

Kamila Bednarz-Okrzyńska

Modelowanie empirycznych rozkładów stóp zwrotu z akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie za pomocą logarytmicznej i klasycznej stopy zwrotu

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 36/2, 11-25

2014

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Kamila Bednarz-Okrzyńska*

Uniwersytet Szczeciński

MODELOWANIE EMPIRYCZNYCH ROZKŁADÓW STÓP ZWROTU Z AKCJI NOTOWANYCH NA GIEŁDZIE PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE ZA POMOCĄ LOGARYTMICZNEJ I KLASYCZNEJ STOPY ZWROTU

STRESZCZENIE

W pracy wykonano modelowanie rozkładu stóp zwrotu z indeksu WIG, WIG20, MWIG40 i SWIG80 za pomocą rozkładu Gaussa, Laplace'a i rozkładu GED. Obliczenia przeprowadzono dla klasycznej i logarytmicznej stopy zwrotu w celu porównania końcowych rezultatów, jakimi były wyniki testu zgodności chi-kwadrat. Ponadto szczegółowo omówiono i zweryfikowano przydatność trzech metod estymacji parametrów rozkładu GED (metody największej wiarygodności oraz dwóch metod przybliżonych) do modelowania empirycznych rozkładów wybranych indeksów giełdowych.

Słowa kluczowe: stopy zwrotu, rozkład Laplace'a, rozkład GED, estymacja parametrów rozkładu.

Wprowadzenie

Jednym z najważniejszych instrumentów finansowych o charakterze własnościowym jest akcja. Jest to papier wartościowy, który świadczy o udziale jego posiadacza w kapitale spółki akcyjnej. Podstawową kategorią związaną z akcjami i prak-

* Adres e-mail: kamila.bednarz@wzieu.pl.

tycznie stosowaną we wszystkich metodach analiz jest stopa zwrotu, która przede wszystkim umożliwia ocenę opłacalności inwestycji w akcje.

Stopę zwrotu traktuje się jako zmienną losową, której rozkład jest uzyskiwany w wyniku modelowania rozkładu stóp zwrotu. W modelowaniu tym najczęściej wykorzystuje się rozkład normalny, rozkład Generalized Gaussian Distribution, rozkład alfa-stabilny i rozkład t-Studenta. Autorka, mając na uwadze stosunkową złożoność wymienionych rozkładów, proponuje dodatkową aproksymację za pomocą rozkładu Laplace'a.

Zagadnienie modelowania rozkładu empirycznych stóp zwrotu z akcji notowanych na GPW w Warszawie ma bogatą bibliografię, którą szczegółowo przedstawiono w artykule [Bednarz, 2013].

Ze względu na ograniczoną objętość artykułu ograniczono się do modelowania rozkładu stóp zwrotu indeksu WIG, WIG20, MWIG40 i SWIG80 za pomocą rozkładu Gaussa, Laplace'a i rozkładu GED. Dodatkowo szczegółowo omówiono metody estymacji parametrów rozkładu GED.

1. Logarytmiczna i klasyczna stopa zwrotu

Obliczenia wykonano dla klasycznej stopy zwrotu:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

gdzie:

P – kurs w danym momencie czasowym,
oraz logarytmicznej stopy zwrotu:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2)$$

Uwzględniając zależność:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (3)$$

oraz odrzucając dalsze wyrazy, otrzymuje się:

$$\ln(1+x) < x \quad (4)$$

czyli

$$r_t = \ln(1+R_t) < R_t \quad (5)$$

Ze wzoru (5) wynika, że logarytmiczna stopa zwrotu przyjmuje wartość mniejszą, niż zwykła stopa zwrotu.

