżej mowa, nazywamy klasami abstrakcji lub krótko klasami.

Zauważmy, że zbiory w rozważanych przykładach były jedne skończone (np. zbiór butów), inne nieskończone (np. zbiór trójkątów). Także liczba podzbiorów (klas) była skończona lub nieskończona. Skończony zbiór butów został podzielony na na skończoną liczbę klas — jest ich tyle, iloma rozmiarami butów dysponuje aktualnie konkretny sklep. Wielokątów jest nieskończenie wiele; podział na wielokąty wypukłe i niewypukłe daje dwie klasy. Podział wielokątów na: trójkąty, czworokąty, pięciokąty itd. daje nieskończenie wiele klas. Trójkątów jest nieskończenie wiele; podział na trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne daje trzy klasy.

Zwróćmy uwagę na fakt, że ogólne pojęcie zbioru w matematyce pozwala na tworzenie zbiorów z elementów całkowicie dowolnych i nie związanych ze sobą. Można więc utworzyć zbiór, do którego należy długopis pewnej osoby, konkretne auto stojące na osiedlowym parkingu i ekspedientka z osiedlowego sklepu. Takie jednak pojęcie zbioru jest trudne i nie ma żadnego znaczenia praktycznego, dlatego też tworzy się zbiory z elementów, które posiadając wspólną cechę, odróżniają się w ten sposób od innych elementów. W logice i psychologii tylko taki zbiór bywa nazywany klasą. Zatem wyróżniając w wybranym zbiorze podzbiory w sposób całkowicie arbitralny, jeśli tylko spełnione będą sformułowane wyżej warunki od 1–3, otrzymamy poprawną klasyfikację. Tylko że ta klasyfikacja może się okazać zupełnie nieprzydatną.

Dlatego klasyfikowanie (podział zbioru na klasy) będzie oparte na łączeniu elementów w klasy na podstawie związków zachodzących między nimi (podobieństw, wspólnoty cech itp.). W dalszej części zwrócimy uwagę zarówno na aspekt praktyczny klasyfikacji, jak i jej wykorzystanie dla celów poznawczych, ściśle do budowania nowych pojęć.

Zdobycie umiejętności klasyfikowania, które Piaget (1998) nazywa operacyjnym, trwa dość długo i zawiera się w zasadzie w okresie przedszkolnym. Szczegółowy opis poziomów klasyfikacji, które zdobywa dziecko w wielu przedszkolnym, zamieszczony jest w książce E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1997).

Dziecko w wielu 7–8 lat przejawia już zrozumienie inkluzji (zawierania się) klas. Potrafi równocześnie dostrzegać podobieństwa będące podstawą tworzenia poszczególnych klas, jak i różnice między klasami. Na tym etapie dziecko potrafi przewidywać kryteria, według których nastąpi klasyfikacja; dostrzega możliwości zmiany kryterium (np. klocki można klasyfikować według koloru, kształtu, wielkości i grubości), a także przejawia już zdolność do budowania klasyfikacji hierarchicznych.

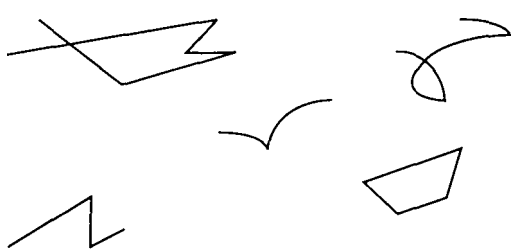
Tworzenie klasy pojęciowej

Tworzenie klasy pojęciowej jest dla ucznia jednym ze sposobów wprowadzania nowego pojęcia. Klasę pojęciową otrzymujemy, tworząc zbiór elementów spełniających określony warunek (jeden lub więcej) i nadając jego elementom nazwę. Na danym etapie wiedzy ucznia nadana nazwa przysługuje tylko elementom utworzonego zbioru. Elementy zbioru — klasy pojęciowej — wybierane są z pewnego z góry ustalonego zbioru. Zbiór ten w procesie nauczania występuje dość niejawnie; jego istnienie jest jednak milcząco zakładane. Proces tworzenia klasy pojęciowej prowadzi zatem do wyróżnienia w danym zbiorze dwóch podzbiorów: zbioru reprezentantów budowanego pojęcia i zbioru pozostałych obiektów. W logice nazywa się ten proces klasyfikacją dwudzielną: na zbiór elementów posiadających daną własność i zbiór elementów nie posiadających jej. Uświadomienie sobie przez ucznia istnienia zbioru, z którego wybierane są elementy celem utworzenia klasy pojęciowej, pozwala na włączenie utworzonej klasy do klasy nadrzędnej.

