

# Agnieszka Wiechula

---

## O trzeciej wartości logicznej

---

Prace Naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. Filozofia nr 5,  
89-96

---

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Agnieszka Wiechula

## O trzeciej wartości logicznej

Artykuł analizuje problem trzeciej wartości logicznej. Zawiera przegląd wybranych ważnych systemów trójwartościowych: J. Łukasiewicza, S.C. Kleenego, D.A. Boczwarę oraz logiki parakonsystentnej, a także motywacje, które doprowadziły do powstania tych systemów, oraz filozoficzne interpretacje trzeciej wartości.

### 1. Uwagi wstępne

Jednym z głównych powodów powstania na początku XX wieku systemów trójwartościowych było spostrzeżenie pewnej ograniczoności logiki klasycznej. Wynikało to z faktu, że nie rozwiązuje ona w sposób zadowalający problemów związanych z występowaniem w języku potocznym zdań, które można zaliczyć do jednej kategorii. Są to mianowicie zdania, których wartość logiczna jest nam w danym momencie nieznana. Nie wiemy, czy rozważane zdanie jest prawdziwe czy fałszywe. Zaliczamy do nich wszystkie te, które orzekają coś o przyszłości, są niezwyfikowanymi założeniami, pojawiającymi się w procesie poznania naukowego, ponadto zdania paradoksalne, a także pary zdań sprzecznych w różnego rodzaju teoriach empirycznych i filozoficznych. Jeśli przyjrzymy się zasadom, na których bazuje logika klasyczna, to zauważymy, że źródło problemu można upatrywać w dwuwartościowości. Zasada ta mówi o tym, że istnieją tylko dwie wartości prawdziwościowe – prawda i fałsz – i każde zdanie musi mieć jedną z tych wartości. Już w starożytności toczono spory co do prawomocności stosowania tej zasady. Stoicy byli jej orędownikami, epikurejczycy przeciwnie, odrzucali ją zupełnie, natomiast Arystoteles stał na pośrednim stanowisku. W IX księdze *Hermeneutyki* rozważał między innymi zdania o przyszłych zdarzeniach przypadkowych, o których nie wiemy, póki się nie wydarzą, czy są prawdziwe, czy fałszywe. Wyznaczają one trzecią kategorię zdań, obok zdań prawdziwych i fałszywych.

Zasada dwuwartościowości razem z wiarygodnymi założeniami dotyczącymi natury czasu może prowadzić do determinizmu. Wszyscy zgodzimy się, że

zdania o zdarzeniach przeszłych i teraźniejszych możemy rozpatrywać w kategoriach prawdy i fałszu. Co jednak począć ze zdaniem o przyszłości? Jeśli teraz przypiszemy im prawdziwość lub fałszywość, będą one tak samo zdeterminowane jak zdania o przeszłości. Różnica polega tylko na tym, że jeszcze nie wydarzyły się. Pojęcie przyszłej przypadkowości byłoby więc iluzją. Jeśli odrzucimy rozważaną zasadę, będziemy mogli wprowadzić dodatkową wartość odpowiadającą problematycznym z punktu widzenia logiki klasycznej zdaniom.

Logika trójwartościowa jest alternatywą wobec klasycznej logiki. Tak jak ona respektuje zasadę prawdziwości funkcyjnej, mówiącą o tym, że wartość zdania złożonego zależy od wartości jego zdań składowych. Odrzuca natomiast zasadę dwuwartościowości i wprowadza dodatkową wartość logiczną. Taką logikę możemy nazwać dewiacyjną (Haack 1974), ponieważ odrzuca pewne prawa ważne w logice klasycznej, ale w dalszym ciągu posługuje się tym samym słownikiem. Logikę trójwartościową możemy więc określić jako ograniczenie logiki klasycznej.

## 2. Motywacje filozoficzne

Przedstawię poniżej główne motywacje, które przyświecały twórcom systemów trójwartościowych. Będą to kolejno systemy: J. Łukasiewicza, S.C. Kleenego, D.A. Boczwara oraz N.C.A. da Costy i I.M.L. D'Ottaviano.