Założmy, że dane są logarytmiczne jednookresowe stopy zwrotu za okres 1–2, 2–3, 3–4, ..., T–1 – T. Między nimi zachodzi następująca zależność:

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) + \ln\left(\frac{P_4}{P_3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{P_T}{P_{T-1}}\right) = \ln\frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_4}{P_3} \cdot \dots \cdot \frac{P_T}{P_{T-1}} = \ln\frac{P_T}{P_1} \quad (6)$$

Ze wzoru (6) wynika, że logarytmiczna stopa zwrotu za okres 1, ..., T jest sumą jednookresowych logarytmicznych stóp zwrotu, czyli jest wielkością addytywną. Uwzględniając twierdzenie centralne Lindberga-Levy'ego, według którego suma niezależnych zmiennych losowych dąży do rozkładu normalnego, można wnioskować, że miesięczna logarytmiczna stopa zwrotu będzie opisana rozkładem Gaussa. W przypadku stóp tygodniowych (suma pięciu liczb) zjawisko to nie występuje tak jednoznacznie, a rozkład dziennych stóp zwrotu na ogół nie będzie zgodny z rozkładem normalnym.

W literaturze można spotkać obydwie stopy zwrotu, przy czym, autorzy stosują je wymiennie. W artykule wykonano obliczenia dla obu postaci stóp zwrotu w celu porównania końcowych rezultatów, jakimi są wyniki testu zgodności chi-kwadrat.

2. Wybrane metody estymacji parametrów rozkładu GED

W literaturze najpopularniejsze są dwie metody estymacji parametrów rozkładu: metoda momentów i metoda największej wiarygodności [Sobczyk, 2004].

Estymację parametrów rozkładu normalnego przedstawiono w pracy [Bednarz, 2012], natomiast, metody estymacji parametrów rozkładu Laplace'a wyczerpująco opisano w pracy [Purczyński, 2003].

W artykule uwagę skupiono na wykorzystaniu uogólnionego rozkładu Gaussa:

$$f(x) = \frac{\lambda \cdot s}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{s}\right)} \cdot \exp\left(-\lambda^s |x - \mu|^s\right) \quad (7)$$

gdzie:

- $\Gamma(z)$ – funkcja gamma Eulera,
- s – parametr kształtu,
- μ – parametr położenia,
- λ – parametr skali.

Rozkład, którego gęstość opisano wzorem (7), nosi nazwę Generalized Gaussian Distribution (GGD) lub Generalized Error Distribution (GED). Dla $s = 1$ rozkład GGD przechodzi w rozkład Laplace'a (dwuwkładniczy), natomiast dla $s = 2$ uzyskujemy rozkład Gaussa. Stąd też pochodzi nazwa: uogólniony rozkład Gaussa. Ze względu na zmieniającą się wartość parametru kształtu s (wzór (1)) rozkład ten umożliwia modelowanie szeregu zmiennych fizycznych i ekonomicznych. Rozkład GGD z powodzeniem znalazł zastosowanie w modelowaniu rozkładu stóp zwrotu indeksów giełdowych i spółek [Weron, Weron, 1998]. Rozkłady o tak zwanych grubych ogonach znalazły zastosowanie w modelowaniu zmieniającej się w czasie warunkowej wariancji, między innymi w pracach [Hsieh, 1989; Nelson, 1991], gdzie do estymacji modelu GARCH jako rozkład warunkowy wykorzystano rozkład GED.

W celu uproszczenia obliczeń przyjmuje się, że oszacowanie parametru położenia $\hat{\mu}$ wyraża się średnią arytmetyczną $\hat{\mu} = \bar{x}$ lub medianą $\hat{\mu} = med(x)$. W wyniku centrowania (odjęcie od ciągu obserwacji oszacowania parametru $\hat{\mu}$) uzyskuje się rozkład zależny od dwóch parametrów: parametru kształtu s oraz parametru skali λ , opisany gęstością wyrażającą się wzorem (8):

$$f(x) = \frac{\lambda \cdot s}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{s}\right)} \cdot \exp(-|\lambda \cdot x|^s) \quad (8)$$

Właściwości uogólnionego rozkładu błędów po raz pierwszy opisano w pracy [Subbotin, 1923], natomiast wdrożenie rozkładu w zagadnieniach statystyki umożliwiła praca [Box, Tiao, 1962], dzięki której rozkład GGD znalazł szerokie zastosowanie w zagadnieniu modelowania rozkładu.