Rozważmy kilka przykładów.

Przykład 1. Dzieci w przedszkolu wybierają z zestawu klocków logicznych np. podzbiór klocków czerwonych. Ich wyodrębnienie oznacza podział klocków na dwa podzbiory: klocków czerwonych i klocków nieczerwonych.

Przykład 2. Uczeń szczebla początkowego zapoznaje się już z pojęciem łamanej, choć zakres tego pojęcia na tym etapie jest jeszcze dość ubogi. Uczeń obserwuje narysowane różne „linie", a także sam rysuje (przez „linię" będzie tu rozumieć figurę ograniczoną dającą się narysować bez odrywania ołówka od papieru). Na rys. 1 mamy kilka takich linii.



Rys.1.

Uczeń spośród tych linii wybiera na zasadzie podobieństw łamane. Ułatwieniem jest dla niego znajomość odcinka.

Przykład 3. W kl. II uczeń poznaje pojecie liczby parzystej. Po licznych zabiegach dydaktycznych, wśród których niebagatelną rolę odgrywa wskazywanie

tych liczb na osi, a w odpowiednim czasie sprawdzanie podzielności przez dwa, uczeń wyodrębnia ze zbioru liczb naturalnych dwa podzbiory: zbiór liczb parzystych i zbiór liczb nieparzystych. Podzbiory te są rozłączne i każda liczba naturalna należy do jednego z nich. Jest to całkiem już jawny przykład klasyfikacji dwudzielnej. Uczeń jest także w pełni świadomy istnienia klasy nadrzędnej, jaką jest w tym przypadku zbiór liczb naturalnych.

Klasyfikacja według cech

Klasyfikowanie na podstawie własności elementów (cech, warunków) odbywa się w następujący sposób: formułujemy alternatywę warunków zawsze prawdziwą w rozważanym zbiorze i tak, aby koniunkcja każdych dwóch warunków dla każdego elementu klasyfikowanego zbioru była zdaniem fałszywym. Sformułowane warunki są podstawą utworzenia podzbiorów rozłącznych i niepustych i takich, że ich sumą mnogościową jest dany zbiór. Każdy z podzbiorów może tworzyć klasę pojęciową, lub tylko niektóre. Tym, które tworzą klasy pojęciowe, nadajemy nazwy, pozostałym nie. Te ostatnie mogą być nieinteresujące w ogóle lub tylko na danym etapie nauczania.

Przykład 1. Rozważmy zbiór klocków logicznych. Jako cechę ogólną przyjmijmy kształt. Odmianami tej cechy w rozważanym zbiorze są: prostokątność, trójkątność, okrągłość. Zbiór klocków rozpadnie się na trzy podzbiory rozłączne: zbiór klocków prostokątnych, zbiór klocków trójkątnych oraz zbiór klocków okrągłych. Ten sam zbiór można sklasyfikować według cechy „barwa", lub cechy „wielkość", lub cechy „grubość".

Przykład 2. Rozważmy zbiór wszystkich trójkątów. Pewne trójkąty mają wszystkie kąty ostre, inne jeden kąt prosty (dwa pozostałe są wtedy ostre), inne wreszcie jeden kąt rozwarty (dwa pozostałe są ostre). Żaden z trójkątów nie może spełniać dwóch warunków równocześnie i nie ma trójkąta, który nie spełniałby żadnego z warunków. Wyodrębnianie ze zbioru trójkątów tych, które spełniają kolejno jeden z warunków, prowadzi do podziału trójkątów na trzy podzbiory — klasy pojęciowe — na tyle ważne, że nadajemy odpowiednim pojęciom nazwy: trójkąt ostrokątny, trójkąt prostokątny, trójkąt rozwartokątny.

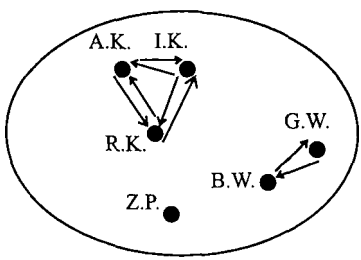
Przykład 3. Zbiór wszystkich wielokątów możemy sklasyfikować w następujący sposób: wybieramy cechę ogólną — liczbę boków i jej odmiany — 3 boki, 4 boki, 5 boków itd. Mamy tu do czynienia z alternatywą warunków: wielokąt ma 3 boki lub wielokąt ma 4 boki lub wielokąt ma 5 boków itd. Każdy z wielokątów spełnia jeden z warunków i tylko jeden. W tym przypadku nastąpi podział na nieskończenie wiele klas. Każda z klas generuje jedno z pojęć: trójkąt, czworokąt, pięciokąt itd.