Znaczący wpływ na powstanie w 1920 roku trójwartościowej logiki Łukasiewicza (1920). miały dyskusje prowadzone w szkole lwowsko-warszawskiej. Dotyczyły one między innymi ogólnej teorii przedmiotu Brentana-Twardowskiego-Meinonga, determinizmu, indeterminizmu oraz wolności i twórczości (Woleński 1985). Łukasiewicz był zwolennikiem teorii przedmiotów sprzecznych Meinonga, zgodnie z którą istnieją przedmioty posiadające sprzeczne cechy. Gdyby przedmioty takie w ogóle nie istniały, to nie można by wypowiedzieć na ich temat żadnego sądu prawdziwego, a więc również orzekającego, że nie są przedmiotami. Zdaniem polskiego filozofa i logika przedmioty niesprzeczne nie istnieją. Projektowany system miał za zadanie między innymi umożliwić formalizowanie rozumowań dotyczących przedmiotów sprzecznych. Łukasiewicz był zagorzałym indeterministą, uważał że logika klasyczna z zasadą dwuwartościowości w postaci prawa wyłączonego środka może pociągać za sobą determinizm, jeśli będzie odnosić się do zdań o przyszłości (1961, s. 114–126). Zdania takie należą do odrębnej kategorii, obok zdań prawdziwych i fałszywych; są nieokreślone i posiadają ułamkową wartość  $\frac{1}{2}$  oznaczającą, że zdanie to posiada jedną spośród dwóch wartości, ale dopóki nie dokona się to, o czym mówi zdanie, dopóty nie będziemy tego wiedzieć. Wprowadzając trzecią wartość logiczną odrzucił zasadę dwuwartościowości. Łukasiewicz był także zwolennikiem tezy sformułowanej przez T. Kotarbińskiego w 1913 roku na temat wolności – logika dwuwartościowa nie da się pogodzić z wolnością (Kotarbiński 1913).

Innymi motywacjami kierował się w swej pracy amerykański logik Kleene. Zajmował się on analizą predykatów (funkcji zdaniowych) zdefiniowanych częściowo, czyli takich, których wartości albo nie znamy, albo nie jest ona istotna dla danych rozważań. Jeśli mamy zdania arytmetyczne – predykaty  $Q$  i  $R$ , to zdania z nich złożone za pomocą spójników powinny dać się obliczyć z  $Q$  i  $R$ . Jeśli  $Q(x)$  i  $R(x)$  są zdefiniowane, to również predykat złożony jest zdefiniowany. Co jednak zrobić, gdy jeden lub oba składniki  $Q(x)$  i  $R(x)$  są nieokreślone? Na to pytanie miał odpowiedzieć w 1938 roku system (Kleene 1938), który wprowadził trzecią wartość logiczną, odpowiadającą zdaniom o wartości nieokreślonej lub nieustalonej przy użyciu dostępnych algorytmów. Motywacje Kleenego wywodzące się z arytmetyki można uogólnić do rozważania epistemologicznego problemu nieokreśloności związanego z niepełnością ludzkiej wiedzy, statystycznie potwierdzoną zmiennością przyrody, sprzecznymi sądami ekspertów itp. Często napotykamy zdania rodzące trudności, o których w danym momencie nie wiemy, czy są prawdziwe, czy fałszywe. Mimo to nie chcemy pozostawiać ich w próżni do czasu uzyskania odpowiedniej wiedzy i weryfikować je, badając ich konsekwencje.

Celem rosyjskiego logika Boczwara było rozwiązanie problemu paradoksów (1938) pojawiających się na gruncie logiki klasycznej i teorii mnogości. Podzielił on zdania języka na sensowne i bezsensowne, a następnie odwzorował ten podział w dwustopniowym języku formalnym. Zdanie według logika jest sensowne, gdy jest prawdziwe lub fałszywe. Natomiast zdanie bezsensowne to takie, które nie podlega ocenie z punktu widzenia prawdy i fałszu – posiada dodatkową wartość logiczną. Mowa tu o paradoksach semantycznych – takich, jak antynomia kłamcy, jak również teoriomnogościowych – antynomia Russella, której źródłem jest nieograniczony aksjomat wyróżniania Fregego.

Główną motywacją, która przyczyniła się do powstania logiki parakonsystentnej, był fakt istnienia ważnych sprecznych, lecz nietrywialnych teorii, czyli takich, które zawierają dwa zdania pozornie sprzeczne (zdanie i jego negację): świadectwa składane w sądzie przez różnych świadków, konstytucje i inne dokumenty prawne, teorie empiryczne i filozoficzne oraz informacje zawarte w komputerowych bazach danych. Zwolennicy logiki klasycznej nie mogą włączyć obu tych zdań do teorii, gdyż ze zdania i jego negacji w logice klasycznej można wyprowadzić dowolne zdanie. Mówi o tym prawo przepełnienia:  $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ . W 1948 roku S. Jaśkowski zaproponował skonstruowanie systemu, uwzględniającego nietrywialne teorie, zawierające sprzeczności, który miał usystematyzować i umożliwić badanie teorii, w których sprzeczności wywołane są brakiem precyzji lub których postulaty mogą być sprzeczne – teorie empiryczne. Logika  $\mathbf{J}_3$  zaprezentowana w 1970 roku przez da Costę i D'Ottaviano miała rozwiązać problem Jaśkowskiego.