W artykule zweryfikowano przydatność trzech metod estymacji parametrów GED (MNW oraz dwie metody przybliżone) do modelowania empirycznych rozkładów wybranych indeksów giełdowych.

2.1. Metoda największej wiarygodności (MNW)

Metoda największej wiarygodności zastosowana do rozkładu opisanego wzorem (8) prowadzi do równania [Purczyński, 2003]:

$$gW(s) = s + \Psi\left(\frac{1}{s}\right) + \ln\left(\frac{s}{N} \sum_{k=1}^N |x_k|^s\right) - \frac{\sum_{k=1}^N |x_k|^s \ln|x_k|}{\sum_{k=1}^N |x_k|^s} = 0 \quad (9)$$

gdzie $\Psi(z) = \frac{d}{dz} [\ln \Gamma(z)]$.

W wyniku rozwiązania równania (9) szacuje się parametr kształtu \hat{s} , a następnie ze wzoru (10):

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{N}{\hat{s} \sum_{k=1}^N |x_k|^s} \right)^{\frac{1}{\hat{s}}} \quad (10)$$

oszacowuje parametr $\hat{\lambda}$.

2.2. Aproksymacja metodą momentów (AMM)

W pracy [Krupiński, Purczyński, 2006] wykorzystano metodę estymacji parametrów rozkładu GED opartą na momentach absolutnych. Estymator momentu rzędu m ma postać:

$$\hat{E}_m = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N |x_k|^m \quad (11)$$

Dla dwóch różnych wartości momentów m_1 i m_2 wyznacza się wyrażenie:

$$G(s) = \frac{E_{m_1}^{\frac{m_1}{s}}}{(E_{m_2})^{\frac{m_1}{s}}} \quad (12)$$

będące funkcją parametru kształtu s .

Parametr kształtu s szacuje się w postaci funkcji odwrotnej do funkcji $G(s)$. W pracy [Krupiński, Purczyński, 2006] zaproponowano następującą postać funkcji odwrotnej:

$$\hat{s} = \left(\frac{\ln(G(s)) - a}{b} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (13)$$

W tabeli 1 zamieszczono wartości współczynników a , b , c dla poszczególnych zestawów wartości momentów. Współczynniki te wyznaczono na drodze symulacji komputerowych, jako prowadzących do najmniejszych wartości błędu średniokwadratowego, stąd nazwa metody „aproxymacja metodą momentów” (AMM).

Tabela 1. Oceny parametrów modelu (13)

Wartości momentów	a	b	c	Oszacowanie \hat{s}
$m_1 = 0,1 ; m_2 = 0,5$	-0,00925	-0,01604	-1,0153	\hat{s}_0
$m_1 = 0,5 ; m_2 = 1$	-0,04606	-0,07470	-1,0689	\hat{s}_1
$m_1 = 1 ; m_2 = 2$	-0,12496	-0,22172	-1,1374	\hat{s}_2
$m_1 = 2 ; m_2 = 3$	-0,15917	-0,34935	-1,1966	\hat{s}_3

Źródło: [Krupiński, Purczyński, 2006].

Algorytm zaproponowany w pracy [Krupiński, Purczyński, 2006] jest następujący: na podstawie wzorów (11)–(13) oraz tabeli 1 wyznacza się wartość oszacowania parametru kształtu \hat{s}_2 . Następnie, zgodnie z zależnością (14), oblicza się oszacowanie końcowe $\hat{s}a$:

$$\hat{s}a = \begin{cases} \hat{s}_3 & \text{dla } \hat{s}_2 > 1,85 \\ \hat{s}_2 & \text{dla } 1 < \hat{s}_2 \leq 1,85 \\ \hat{s}_1 & \text{dla } 0,5 < \hat{s}_2 \leq 1,0 \\ \hat{s}_0 & \text{dla } \hat{s}_2 \leq 0,5 \end{cases} \quad (14)$$

Na koniec na podstawie oszacowania $\hat{s}a$ szacuje się parametr $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{\hat{s}}\right)}{E_m \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\hat{s}}\right)} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (15)$$

gdzie $m = m_1$ lub $m = m_2$.

2.3. Przybliżona metoda momentów (PMM)

W pracy [Purczyński, Bednarz, 2012] zaproponowano modyfikację metody AMM. Przyjmując we wzorze (12) $m_2 = 2 \cdot m_1$, uzyskuje się:

$$g = \frac{E_{2m_1}}{(E_{m_1})^2} \quad (16)$$

Funkcja odwrotna do funkcji g (wzór (16)) ma następującą postać, zależną od wartości momentów $m_2 = 2 \cdot m_1$:

$$m_1 = 0,25; \quad m_2 = 0,5 \quad \hat{s}_0 = \begin{cases} 55g^{-70} + 0,73 & \text{dla } g \leq 1,079 \\ 5,7g^{-28} + 0,315 & \text{dla } 1,079 < g < 1,132 \\ 2,05g^{-15} + 0,18 & \text{dla } g \geq 1,132 \end{cases} \quad (17a)$$

$$m_1 = 0,5; \quad m_2 = 1,0 \quad \hat{s}_1 = \begin{cases} 26g^{-18} + 0,67 & \text{dla } g \leq 1,27 \\ 5,5g^{-9} + 0,365 & \text{dla } g > 1,27 \end{cases} \quad (17b)$$

$$m_1 = 1; \quad m_2 = 2,0 \quad \hat{s}_2 = \begin{cases} 29g^{-7} + 0,8 & \text{dla } g \leq 2 \\ 5g^{-3} + 0,37 & \text{dla } g > 2 \end{cases} \quad (17c)$$

$$m_1 = 2 \quad m_2 = 4 \quad \hat{s}_3 = \begin{cases} 12g^{-1,98} + 0,64 & \text{dla } g \leq 6 \\ 6g^{-1,3} + 0,42 & \text{dla } g > 6 \end{cases} \quad (17d)$$

Oszacowanie końcowe \hat{sp} wyznacza się z następującej zależności:

$$\hat{sp} = \begin{cases} \hat{s}_3 & \text{dla } \hat{s}_1 > 1,9 \\ \hat{s}_2 & \text{dla } 1,4 < \hat{s}_1 \leq 1,9 \\ \hat{s}_1 & \text{dla } 0,53 < \hat{s}_1 \leq 1,4 \\ \hat{s}_0 & \text{dla } \hat{s}_1 \leq 0,53 \end{cases} \quad (18)$$

Na koniec na podstawie oszacowania \hat{sp} ze wzoru (15) oszacowano parametr $\hat{\lambda}p$. W odróżnieniu od poprzedniej metody (AMM) proponowaną metodę nazwano „przybliżoną metodą momentów” (PMM).

3. Wyniki aproksymacji rozkładów empirycznych stóp zwrotu z indeksów giełdowych notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie za pomocą logarytmicznej i zwykłej stopy zwrotu

Rozpatrzono wartości kursu zamknięcia na podstawie danych dziennych, indeksów giełdowych WIG, WIG20, MWIG-40 i SWIG80. Okres obserwacji wzięty pod uwagę obejmował lata liczone wstecz od dnia 30 marca 2013 roku, dla których uzyskano pozytywne wyniki testu chi-kwadrat w odniesieniu do modelowania rozkładu stóp zwrotu tych indeksów za pomocą rozkładu normalnego, Laplace’a i rozkładu GED. Na podstawie analizy można stwierdzić, że wzrost liczby obserwacji przyczyniał się do pogorszenia wyników testu zgodności rozkładu przez wzrost wartości statystyki testu.

Ze względu na ograniczony zakres artykułu nie podano wyników testu chi-kwadrat dla rozkładu Gaussa. We wszystkich rozpatrzonych przypadkach stwierdzono niezgodność rozkładów empirycznych z rozkładem normalnym. Ograniczono się zatem do przedstawienia wyników testu dla rozkładu Laplace’a i GED.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki wybranych wartości statystyk opisowych rozważanych klasycznych i logarytmicznych stóp zwrotu z indeksów giełdowych WIG, WIG20, MWIG40 i SWIG80.

Tabela 2. Wartości wybranych statystyk opisowych klasycznych i logarytmicznych stóp zwrotu z indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie

Parametry opisowe	WIG		WIG20		MWIG40		SWIG80	
	stopa klasyczna	stopa logarytmiczna	stopa klasyczna	stopa logarytmiczna	stopa klasyczna	stopa logarytmiczna	stopa klasyczna	stopa logarytmiczna
Wartość najmniejsza	-9,775	-10,286	-8,096	-8,443	-8,699	-9,101	-7,701	-8,014
Wartość największa	8,213	7,893	8,497	8,155	5,255	5,121	5,160	5,031
Rozstęp	17,988	18,18	16,593	16,598	13,954	14,223	12,861	13,045
Wartość przeciętna	0,056	0,044	0,033	0,021	-0,030	-0,038	0,053	0,046
Mediana	0,0566	0,0565	0,0477	0,0477	0,0098	0,0098	0,1271	0,1272
Odchylenie standardowe	1,513	1,515	1,555	1,557	1,275	1,283	1,164	1,171

Źródło: opracowanie własne

Minimalną stopę zwrotu, zarówno klasyczną jak i logarytmiczną, osiągnął indeks WIG, a maksymalną – indeks WIG20. Jedynie dla jednego indeksu (MWIG40) średnia wartość klasycznej i logarytmicznej stopy zwrotu była ujemna. Średnie wartości stóp zwrotu dla pozostałych indeksów miały wartości dodatnie. Najwyższą i niemal taką samą wartość odchylenia standardowego osiągnęła klasyczna i logarytmiczna stopa zwrotu z indeksu WIG20. Zgodnie z nierównością (5) dla danego indeksu giełdowego wartości uzyskane dla logarytmicznej stopy zwrotu (wartości najmniejsza, największa, przeciętna) były mniejsze niż odpowiadające wartości dla zwykłej stopy zwrotu. Duże znaczenie praktyczne może mieć istotna różnica między wartościami przeciętnymi. Na przykład dla indeksu WIG20 uzyskano następujące wartości przeciętne: według zwykłej stopy zwrotu $E_z = 0,03331\%$, a według logarytmicznej stopy zwrotu $E_L = 0,02121\%$. Stąd $\frac{E_z}{E_L} = \frac{0,03331}{0,02121} = 1,570$. Oznacza to, że wartość przeciętna E_z była o 57% większa niż wartość przeciętna E_L . Wartość mediany nie zależy od rodzaju stopy: różnice między $med(x)_z$ a $med(x)_L$ wystąpiły na czwartym miejscu po przecinku.

W tabeli 3 zamieszczono wartości unormowanych statystyk testu chi-kwadrat dla rozkładu Laplace'a. Przedstawiono w niej maksymalny okres przydatności roz-

kładu, a także wyniki testu chi-kwadrat uzyskane metodą momentów oraz metodą największej wiarygodności dla klasycznej i logarytmicznej stopy zwrotu. Wyniki testu chi-kwadrat przedstawiono w postaci unormowanej wartości statystyki:

$$h = \frac{H}{Hkr} \quad (19)$$

Hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z założonym rozkładem teoretycznym odrzucano, gdy $h > 1$.

Tabela 3. Wartości unormowanych statystyk h dla rozkładu Laplace'a

Indeks	Liczba lat	Liczba obserwacji	MNW		MM	
			stopa zwykła	stopa logarytmiczna	stopa zwykła	stopa logarytmiczna
WIG	18	4505	0,993	1,032	0,858	0,862
WIG20	11	2761	0,781	0,876	0,741	0,829
MWIG40	6	1502	1,032	1,050	1,003	1,031
SWIG80	8	2006	0,854	0,933	0,832	0,920

Źródło: opracowanie własne.

Porównując końcowe rezultaty, jakimi są wyniki testu zgodności chi-kwadrat wykonane dla obu postaci stóp zwrotu, można zauważyć, że zastosowanie klasycznej stopy zwrotu jest korzystniejsze dla modelowania rozkładu empirycznych stóp zwrotu z indeksów notowanych na GPW w Warszawie za pomocą rozkładu Laplace'a. We wszystkich analizowanych przypadkach wyniki testu chi-kwadrat dla logarytmicznej stopy zwrotu były wyższe niż dla zwykłej stopy.

W tabeli 4 zaprezentowano wyniki modelowania rozkładu klasycznych i logarytmicznych stóp zwrotu indeksów: WIG, WIG20, MWIG40 i SWIG80, za pomocą rozkładu GED. Przedstawiono wyniki zastosowania trzech metod estymacji parametrów rozkładu GED (MNW oraz dwóch metod przybliżonych) w celu zbadania ich przydatności do modelowania empirycznych rozkładów wybranych indeksów giełdowych. Rozpatrzono dwie metody centrowania ciągu obserwacji: przez odjęcie średniej arytmetycznej $\hat{\mu} = \bar{x}$ oraz mediany $\hat{\mu} = med(x)$.

Tabela 4. Wyniki testu chi-kwadrat dla rozkładu GED

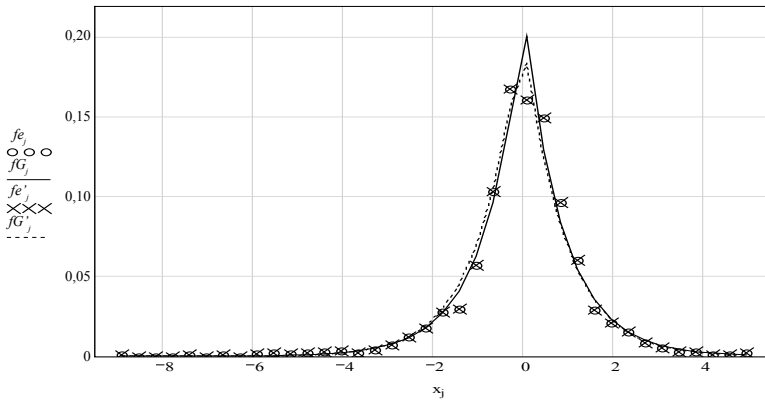
Indeks	MNW		AMM		PMM	
	stopa klasyczna	stopa logarytmiczna	stopa klasyczna	stopa logarytmiczna	stopa klasyczna	stopa logarytmiczna
centrowanie za pomocą wartości przeciętnej						
WIG	0,750	0,759	0,862	0,837	0,841	0,855
WIG20	0,777	0,783	0,637	0,794	0,689	0,685
MWIG40	1,201	1,254	0,984	1,228	0,996	1,187
SWIG80	1,686	1,738	1,636	1,567	1,570	1,567
centrowanie za pomocą mediany						
WIG	0,815	0,882	0,883	0,934	0,876	0,922
WIG20	0,66	0,689	0,610	0,631	0,803	0,684
MWIG40	1,087	1,110	1,007	1,032	0,991	1,031
SWIG80	0,983	1,121	0,893	0,971	0,902	1,042

Źródło: opracowanie własne.

Z tabeli 4 wynika przewaga modelowania rozkładu klasycznej stopy zwrotu z analizowanych indeksów za pomocą rozkładu GED nad rozkładem stopy logarytmicznej. Uwzględniając trzy metody estymacji parametrów oraz centrowanie za pomocą wartości przeciętnej, w 8 na 12 przypadków klasyczna stopa zwrotu uzyskała przewagę wyrażającą się mniejszą wartością unormowanej statystyki testu chi-kwadrat. W przypadku centrowania za pomocą mediany tylko w jednym (indeks WIG20/PMM) spośród 12 przypadków modelowanie za pomocą logarytmicznej stopy zwrotu prowadziło do mniejszej wartości statystyki h . W tabeli 4 zaobserwowano również istotne różnice wyników testu chi-kwadrat dla centrowania za pomocą wartości przeciętnej, szczególnie wyraźne dla wyników metody AMM w odniesieniu do indeksu giełdowego MWIG40. Mianowicie, dla stopy klasycznej uzyskano unormowaną statystykę $h = 0,984$ (pozytywny wynik testu), a dla stopy logarytmicznej $h = 1,228$ (negatywny wynik testu).

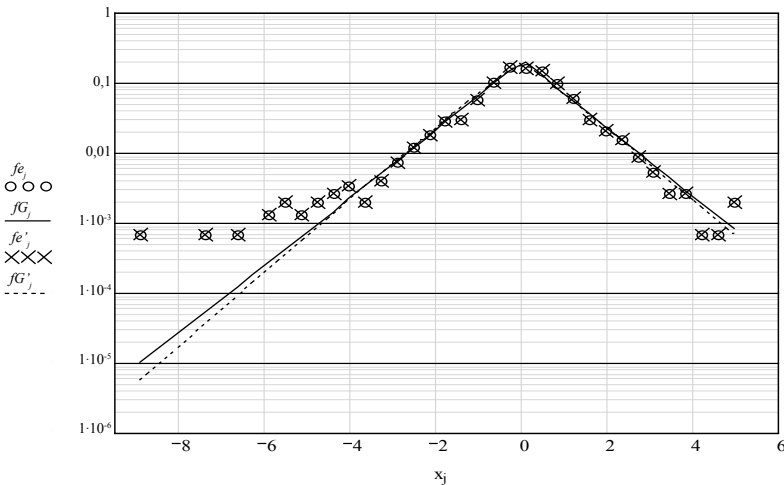
Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono rozkład empiryczny oraz teoretyczny GED wyznaczony przybliżoną metodą AMM. Dla $x_j < 0$ widoczne jest lepsze dopasowanie do danych empirycznych krzywej teoretycznej fG_j (linia ciągła) niż krzywej fG'_j (linia kropkowana) odpowiadającej logarytmicznej stopie zwrotu. Potwierdzają to wyniki testu chi-kwadrat zamieszczone w tabeli 4.

Rysunek 1. Porównanie wyników wykorzystania klasycznej i logarytmicznej stopy zwrotu indeksu MWIG40 dla $N = 1502$ obserwacji. Klasyczna stopa zwrotu: gęstość empiryczna f_{e_j} zaznaczona kółkami oraz gęstość teoretyczna fG_j (linia ciągła) uzyskana metodą przybliżoną AMM. Logarytmiczna stopa zwrotu: gęstość empiryczna f'_{e_j} zaznaczona ikсами oraz gęstość teoretyczna $f'G_j$ (linia przerywana) – metoda AMM. Wartości stóp zwrotu wyrażone w procentach odłożone na osi odciętych x_j



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Porównanie wyników wykorzystania klasycznej i logarytmicznej stopy zwrotu indeksu MWIG40 dla $N = 1502$ obserwacji z zastosowaniem skali logarytmicznej. Oznaczenia jak na rysunku 1



Źródło: opracowanie własne.

Szczegółowa analiza wyników estymacji pozwala stwierdzić, że do modelowania empirycznych rozkładów wybranych indeksów giełdowych najlepiej nadaje się aproksymacja metodą momentów i przybliżona metoda momentów, przy czym pierwsza wypada korzystniej w modelowaniu rozkładu stóp zwrotu z wykorzystaniem klasycznej stopy, druga zaś – w badaniu logarytmicznej stopy zwrotu. Metoda największej wiarygodności sprawdziła się jedynie w estymacji parametrów rozkładu GED stóp zwrotu z indeksu WIG.

W wypadku metody centrowania dane zawarte w tabeli 4 nie pozwalają na jednoznaczne rozstrzygnięcie, którą wartość: $\hat{\mu} = \bar{x}$ czy $\hat{\mu} = med(x)$, należy odjąć od ciągu próbek.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono modelowanie rozkładu klasycznych i logarytmicznych stóp zwrotu z indeksów WIG, WIG20, MWIG40 i SWIG80 za pomocą rozkładu Gaussa, Laplace'a i rozkładu GED.

Analizując wyniki wybranych statystyk opisowych, zauważono istotne różnice w wartościach średnich rozważanych stóp zwrotu. Wartość mediany zaś nie zależała od rodzaju stopy.

Badając klasyczną i logarytmiczną stopę zwrotu, porównano końcowe rezultaty, jakimi były wyniki testu zgodności chi-kwadrat. Zaobserwowano, że zastosowanie klasycznej stopy zwrotu jest korzystniejsze w modelowaniu rozkładu empirycznych stóp zwrotu z indeksów notowanych na GPW w Warszawie za pomocą rozkładu Laplace'a niż stopy logarytmicznej.

Szczegółowo zbadano przydatność trzech metod estymacji parametrów GED (MNW oraz dwie metody przybliżone) do modelowania empirycznych rozkładów wybranych indeksów giełdowych. Wyniki obliczeń pozwoliły stwierdzić, że podobnie jak w przypadku rozkładu Laplace'a modelowanie rozkładu klasycznej stopy zwrotu z analizowanych indeksów za pomocą rozkładu GED pozwala osiągnąć lepsze rezultaty od modelowania rozkładu stopy logarytmicznej.

Literatura

- Bednarz K., (2012), *Goodness of Fit Tests in Modeling the Distribution of the Daily Rate of Return of the WIG20 Companies*, „Folia Oeconomica Stetinensia” 10(18) 2011/2, Szczecin.
- Bednarz K. (2013), *Modelowanie rozkładu tygodniowych stóp zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 za pomocą rozkładu Laplace'a i Gaussa. Wpływ wartości koncentracji na wynik testu zgodności dla rozkładu normalnego*, Zeszyty Naukowe US nr 769, Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia nr 63, Rynek kapitałowy, skuteczne inwestowanie, Szczecin.
- Box G.E.P., Tiao G.C. (1962), *A Further Look at Robustness via Bayes Theorem*, „Biometrika” No. 49 (3/4).
- Hsieh D.A. (1989), *Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rate Changes*, „Journal of Business” 62.
- Krupiński R., Purczyński J. (2006), *Approximated Fast Estimator for the Shape Parameter of Generalized Gaussian Distribution*, „Signal Processing” Vol. 86, No. 4.
- Nelson D.B. (1991), *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, „Econometrica” Vol. 59, No. 2.
- Purczyński J. (2003), *Wykorzystanie symulacji komputerowych w estymacji wybranych modeli ekonometrycznych i statystycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- Purczyński J., Bednarz K. (2012), *Metody estymacji parametrów uogólnionego rozkładu Gaussa*, „Technika Transportu Szybowego” nr 9.
- Sobczyk M. (2004), *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Subbotin M.T.H. (1923), *On the Law of Frequency of Error*, *Mathematischeski Sbornik* 31.
- Weron A., Weron R. (1998), *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa.

MODELING THE EMPIRICAL DISTRIBUTIONS OF RETURN RATES ON WARSAW STOCK EXCHANGE STOCKS BY APPLICATION OF THE LOGARITHMIC AND CLASSICAL RETURN RATES

Abstract

In this paper the modeling of return rates on WIG, WIG20, MWIG40 and SWIG80 indexes was made by application of Laplace, Gaussian and GED distributions. Calculations

were made for classical and logarithmic return rates with the view of comparing the final results, which were the chi-square goodness-of-fit test results. Furthermore, the applicability of three methods of estimating GED parameters (Maximum Likelihood Method and two approximate methods) in modeling empirical return rates of selected stock exchange indexes was thoroughly discussed and verified.

Translated by Kamila Bednarz-Okrzyńska

Keywords: rates of return, Laplace distribution, GED distribution, estimation of distribution parameters.

Kod JEL: C02, C12, C13, C46, E43.