Klasyfikacja według relacji równoważności

Definiowanie pojęć przez klasy abstrakcji relacji równoważnościowych jest ważną metodą stosowaną w matematyce, ale nie tylko w niej. Według niej postępujemy w następujący sposób: w klasyfikowanym zbiorze wprowadzamy pewną relację równoważności. Każda relacja równoważności ma tę własność, że dzieli zbiór na podzbiory zwane klasami abstrakcji. Podzbiory te są rozłączne i niepuste i ich suma mnogościowa równa się danemu zbiorowi.

Przykład 1. Niech zbiór Z będzie zbiorem osób o inicjałach (w kolejności: imię, nazwisko): A.K., I.K., R.K., B.W., G.W., Z.P. W zbiorze tym wprowadzamy relację: „mam nazwisko na tę samą literę, co ty". Relacja ta jest równoważnością, łatwo bowiem sprawdzić, że jest zwrotna, symetryczna i przechodnia (choć zwrotność wyrażona zdaniem: „mam nazwisko na tę samą literę, co ja" brzmi sztucznie, lecz nie można jej zanegować). Rys.2 przedstawia podaną zależność za pomocą strzałek. Widoczne są również wyraźnie trzy klasy, na które rozpadł się rozpatrywany zbiór osób. Tymi klasami są: zbiór osób o nazwisku na literę K, zbiór osób o nazwisku na literę W oraz zbiór osób o nazwisku na literę P.

Na rysunku nie uwzględniono strzałek oznaczających zwrotność.



Rys.2

Przykład 2.W zbiorze prostych płaszczyzny wprowadzamy relację równoległości. Łatwo sprawdzić, że jest ona równoważnością. Jest bowiem:

— zwrotna, bo $a \parallel a$,

— symetryczna, bo $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$

— przechodnia, bo $a \parallel b$ i $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$,

gdzie a, b, c oznaczają proste. Zależności powyższe zachodzą dla wszystkich prostych ustalonej płaszczyzny.

Relacja równoległości dzieli zbiór prostych płaszczyzny na podzbiory rozłączne i niepuste. Proste każdego z podzbiorów są równoległe, proste należące do różnych podzbiorów nie są równoległe. Każda z otrzymanych powyższych klas wy-

znacza nowe pojęcie matematyczne, jakim jest k i e r u n e k. Kierunków jest nieskończenie wiele. Nie mają one swoich specyficznych nazw.

Podsumowanie

Dwa podstawowe sposoby klasyfikowania: za pomocą warunków (cech, własności) nie są w istotny sposób różne. Można bowiem przejść od jednego sposobu do drugiego, co zostało pokazane wcześniej w już omówionych przykładach. O wyborze sposobu decyduje łatwość konstruowania klas.

W przykładzie, w którym zbiór osób został sklasyfikowany według relacji „mam nazwisko na tę samą literę, co ty", można łatwo przejść do klasyfikacji według cech. Wybierając cechę „pierwsza litera nazwiska" mamy w rozpatrywanym zbiorze trzy jej odmiany: litera K, litera W oraz litera P. Ten drugi sposób jest prostszy.

Klasyfikując klocki według cechy „barwa", można dokonać przejścia do klasyfikacji według relacji. Relację tę można zdefiniować jako „jestem tego samego koloru, co ty". Ten pierwszy sposób jest prostszy.

Zamiana klasyfikacji zbioru prostych płaszczyzny według relacji równoległości na klasyfikację według cechy jest trudna. W tym celu należałoby podjąć dodatkowe zabiegi, wprowadzając układ współrzędnych. Wówczas każda z prostych należąca do jednego kierunku będzie miała ten sam współczynnik kierunkowy. Odrębną w tej konstrukcji klasę będą tworzyć proste równoległe do osi OY. Można też pójść drogą wybraną przez geografa, dokonując wyboru dwóch kierunków wzorcowych: północ-południe oraz wschód-zachód. Wówczas wszystkie pozostałe kierunki mogą być określane przez odchylenia od wybranych wzorcowych.

Bibliografia

K. Ajdukiewicz: *Logika pragmatyczna,* Warszawa 1975.
E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dziecięca matematyka,* Warszawa 1997.
Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*, cz.3, Warszawa 1977.
W. Nowak: *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, Warszawa 1989.
Z. Semadeni (red.): *Nauczanie początkowe matematyki*, t.1, Warszawa 1981.
B. J. Wadsworth: *Teoria Piageta*, Warszawa1998.