Zaprezentowane motywacje, które doprowadziły do powstania trójwartościowych systemów rachunku zdań, można podzielić na dwie grupy. Pierwszą z nich stanowią motywacje dynamiczne, w których dodatkowa wartość jest tymczasowo przyporządkowana danemu zdaniu. Tymczasowość jest związana z tym, że choć obecnie nie wiemy, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe, to jednak ten stan niewiedzy w pewnym momencie minie. Zdanie o zdarzeniach przypadkowych, które teraz posiada wartość  $\frac{1}{2}$ , gdy tylko owe zdarzenia dokonają się, uzyska wartość prawdy lub fałszu. Podobnie ze zdaniami nieokreślonymi i sprzecznymi. We wstępnej fazie formułowania teorii mogą pojawić się równie prawdopodobne, lecz sprzeczne zdania, które w dalszych fazach jej budowania zostaną wyeliminowane. Początkowo, nie wiedząc, jaka jest rzeczywista wartość zdania, przypisujemy mu dodatkową wartość, jednak w miarę jak nasza wiedza na dany temat rośnie, wzrasta także nasze przekonanie co do prawdziwości lub fałszywości rozważanego zdania. Dlatego też wprowadzenie trzeciej wartości w systemach Łukasiewicza, Kleenego, da Costy i D'Ottaviano jest uzależnione od poziomu naszej wiedzy.

Druga grupa, to motywacje towarzyszące powstaniu systemu Boczwara – można je nazwać statycznymi. Zdania paradoksalne, którym przyporządkowana jest trzecia wartość logiczna, zawsze pozostaną bezsensowne. Na ten stan nie ma wpływu proces poznania i związany z nim wzrost poziomu naszej wiedzy. Zdania te nigdy nie zmieniają swojej wartości i zawsze będą umiejscowione poza prawdą i fałszem. Statyczność wynika zatem z tego, że wprowadzenie dodatkowej wartości nie zależy od poziomu wiedzy na dany temat.

### 3. Charakterystyka systemów: $L_3$ , $K_3$ , $B_3$ i $J_3$

Przyjrzyjmy się tym czterem systemom i wskaźmy ich podobieństwa oraz różnice. Wszystkie one akceptują zasadę prawdziwości funkcyjnej i posiadają trzecią wartość prawdziwościową. W systemie  $L_3$  Łukasiewicza trzecia wartość występuje w postaci ułamka  $\frac{1}{2}$  i oznacza, że zdanie posiadające tę wartość jest „możliwe” lub „niezdeternowane”. U Kleenego w  $K_3$  i Boczwara w  $B_3$  dodatkowa wartość to  $U$ . Oznacza ona odpowiednio, że zdanie jest „nieokreślone” w  $K_3$  i „bezsensowne” w  $B_3$ . W tych trzech systemach dodatkowa wartość wskazuje na to, że dane zdanie nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Natomiast w logice parakonsystentnej  $J_3$  zdanie, które ma wartość  $\frac{1}{2}$ , jest zarazem prawdziwe i fałszywe. Trzecia wartość i prawda są tu wyróżnione. W systemach  $L_3$ ,  $K_3$  i  $B_3$  wyróżniona jest tylko prawda. Można to zinterpretować w ten sposób: jeśli dodatkowa wartość odpowiada pewnemu pojęciu niepełnej informacji, jak „nieokreślone”, to zwykle nie jest ona wyróżniona; jeśli odpowiada sprzecznej informacji, „równocześnie prawdziwe i fałszywe”, to wtedy jest ona

wyróżniona. Mamy więc do czynienia z jednej strony z prawdą absolutną i dwoma poziomami fałszu, a z drugiej – z dwoma poziomami prawdy (prawdą i prawdą tymczasową) i fałszem absolutnym.

Zwróćmy teraz uwagę na tabelki prawdziwościowe dla spójników logicznych w systemach  $\mathbf{L}_3$ ,  $\mathbf{K}_3$ ,  $\mathbf{B}_3$ ,  $\mathbf{J}_3$ . W systemie  $\mathbf{L}_3$  i  $\mathbf{J}_3$ , 0 oznacza fałsz, a 1 prawdę. W systemach  $\mathbf{K}_3$  (spójniki silne),  $\mathbf{K}_{3*}$  (spójniki słabe) i  $\mathbf{B}_{3z}$  (spójniki zewnętrzne) F to fałsz, a T to prawda. Tabelka negacji jest wspólna dla wszystkich systemów. Tabelki dla koniunkcji i alternatywy w  $\mathbf{K}_3$  i  $\mathbf{J}_3$  są takie same jak w  $\mathbf{L}_3$ . Należy pamiętać, że wartość ułamkowa występuje tylko w  $\mathbf{L}_3$  i  $\mathbf{J}_3$ , w pozostałych systemach mamy  $U$ . Różnice między tymi systemami można zaobserwować, analizując tabelki dla spójnika implikacji.

$p$	$\neg_{\mathbf{L}_3} p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\wedge_{\mathbf{L}_3}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\vee_{\mathbf{L}_3}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

$\rightarrow_{\mathbf{L}_3}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\rightarrow_{\mathbf{K}_{3*}}$	F	U	T
F	T	T	T
U	U	U	T
T	F	U	T

$\rightarrow_{\mathbf{K}_{3*}}$	F	U	T
F	T	U	T
U	U	U	U
T	F	U	T

$\rightarrow_{\mathbf{B}_{3z}}$	F	U	T
F	T	T	T
U	T	T	T
T	F	F	T

$\rightarrow_{\mathbf{J}_3}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

System  $L_3$  różni się znacząco od **KRZ** (Klasycznego Rachunku Zdań) – prawo wyłącznego środka i sprzeczności nie są tu tautologiami, a niektóre kontrtautologie z **KRZ** są niesprzeczne w  $L_3$ . Powyższy fakt jest potwierdzeniem zasady indeterminizmu: alternatywa i koniunkcja dwóch zdań możliwych jest zdaniem możliwym; natomiast niesprzeczność formuły  $p \equiv \neg p$  potwierdza to, że  $L_3$  może formalizować rozumowania dotyczące sprzecznych przedmiotów. W tym systemie tautologiami są formuły postaci  $p \rightarrow p$  i  $p \equiv p$  (Malinowski 1990).

Podstawową własnością  $K_3$  jest fakt, że nie posiada on żadnych tautologii – konserwatywne rozszerzenie logiki dwuwartościowej prowadzi do odrzucenia wszystkich klasycznych tautologii, nawet tych najbardziej oczywistych jak:  $p \rightarrow p$  oraz  $p \equiv p$ .

W 1952 roku Kleene wprowadził oprócz wspomnianych wyżej silnych spójników (np.  $\rightarrow_{K_3}$ ) także słabe spójniki (np.  $\rightarrow_{K_{3*}}$ ). Motywacją były tutaj arytmetyczne funkcje rekurencyjne – rozstrzygalne przy pomocy procedur obliczeniowych. Reguła wartościowania głosi, że niezdecydowanie na jakimkolwiek etapie obliczania czyni całą procedurę niezdecydowaną.

System  $B_3$  jest dwustopniowy, zawiera dwa rodzaje spójników: wewnętrzne (pokrywają się ze słabymi spójnikami Kleenego) i zewnętrzne. Spójniki wewnętrzne są zachowawczymi odpowiednikami klasycznych spójników, a replika zasady Kleenego brzmi: „zdanie złożone zawierające choć jeden składnik bezsensowny jest bezsensowne, w pozostałych przypadkach wartość logiczna jest wyznaczona klasycznie”. Spójniki zewnętrzne mają charakter metajęzykowy i przy ich użyciu opisane są zależności między klasycznymi wartościami zdań, które łączą (0 i  $\frac{1}{2}$  są utożsamione z fałszem).  $B_{3w}$  charakteryzuje tę samą logikę co  $K_{3*}$  – brak tautologii. Natomiast  $B_{3z}$  jest podobna do logiki klasycznej.

W logice  $J_3$  zdanie posiadające wartość  $\frac{1}{2}$  jest określane jako tymczasowo prawdziwe, w przeciwieństwie do wcześniej rozważanych logik. 1 i  $\frac{1}{2}$  są wartościami wyróżnionymi i utożsamiają prawdę. W tym sensie tabelki  $J_3$  mają klasyczny charakter (Epstein 1990, s. 263-287).

#### 4. Interpretacje filozoficzne

Interpretacje trzeciej wartości logicznej można podzielić na epistemologiczne i ontologiczne. Zgodnie z pierwszą interpretacją dodatkowa wartość może się jawić jako wyraz ludzkiej bezsilności. Wynika ona z ograniczonych możliwości

poznawczych człowieka. Dla istot niedoskonałych – zawsze będą istniały niezbadane, a zatem nieokreślone obszary rzeczywistości. Wprowadzenie w systemie logicznym trzeciej wartości można postrzegać jako pogodzenie się z ułomnościami umysłu i traktowanie ich jako czegoś naturalnego, z czym nie da się walczyć.

Interpretacja ontologiczna nie odwołuje się do człowieka jako podmiotu poznającego, ale do samego świata, który nas otacza. Można powiedzieć, że w jego konstrukcji istnieje coś, co nie jest jeszcze ukształtowane, dokonane. Taka potencjalność dotyczy bytów nieistniejących z konieczności, czyli takich, które są, ale mogłyby nie istnieć. Można to określić również w ten sposób: każdy byt jest potencjalnie czymś innym – kamień jako materia (podłoże zmian) jest w możliwości, aby przyjąć formę i stać się rzeźbą. Tak więc kamień jest potencjalnie dziełem sztuki. Zatem trzecia wartość logiczna może być odpowiednikiem potencjalności istniejącej w świecie.

## 5. Komentarz filozoficzny

Poprzez zasadę dwuwartościowości logika klasyczna daje nam wybór między prawdą i fałszem. Jeśli zgadzamy się z pewnym zdaniem, to przyjmujemy, że jest prawdziwe. Jeżeli natomiast nie akceptujemy go, oceniamy je jako fałszywe. Pojawiają się jednak sytuacje, gdy z różnych względów nie potrafimy przyjąć jednoznacznego stanowiska. Nie możemy z całą pewnością ani potwierdzić, ani zaprzeczyć wiarygodności – prawdziwości danego zdania. Między akceptacją – „tak” i odrzuceniem – „nie” pojawia się trzecia możliwość – „nie wiem”. Sformułowanie „nie wiem” dotyczy wszystkich tych sytuacji, gdy nasza wiedza jest niewystarczająca, by opowiedzieć się stanowczo po stronie prawdziwości lub fałszywości problematycznego zdania. Wydaje się, że klasyczna, pełna dychotomia prawdy i fałszu odpowiadałaby bardziej istocie doskonałej, która posiada pełną wiedzę, jest wszechwiedząca. Wtedy w każdej sytuacji wiedziałaby, czy dane zdanie jest absolutnie prawdziwe, czy absolutnie fałszywe. Dla niej istnieją tylko dwie możliwości. Natomiast logika nieklasyczna – trójwartościowa, dopuszczająca więcej możliwości wyboru, poziomy prawdy i fałszu, wydaje się być odpowiedniejsza dla istot takich, jak my. Można ją stosować nie tylko do zdań prawdziwych i fałszywych, ale także do wszystkich tych, które są możliwe, nieokreślone, bezsensowne, parami sprzeczne.



**Literatura:**

1. Boczwar D.A. (1938) *Ob odnom trézhznačnom isčislénii i égo priménénii k analizu paradoksov klassičéskiego rasširennogo funkcjonal'nogo isčislénia*, „Matématičeskij Sbornik” 4, s. 287–308.
2. Epstein R.L. (1990), *The Semantic Foundations of Logic*, Dordrecht.
3. Haack S. (1974), *Deviant Logic*, Cambridge.
4. Jaśkowski S. (1948), *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, „Studia Societatis Scientiarum Torunensis”, Sec. A, vol. I, nr 5, s. 57–77.
5. Kleene S.C. (1938), *On a Notation for Ordinal Numbers*, „The Journal of Symbolic Logic” 3, s. 150–155.
6. Kleene S.C. (1952) *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam.
7. Kotarbiński T. (1913), *Zagadnienie istnienia przyszłości*, „Przegląd Filozoficzny” 16.
8. Łukasiewicz J. (1920), *O logice trójwartościowej*, „Ruch Filozoficzny” 5, s. 170–171.
9. Łukasiewicz J. (1961), *O determinizmie*, w: tenże, *Z zagadnień logiki i filozofii*, Warszawa, s. 114–126.
10. Malinowski G. (1990), *Logiki wielowartościowe*, Warszawa.
11. D'Ottaviano I.M.L., Da Costa N.C.A. (1970), *Sur un problème de Jaśkowski*, „C. R. Acad. Sc. Paris”, Ser. A, t. 270, no. 21, s. 1349–1353.
12. Woleński J. (1985), *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa.