Ewa Drabik

Związki między regułami aukcyjnymi a grami typu Banacha-Mazura

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 36/2, 41-56

2014

UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
WYDZIAŁ NAUK EKONOMICZNYCH
I ZARZĄDZANIA

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 36

Ewa Drabik[*]
Politechnika Warszawska

ZWIĄZKI MIĘDZY REGUŁAMI AUKCYJNYMI A GRAMI TYPU BANACHA-MAZURA

STRESZCZENIE

Badacze od wielu lat zajmują się modelowaniem zjawisk gospodarczych i społecznych. Modele matematyczne mają swój specyficzny język. Dobrym narzędziem służącym do modelowania zjawisk ekonomicznych jest teoria gier, którą po raz pierwszy w 1944 roku zastosowali John von Neuman i Oscar Mongerstern w pracy *Teoria gier i ekonomicznych zastosowań*. Jednakże pewien typ gier nie był dotychczas wykorzystywany w zastosowaniach, a mianowicie gry z kompletną informacją, zwane również grami Banacha-Mazura. Polegają one na tym, że w dowolnym momencie wyboru dokonuje tylko jeden gracz, który zna dotychczasowe wybory przeciwnika, a gra jest prowadzona sekwencyjnie. Jako pierwszy grę nieskończoną z kompletną informacją przedstawił S. Mazur około 1935 roku, w *Księdze szkockiej*. S. Banach podał modyfikację tej gry. Obecnie gry tego typu nazywane są grami Banacha-Mazura.

Celem artykułu jest przedstawienie kilku znanych wersji gry Banacha-Mazura, a także zaprezentowanie jej kolejnej modyfikacji. Podjęto również próbę zaprezentowania ekonomicznych i społecznych zastosowań gier pozycyjnych.

Słowa kluczowe: gry Banacha-Mazura, gra nieskończona z kompletną informacją, liczby pierwsze, aukcja holenderska, gra w szachy.

[*] Adres e-mail: ewa.drabik@poczta.fm.

Wprowadzenie

Modelowanie zjawisk gospodarczych i społecznych polega na uproszczonym opisie, bardzo często za pomocą symboli matematycznych, rzeczywistości ekonomicznej. Ogólnie przez model można rozumieć zbiór założeń upraszczających wraz z opisem przedmiotu (przedmiotów) modelowania. Konstruowanie modeli stało się metodą upraszczania problemów, na przykład przez eliminację zbędnych informacji i zwiększania w ten sposób szans na rozwiązanie. W efekcie modelując konkretne zjawisko o charakterze ekonomicznym czy społecznym, buduje się pewien schemat przebiegu danego zjawiska i za pomocą teorii matematycznej bada nie samą rzeczywistość, ale ten schemat. W teorii modelowania zjawisk ekonomicznych za pomocą formalizmów matematyki można wyróżnić następujące dziedziny: ekonometrię, ekonomię matematyczną, teorię podejmowania decyzji, zwaną również badaniami operacyjnymi, a także teorię gier. Sformalizowanie zjawisk ekonomicznych za pomocą modeli dodało ekonomii powagi. Pomimo ilościowych, a nawet jakościowych niedoskonałości, modele ekonomiczne opisane przy użyciu symboli i określeń zaczerpniętych z matematyki zdają egzamin w konfrontacji z rzeczywistością nawet wówczas gdy opis badanego zjawiska wydaje się subiektywny i specyficzny dla danej gałęzi wiedzy. Subiektywizm nie przeszkadza jednak w prognozowaniu i podejmowaniu decyzji. Prognozowanie na podstawie modelu jest o wiele bardziej precyzyjne niż na podstawie domysłów i skojarzeń ekspertów. Sformalizowanie zjawisk ekonomicznych pozwala także lepiej zrozumieć problem, a nawet go rozwiązać.

Przedmiotem artykułu jest ilustracja interakcji społecznych i pewnych zjawisk ekonomicznych za pomocą języka teorii gier, a konkretnie gier pozycyjnych. Wprowadzenie teorii gier do opisu zjawisk ekonomicznych przez Johna von Neumana i Oscara Morgensterna w pracy z 1944 roku zatytułowanej *Teoria gier i postępowania ekonomicznego* (Theory of Games and Economic Behavior) okazało się bardzo trafionym krokiem. Teoria gier umożliwiła na przykład łatwe ustalenie stanu równowagi dla wybranych procesów ekonomicznych (w tym przypadku w sensie Nasha) pod warunkiem, że zostaną przyjęte założenia dotyczące określonych reguł obowiązujących w trakcie gry, a także nie będzie możliwe zawieranie jakichkolwiek porozumień poza schematem gry i wbrew wcześniej ustalonym regułom. Tworzenie koalicji przed rozegraniem określonej partii jest oczywiście możliwe, tak samo jak możliwy jest kompromis obowiązujący graczy zawarty przed rozpoczęciem określonej rozgrywki.

Teoria gier, pomimo że nakłada bardzo silne warunki na sposób przebiegu gry, pozwala uzyskać rzetelne wnioski o dużym znaczeniu praktycznym. Może zajmować się modelowaniem zjawisk gospodarczych, w których uczestniczą konkurujące i kooperujące ze sobą podmioty, ale również uwzględniać nastroje i reakcje uczestników rynku, zgodnie z teorią perspektywy, mówiącą, że gospodarka to nie tylko prawidłowości, ale również ludzie oddziałujący na rynek przez swoje zachowania. Klasyczna teoria gier opiera się bowiem na założeniu, że gracze są egoistami, którzy zachowują się racjonalnie i dążą do maksymalizacji własnej funkcji użyteczności. Obecnie coraz częściej rozważane są sytuacje, w których gracze skłonni są do altruizmu, a tym samym do ponoszenia pewnych kosztów w celu podziału wypłat. W tym przypadku chodzi o nowe teoriogrowe modele tak zwanych nieegoistycznych preferencji. Modele te zachowują wszelkie założenia klasycznej teorii gier, dopuszczając jednak sytuację, w której wypłaty graczy zależą od wypłat konkurentów [Drabik, 2010]. Popularne są także modele aukcji [Drabik, 2007]. W ostatnich latach powstało wiele prac o aukcjach i ich modelach. Najbardziej znanymi i podstawowymi aukcjami są: angielska, holenderska, pierwszej i drugiej ceny. Dwie pierwsze są aukcjami ustnymi (*oral auction*), dwie ostatnie pisemnymi (*written auction*). Ich przebieg można wymodelować przy użyciu symboli i wzorów matematycznych [Klemperer, 2002].

Warto dodać, że istnieje wiele barier stworzonych zarówno przez matematyków, jak i ekonomistów, których celem jest zapobieganie „przenikaniu” matematyki czystej w „rejony” zastosowań, nie tylko ekonomicznych. Wiadomo również, że aby powstały nowe idee, konieczne jest połączenie matematyki stosowanej z czystą i stworzenie języka, który pozwoli na umiejętny opis praktycznych zjawisk. Przykładem takich działań są gry pozycyjne, których zastosowaniom poświęcony jest niniejszy artykuł. Gry pozycyjne zostały stworzone w latach 40. XX wieku przez polskich matematyków ze słynnej szkoły lwowskiej i zapisane w tak zwanej *Księdze szkockiej*. Ze względu na nazwiska autorów nazywano je grami Banacha-Mazura.

Kolejnym celem jest prezentacja bardziej znanych wersji gier typu Banacha-Mazura, ich oryginalna modyfikacja wykorzystująca własności liczb pierwszych, a także przedstawienie krótkich propozycji ich zastosowań

Artykuł skonstruowano następująco: w drugiej części zaprezentowano oryginalne wersje gry Banacha-Mazura i jej niektóre modyfikacje. Opis gier opatrzono obszernym komentarzem złożonym z twierdzeń dotyczących istnienia rozwiązań. W trzeciej części zaprezentowano modyfikację gry Mazura-Banacha, w której wykorzystano elementarne własności liczb pierwszych. W czwartej części przedstawiono propozycje zastosowań tego typu gier. Kilka krótkich uwag związanych z modelowaniem ekonometrycznym zawarto w podsumowaniu.

1. Gra Banacha-Mazura i jej odmiany

Ważkim problemem konkurencyjnym są gry o nieskończonej liczbie strategii. Większość problemów związanych z tymi grami sformułowano w latach 1935–1941 XX wieku i zapisano w tak zwanej *Księdze szkockiej*. Jest to zeszyt zakupiony przez żonę Stefana Banacha, do którego lwowscy matematycy, a wśród nich Stanisław Mazur, Stanisław Ulam oraz Hugo Steinhaus, wpisywali w trakcie rozmów w kawiarni o nazwie Szkocka problemy matematyczne. *Księga szkocka* była prowadzona niemal sześć lat. Wiele problemów zapisanych w niej powstało we wcześniejszych latach i nie wszystkie doczekały się rozwiązania. Po drugiej wojnie światowej pani Łucja Banach przewiozła *Księgę szkocką* do Wrocławia, a tam Hugo Steinhaus przepisał ją ręcznie i w 1956 roku wysłał jej kopię do Los Alamos (USA, stan Nowy Meksyk) do Stanisłwa Ulama. Ten przetłumaczył ją na język angielski, po czym skopiował – na własny koszt – w 300 egzemplarzach i rozesłał do różnych uniwersytetów. Zainteresowanie było tak duże, że wkrótce została ona opublikowana i doczekała się wielu wydań, głównie w języku angielskim [Duda, 2007]. W *Księdze szkockiej* pod numerem 43 Stanisław Mazur zaprezentował następującą grę [*Księga szkocka,* s. 20; Mauldin, 1981].

Przykład 1 (definicja pewnej gry – Mazur). Dany jest pewien podzbiór E liczb rzeczywistych. Gra między graczami 1 i 2 polega na tym, że gracz 1 wybiera odcinek d_1, jako drugi w kolejności wyboru dokonuje gracz 2 – wybiera dowolny odcinek d_2 zawarty w d_1, następnie gracz 1 wybiera dowolny odcinek d_3 zawarty w d_2 itd. Gracz 1 wygrywa jeśli przekrój d_1, d_2, d_3, ... zawiera punkt zbioru E; w przeciwnym przypadku wygrywa gracz 2.

Dopisek Mazura był taki: „Jeżeli E jest dopełnieniem zbioru pierwszej kategorii (zobacz przypis 3), to istnieje metoda, przy której wygrywa gracz 1, jeśli E jest zbiorem pierwszej kategorii, to istnieje metoda przy której wygrywa gracz 2.

Mazur dopisał również następujące pytanie.

„Czy prawdą jest, że dla gracza 1 istnieje metoda wygrania tylko dla takich zbiorów E, których dopełnienie jest w jakimś odcinku pierwszej kategorii; podobnie czy metoda wygrania istnieje dla gracza 2 tylko wówczas gdy *E* jest zbiorem pierwszej kategorii?”

W *Księdze szkockiej* sformułowano również kilka odmian gry Mazura.

Przykład 2 (Ulam). Dany jest podzbiór *E* liczb rzeczywistych. Gracze 1 i 2 podają na przemian, po kolei liczby 0 lub 1. Gracz 1 wygrywa, jeżeli liczba utworzona z tych cyfr w podanym porządku (w systemie dwójkowym) należy do zbioru *E*. Dla jakich zbiorów *E* istnieje metoda wygrania gry dla gracza 1 (gracza 2)?

Przykład 3 (Banach). Dany jest zbiór liczb rzeczywistych *E*. Gracze 1 i 2 podają dowolne liczby rzeczywiste dodatnie, z tym że następny podaje liczbę mniejszą niż ostatnia podana. Gracz 1 wygrywa, jeżeli sumą szeregu liczb podanych jest liczba ze zbioru *E* [*Księga szkocka*, s. 21].

Gra Mazura doczekała się wielu modyfikacji. Oto niektóre z nich.

Przykład 4 (Gra Banacha-Mazura G_1). W grze uczestniczy dwóch graczy. Wybierają oni kolejno cyfry 0 lub 1, przy czym wybory są jawne. Po przeliczalnej liczbie kroków powstaje pewien ciąg zer i jedynek. Tego typu ciągi tworzą zbiór nazywany zbiorem Cantora *C*[1]. Jeżeli w zbiorze Cantora jest wyróżniony pewien podzbiór $X \subset$ C, to możemy powiedzieć, że pierwszy z graczy gra właśnie na ten zbiór. Innymi słowy, jeżeli wynik rozgrywki jest punktem zbioru *X*, to znaczy $\langle a_1, a_2, ...\rangle \in X \subset C$, gdzie $a_i = 0$ lub 1, to wygrywa pierwszy gracz; w przeciwnym wypadku wygrywa drugi. Można postawić standardowe pytanie, czy gracz rozpoczynający grę Γ_1 ma zawsze strategię wygrywającą?

Należy zwrócić uwagę, że gra G_1 jest grą nieskończoną o przeliczalnym zbiorze strategii. Inna wersja omawianej gry jest następująca.

Przykład 5 (gra typu Banacha-Mazura G_2). Jeden z graczy wybiera jedną z cyfr 0, 1, ..., 9, potem drugi z graczy wybiera jakąś cyfrę, a następnie wyboru dokonuje gracz 1 itd. Razem generują pewien nieskończony ciąg cyfr, na przykład 5791. Takiemu ciągowi przyporządkowuje się liczbę 0,5791... $\in$ [0, 1]. Przed rozpoczęciem gry ustala się podzbiór *X* odcinka [0, 1]. Wygrywa gracz 1, gdy wspólnie wygenero-

[1] Konstrukcja zbioru Cantora: odcinek [0, 1] dzielony jest na 3 równe części i środkowy przedział otwarty uznaje się za wyłączony. Pozostałe odcinki [0, 1/3] i [2/3, 1] dzieli się na 3 równe części i wyłącza się części środkowe otwarte. Zbiór Cantora $C=\{0, 1\}^{\omega}$ to także potęga kartezjańska zbioru o dwu elementach (o tym właśnie zbiorze jest mowa w przykładzie 4). Warto przypomnieć, że zbiór Cantora ma moc continuum; jest zatem równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.

wana liczba znalazła się w tym zbiorze. Wygrywa gracz 2, gdy wygenerowana liczba do tego zbioru nie należy.

Nietrudno zauważyć, że gra ma strategię wygrywającą. Można na przykład przyjąć, że na początku gracze ustalą zbiór $X = [0{,}5; 0{,}7]$. Przy tak ustalonym zbiorze X wystarczy, aby gracz 1 jako pierwszą wybrał jedną z cyfr: 5 lub 6, a ma „wygraną w kieszeni". Wybór dowolnej innej cyfry będzie równoważny z tym, że wygrywa gracz 2.

Przykład 6 (gra typu Banacha-Mazura G_3). Niech X będzie pewnym danym zbiorem, o którym nie zakłada się niczego konkretnego. Gracz 1 dzieli zbiór na dwie rozłączne części. Drugi wybiera jedną z nich. Gracz 1 ponownie dzieli wybrany przez gracza 2 zbiór na dwie rozłączne części, a następnie drugi wybiera jedną z nich, itd. Gracz 1 wygrywa, jeśli część zbioru przeznaczona do podziału jest niepusta, a drugi wtedy i tylko wtedy, gdy jest pusta.

Gra G_3 jest grą nieskończoną, którą zaprezentował Jan Mycielski [Mycielski, 1992]. Jest to gra analogiczna do oryginalnej gry Mazura z przykładu 1, z tym że X nie musi być zbiorem liczb rzeczywistych. Pokazano, że dla określonych typów zbioru X jeden z graczy ma w tej grze strategię wygrywającą.

Przykłady gier Banacha-Mazura można mnożyć. Zawsze pozostaje jednak pytanie: dla jakich zbiorów istnieje strategia wygrywająca?

W dalszym ciągu formalnie opisano pozycyjną grę nieskończoną z kompletną informacją.

Niech A i B będą odpowiednio zbiorami strategii gracza 1 i gracza 2. Funkcja $\varphi\colon A \times B \rightarrow \overline{\Re}$ oznacza wypłatę, przy czym $\overline{\Re} = \Re \cup \{-\infty, +\infty\}$, gdzie $\Re$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.

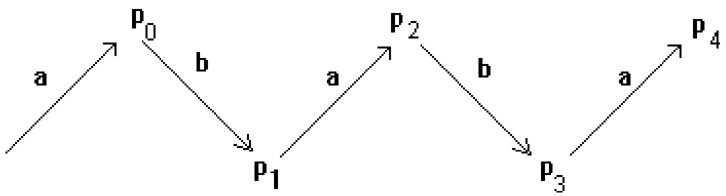
Reguły gry są następujące: gracz 1 wybiera strategię $a \in A$, gracz 2 wybiera strategię $b \in B$. Wybory są niezależne. Zakłada się, że każdy z graczy ma informacje o dotychczasowych ruchach przeciwnika. W przypadku wygranej gracza 1, gracz 2 płaci kwotę $\varphi(a, b)$. W przeciwnym razie gracz 1 płaci drugiemu $-\varphi(a, b)$.

Niech $\omega \in N$, gdzie N jest zbiorem liczb naturalnych. Przez P oznaczmy zbiór wyborów obydwu graczy. Gracz 1 wybiera $p_0 \in P$, gracz 2 wybiera $p_1 \in P$, następnie gracz 1 wybiera $p_2 \in P$ itd. Istnieje funkcja $f: P^{\omega} \rightarrow \overline{\Re}$, $f(p_0, p_1, ...)$, określająca symboliczną wypłatę, jaką gracz 2 wypłaca graczowi 1 w przypadku przegranej.

Definicja 1. Trójkę $\langle A,B,\varphi\rangle$, taką że $A=\left\{a:\bigcup_{n<\omega}P^n\to P\right\}$, gdzie $P^0=\{\phi\}$, $B=\left\{b:\bigcup_{0<n<\omega}P^n\to P\right\}$, $\varphi(a,b)=f(p_0,p_1,...)$, z założeniem, że istnieje funkcja $f:P^\omega\to\overline{\Re}$ oraz $p_0=a(\phi)$, $p_1=b(p_0)$, $p_2=a(p_1)$, $p_3=b(p_0,p_2)$, $p_4=a(p_1,p_3)$, ... nazywamy nieskończoną grą pozycyjną z kompletną informacją.

Przebieg gry nieskończonej $\langle A,B,\varphi\rangle$ z kompletną informacją przedstawiono na rysunku 1.

Rysunek 1. Schemat przebiegu gry nieskończonej z kompletną informacją



Źródło: opracowanie własne na podstawie [Mycielski, 1992].

Można przyjąć, że trójka $\langle A,B,\varphi\rangle$ jest równoważna parze $\langle P^\omega,f\rangle$. Ciąg $p=(p_0,p_1,...)$ zdefiniowany powyżej określa pewną strategię gry. Z kolei skończony ciąg $q=(p_0,...,p_{n-1})\in P^n$ określa pozycję gry.

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że f jest funkcją charakterystyczną zbioru $X\subseteq P^\omega$, określoną w następujący sposób:

$$\begin{cases} f(p)=0 \text{ jeżeli } p\notin X \\ f(p)=1 \text{ jeżeli } p\in X \end{cases}.$$

Jeżeli *f(p)* = 1, wygrywa gracz 1, jeżeli *f(p)* = 0, to wygrywa gracz 2. Gra $\langle P^\omega,f\rangle$ może być również zapisana jako $\langle P^\omega,X\rangle$. Kluczowym pojęciem w tego rodzaju grach jest gra zdeterminowana.

Definicja 2 (Mycielski). Grę $\langle A,B,\varphi\rangle$ nazywamy zdeterminowaną, jeżeli:

$$\inf_{b\in B}\sup_{a\in A}\varphi(a,b)<v<\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\varphi(a,b) \tag{1}$$

gdzie v – wartość gry.

Według definicji 2 nieskończona gra pozycyjna jest zdeterminowana, jeśli dolna i górna wartość gry są sobie równe. Gra nie jest zdeterminowana wówczas, gdy:

$$\inf_{b\in B}\sup_{a\in A}\varphi(a,b) < v < \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\varphi(a,b) \tag{2}$$

Jeżeli gra ma wartość v oraz istnieje strategia a_0 gracza 1, że $\varphi(a_0, b) \geq v$ dla każdego b, to a_0 jest optymalną strategią gracza 1. Jeżeli natomiast $\varphi(a, b_0) \leq$ dla każdej strategii a, to b_0 nazywamy optymalną strategią gracza 2. Okazuje się, że gra może być zdeterminowana, ale może nie istnieć optymalna strategia [Mycielski, 1992, rozdz. 3]. Umiejętne „prowadzenie" gry, gdy jest ona zdeterminowana przez jednego z graczy, zawsze może prowadzić do wygranej. Tym samym w przypadku gry zdeterminowanej można przyjąć, że jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

W opracowaniu [Mycielski, 1992] podano wiele twierdzeń, które ułatwiają, identyfikację gier zdeterminowanych.

W dalszym ciągu przyjmuje się, że jeżeli funkcja $f : P^{\omega} \to \overline{\Re}$ ma taką własność, że $f(p_0, p_1, ...)$ nie zależy od wyboru p_i dla pewnego n, takiego że $i > n$, to gra $\left\langle P^{\omega}, f\right\rangle$ będzie grą skończoną z kompletną informacją.

Twierdzenie 1 (Mycielski [Mycielski, 1992]). Każda gra skończona z kompletną informacją jest zdeterminowana.

Dowód [Mycielski, 1992, propozycja 2.1, s. 45].

Twierdzenie mówi, że każda gra skończona z kompletną informacją ma wartość dolną równą wartości górnej, a także równą wartości gry. W tym przypadku można pokazać, że istnieje przynajmniej jedna strategia „wygrywająca" w tej grze. Innymi słowy, jeżeli uda się udowodnić, że gra jest zdeterminowana, to można też wykazać, że przynajmniej jeden z graczy ma strategię wygrywającą w grze typu Banacha-Mazura.

Twierdzenie 2 (Mycielski [Mycielski, 1992]). Jeżeli zbiór $X \subseteq P^{\omega}$ jest domknięto-otwarty[2], to gra $\left\langle P^{\omega}, X\right\rangle$ jest zdeterminowana.

Dowód [Mycielski, 1992, propozycja 3.2, s. 46].

[2] Dana jest przestrzeń X. Przyjmuje się, że elementy X są punktami. Zbiór $V \subset X$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $x \in V$ ma otoczenie zawarte w V. Zbiorem domkniętym w X nazywamy natomiast zbiór $\overline{Z}$, którego dopełnienie $X \setminus \overline{Z}$ jest zbiorem otwartym. Zbiory, które są równocześnie domknięte i otwarte w X, nazywa się domknięto-otwartymi.

Wniosek 1. Jeżeli $f : P^{\omega} \to \overline{\Re}$ ma tę własność, że dla każdego $x \in \overline{\Re}$ zbiór $\{p \in P^{\omega} : f(p) < x\}$ lub zbiór $\{p \in P^{\omega} : f(p) \leq x\}$ jest domknięto-otwarty, to gra $\left\langle P^{\omega}, f \right\rangle$ jest zdeterminowana.

Zbiory, o których mowa we wniosku 1, powinny mieć tak zwaną własność Baire'a[3]. Tę własność mają na przykład wszystkie zbiory mierzalne w sensie Lesbegue'a.

Istnieje wiele gier nieskończonych z kompletną informacją, które są zdeterminowane. Dużą klasę takich gier tworzą gry rozgrywane na odcinku [0, 1], pomimo że składa się on z nieprzeliczalnej liczby elementów. To, czy gra jest zdeterminowana, czy nie, zależy od doboru zbioru *X*. Do określania tego zbioru brane są pod uwagę aksjomaty teorii mnogości [Kuratowski, Mostowski, 1978]. Z punktu widzenia dowodów cytowanych twierdzeń szczególnie ważny okazał się aksjomat wyboru, orzekający, że jeżeli *X* jest rodziną zbiorów, z których żaden nie jest pusty i wszystkie są rozłączne, to istnieje taki zbiór, który zawiera dokładnie po jednym elemencie każdego ze zbiorów należących do rodziny *X*. Korzystając z tego aksjomatu, udało się pokazać, że wiele gier rozgrywanych na odcinku [0, 1] to gry zdeterminowane. Niestety, jednocześnie z tego aksjomatu wynika, że istnieją również gry niezdeterminowane, czyli takie, które nie gwarantują wygranej żadnemu z graczy. Mycielski i Świerczkowski (niektóre źródła podają, że Mycielski i Steinhaus [Ryll-Nardzewski, 1973]) zapro-

[3] W dowodach cytowanych twierdzeń wykorzystuje się wiele pojęć znanych z teorii mnogości. Pojęciem wymagającym wprowadzenia pewnych definicji i określeń jest własność Baire'a. W celu wyjaśnienia, na czym polega ta własność, ograniczono się jedynie do przypomnienia pewnych klas zbiorów.

1. Wnętrzem zbioru *Z* (Int *Z*) nazywamy największy zbiór otwarty zawarty w *Z* lub, co na jedno wychodzi, sumę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w *Z*.
2. Zbiór FrZ = $Z \backslash$Int$Z$ nazywamy ograniczeniem zbioru *Z*.
3. Zbiór *Z* nazywamy gęstym w *X*, jeśli $\overline{Z} = X$.
4. Zbiór *Z* nazywamy brzegowym w *X*, jeżeli Int$Z = \varnothing$, co jest równoważne z tym, że jego dopełnienie jest zbiorem gęstym.
5. W przestrzeni $\Re$ liczb rzeczywistych zbiór liczb wymiernych jest zarówno zbiorem gęstym, jak i brzegowym. Jednak suma dwóch zbiorów brzegowych może nie być zbiorem brzegowym. Na przykład, liczby wymierne i niewymierne są zbiorami brzegowymi, lecz tworzą sumę, która nie jest zbiorem brzegowym (suma to zbiór liczb rzeczywistych).
6. Zbiory o własności Baire'a są to zbiory postaci Z $\cup$ *X*, gdzie Z jest iloczynem przeliczalnej mnogości zbiorów otwartych, a *X* – zbiorem pierwszej kategorii.
7. Zbiorem pierwszej kategorii może być suma przeliczalna zbiorów nigdziegęstych. Z kolei, zbiorem nigdziegęstym jest zbiór, którego domknięcie jest zbiorem brzegowym.

ponowali więc następujący aksjomat, zwany aksjomatem determinacji[4]. Mówi on, że w grze zdeterminowanej typu Banacha-Mazura jeden z graczy ma zawsze strategię zwycięską. Ponieważ cytowane aksjomaty są ze sobą w sprzeczności, więc w pracy [Mycielski, 1992] poddano szczegółowej analizie poszczególne gry typu Banacha-Mazura G_X, uwzględniając przy tym specyfikę zbioru X. Idea doboru zbioru X w grze zdeterminowanej jest następująca.

Niech dany będzie zbiór Q oraz $X \subseteq Q^w$, o których nie zakłada się nic szczególnego. Gra przebiega analogicznie do tej, którą zaprezentowano w przykładzie 3, a więc gracze na przemian wybierają elementy zbioru Q, które następnie ustawiają w ciąg q należący do Q^ω. Jeżeli $q \in X$, to wygrywa gracz 1, jeżeli $q \notin X$ to wygrywa gracz 2. Jest to ogólniejszy przypadek gry G_1 , który oznaczono jako G_1'.

Twierdzenie 3 (Mycielski [Mycielski, 1992]). Jeżeli gracz 2 ma strategię wygrywającą w grze G_1', to X jest zbiorem pierwszej kategorii.

Dowód [Mycielski 1992, twierdzenie 4.1, s. 47).

Gra G_3 zaprezentowana w przykładzie 6 dotyczy podziału zbiorów w określony sposób przez graczy. W przypadku tej gry można również sformułować twierdzenie, które po części jest odpowiedzią na przewijające się tu pytanie: czy w grze istnieje strategia wygrywająca?

Twierdzenie 4 (Mycielski [Mycielski, 1992]). Jeżeli gracz 2 ma strategię wygrywającą w grze G_3, to $|X| \leq \aleph_0$.

Symbol $|X|$ oznacza moc zbioru X, a $\aleph_0$ jest liczbą kardynalną, zwaną alefem zero, określającą moc zbioru liczb naturalnych. Twierdzenie 4 mówi, że gracz 2 ma w grze G_3 strategię wygrywającą jeżeli gra ma przeliczalną liczbę strategii. Z punktu widzenia teorii mnogości opisana sytuacja dotyczy zbiorów, których moc jest mniejsza od liczby alef zero lub jej równa[5].

Istnieją gry nieskończone z kompletną informacją, które są niezdeterminowane.

Twierdzenie 5 (Mycielski [Mycielski, 1992]). Istnieje zbiór $X \subseteq \{0, 1\}^\omega$, taki że gra $<\{0, 1\}^\omega, X>$ nie jest zdeterminowana.

---

[4] Pojęcie to po raz pierwszy pojawiło się w referacie H. Steinhausa i J. Mycielskiego wygłaszanym 25.10.1960 r.

[5] Liczba kardynalna alef zero określa moc zbiorów przeliczalnych.

Dowód [Mycielski, 1992, propozycja 3.1, s. 46].

Zbiór *X* z twierdzenia 5 jest zbiorem Cantora, który nie jest przeliczalny. Można zatem sformułować taką grę typu Banacha-Mazura, która nie ma rozwiązania. Problem konstrukcji takich gier jest zatem otwarty. W celu przybliżenia ich własności można sformułować następujący wniosek.

Wniosek 2. Jeżeli pewien zbiór *X* zawarty w przestrzeni metrycznej *E* nie ma własności Baire'a lub jest nieprzeliczalny, to można określić grę $<\{0, 1\}^{\omega}, X>$ typu Banacha-Mazura, która jest niezdeterminowana.

Mając na uwadze powyższe rozważania w kolejnej części artykułu zaprezentowano dwie nowe wersje gry Banacha-Mazura.

2. Liczby pierwsze a gry typu Banacha-Mazura

Do sporządzenia oryginalnych odmian gier typu Banacha-Mazura warto wykorzystać własności liczb pierwszych, gdyż zbiór liczb pierwszych jako przeliczalny spełnia większość własności stawianych zbiorom, które gwarantują, że rozważana gra jest zdeterminowana.

Przykład 7. Gra G_4. Gracz 1 wybiera liczbę $s_1 = 2n_1 + k$, gdzie $k \leq n$ i oblicza element ciągu postaci:

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{gdy} \quad \exists\, p,\, q \in \mathrm{P}_r \quad \text{takie że} \quad 2n + k = p + q \ (*) \\ 2^{-k}, & \text{gdy} \quad k \leq n \quad \neg\exists\, p, q \in \mathrm{P}_r \ \text{takie że zachodzi} \ (*) \end{cases} \tag{3}$$

gdzie P_r – zbiór liczb pierwszych.

Gracz 2 podaje kolejną liczbę $s_2 = 2n_2 + k$, taką że $s_2 > s_1$, i znajduje kolejny element ciągu (3). Następnie analogiczny krok wykonuje gracz 1, itd. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} x_n \to 0$, to wygrywa gracz 1; w przeciwnym wypadku wygrywa gracz 2. Czy istnieje strategia zwycięska?

Uwaga do dowodu. W pracy [Marzanowicz, Zarzycki, 2006] podano własność liczb pierwszych mówiąca, że:

Własność 1. Każda parzysta liczba naturalna większa od 4 może być zapisana jako suma dwóch liczb pierwszych nieparzystych.

Zgodnie z własnością 1 wystarczy, aby gracz 2 podawał kolejno liczby nieparzyste, a w k-tym kroku może trafić na taką liczbę, która nie spełnia warunku (*). Wówczas $x_k > x_{k-1}$, stąd x_k nie zbiega do zera. Gracz 2 ma zatem strategię wygrywającą. Warto także zauważyć, że zbiór ciągów postaci (3) jest zbiorem pierwszej kategorii i jest on przeliczalny. Zgodnie z rozważaniami zaprezentowanymi w części 2 gra jest więc zdeterminowana (spełnione jest twierdzenie 4).

Przykład 8. Gra G_5. Gra przebiega w analogicznie do G_4 zaprezentowanej w przykładzie 7, z tym że liczby, które podają sekwencyjnie gracze, generując elementy ciągu x_n powinny spełniać warunek (**) podany w poniższym wzorze:

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{gdy} \quad \exists\, p,\, q,\, t \in \mathrm{P}_r \quad \text{takie że} \quad 2n + k = p + q + t \text{ (**)} \\ 2^{-k}, & \text{gdy} \quad k \le n \quad \neg\exists\, p, q, t \in \mathrm{P}_r \text{ takie że zachodzi (**)} \end{cases} \tag{4}$$

Podobnie jak poprzednio P_r oznacza zbiór liczb pierwszych. Czy istnieje strategia wygrywająca?

W przypadku rozważań dotyczących gry G_2 należy skorzystać z następującej własności liczb pierwszych [Marzanowicz, Zarzycki, 2006].

Własność 2. Każdą liczbę nieparzystą większą od 7 można przedstawić w postaci sumy trzech liczb pierwszych.

Korzystając z własności 2, wystarczy przyjąć, że gracz 2 podaje kolejne liczby parzyste większe lub równe od 8. Wówczas może on trafić na taką liczbę, która nie spełnia warunku (*). Ma on zatem strategię wygrywającą.

Wniosek 3. Gry G_4 i G_5 są zdeterminowane, czyli gracz 2 ma strategię wygrywającą.

3. Kilka uwag o możliwych zastosowaniach gier pozycyjnych

Gry typu Banacha-Mazura cieszyły się w swoim czasie dużym zainteresowaniem, przede wszystkim matematyków. Głównym pytaniem, które pojawiało się podczas rozwiązywania tych gier, było: czy istnieje strategia wygrywająca dla któregokolwiek z graczy? Korzystając z pewnika wyboru, już na początku XX wieku pokazano, że istnieją takie zbiory X, dla których żaden z graczy nie ma strategii gwarantującej wygraną. Wprowadzenie nowego aksjomatu teorii mnogości, zwanego aksjomatem determinacji, sprawiło, że poszukiwania strategii zwycięskiej dla jednego z graczy stało się o wiele prostsze. Różne warianty gier Banacha-Mazura były analizowane pod kątem spełnienia warunku determinacji. Na przykład dowodzono, że jeżeli uda się znaleźć zbiór, na którego podzbiorach określona jest miara nietrywialna, przeliczalnie addytywna, znikająca na punktach i przyjmująca wartości 0 lub 1, to wszystkie podzbiory analityczne określone na tym zbiorze są zdeterminowane, a tym samym przynajmniej jeden z nich ma strategię wygrywającą [Ryll-Nardzewski, 1973].

Gry typu Banacha-Mazura można zaliczyć także do nieskończonych gier wieloetapowych z kompletną informacją. Wiele praktycznych odpowiedników takich gier dotyczy sytuacji, w której „zwycięzca bierze wszystko" (zob. np. grę pułkownik Blotto) [Malawski i in., 1997]. Z kolei możliwość zagwarantowania wygranej już w pierwszym kroku powoduje, że niektóre gry pozycyjne to gry typu „kto pierwszy, ten lepszy". Ekonomicznym odpowiednikiem takiej gry jest aukcja, podczas której licytowany jest pojedynczy towar (obiekt). W tym przypadku kupujący, który „pierwszy" został zwycięzcą aukcji, „bierze wszystko". Podobnie jak w wielu grach pozycyjnych, osoba-gracz, która pierwsza składa ofertę, decyduje o przebiegu aukcji. Jeżeli oferta jest zbyt niska w stosunku do wyceny oferowanego towaru, zaproponowanej przez sprzedającego, to przeciwnicy mogą ją zarówno przebić, jak i zaniechać licytacji. Odpowiada to sytuacji, gdy zaproponowana przez rozpoczynającego grę cyfra nie gwarantuje, że liczba utworzona w wyniku zestawienia sekwencyjnie podawanych znaków znajdzie się w zadanym przedziale (zob. przykład 5). Warto pamiętać, że niezależnie od rodzaju aukcji, optymalna strategia licytującego gracza polega na zaoferowaniu takiej kwoty, która gwarantuje zwycięstwo (zakup towaru), a jednocześnie nie przewyższa własnej wyceny towaru. W przypadku aukcji holenderskiej, gdzie cena jest obniżana sekwencyjnie, zawsze może znaleźć się ktoś pierwszy, kto zadeklaruje chęć nabycia towaru i ta osoba wygrywa aukcję. Jest to typowy przypadek gry, w której stosuje się zasadę „kto pierwszy, ten lepszy" [Dixit, Nalebuff, 2009]. Aukcji holenderskiej odpowiadają na przykład gry zaprezentowane w przykładach 2 i 5. Na ogół porównanie gier pozycyjnych z regułami aukcyjnymi „wypada korzystnie" dla reguł odpowiadających aukcjom ustnym, zwłaszcza aukcji holenderskiej.

Najbardziej znaną, „skończoną” grą pozycyjną, z kompletną informacją o przeciwniku, jest gra w szachy, która dała początek algorytmom sztucznej inteligencji, stosowanym obecnie w różnych dziedzinach wiedzy, między innymi do konstrukcji złożonych modeli dynamicznych próbujących przybliżyć ich równowagę, a także do jej opisu sytuacyjnego, jej braku w wielu układach gospodarczych. Gra w szachy zainspirowała powstanie wielu modeli wykorzystywanych zarówno w nauce, jak i w życiu codziennym.

Z punktu widzenia teorii gier należy podkreślić, że gra w szachy ze względu na skończoną liczbę strategii jest zdeterminowana, z czego, jak twierdził Steinhaus „większość szachistów nie zdaje sobie sprawy” [Ryll-Nardzewski, 1973].

Podsumowanie

Symboliką posługiwano się już w starożytności. Pozwalała ona na uściślenie opisywanego zjawiska, a także stworzenie wygodnego aparatu umożliwiającego „zapisanie” praktycznie dowolnej teorii. Kłopot w tym, że zdarzają się teorie i modele używające terminologii matematycznej w sposób wadliwy i nieużyteczny. Przykładem jest wiele modeli rynków finansowych, które przez błędne założenia prowadziły ich autorów do klęsk finansowych. Także kryzysy i krachy finansowe są prawdopodobnie bezpośrednim następstwem skomplikowanej, generującej toksyczne papiery „wartościowe” inżynierii finansowej. Znani inwestorzy i przedstawiciele finansów mawiają, że jeśli się czegoś nie rozumie, to nie należy się tym posługiwać. Legendarny gracz giełdowy Warren Buffet przestrzega: „jeśli musisz dokopywać się do zbyt wielu szczegółów to coś jest nie tak”. Mówi także: „dopiero podczas odpływu (czytaj kryzysu – przyp. E.D.) widać, kto pływał bez majtek” [Lowe, 1997]. W przeciwieństwie do modeli rynków finansowych modele aukcji dotychczas sprawdzają się bez zarzutu [Cheng, 2006; Klemperer, 2002].

Literatura

Cheng H. (2006), *Ranking Sealed High – Bid and Open Asymmetric Auction*, „Journal of Mathematical Economics" 42.

Drabik E. (2010), *O matematycznym modelowaniu zjawisk gospodarczych i interakcji społecznych*, „Optimum – Studia Ekonomiczne" nr 4, t. 48.

Drabik E. (2007), *Aukcje w teorii i praktyce*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa.

Dixit A.K., Nalebuff B.J. (2009), *Sztuka strategii. Teoria gier w biznesie i życiu prywatnym*, Wydawnictwo MT Biznes Ltd, Warszawa.

Duda R. (2007), *Lwowska szkoła matematyczna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław.

Klemperer P. (2002), W*hat Really Matters in Auction Design*, „Journal of Economic Perspectives" Vol. 16, No. 1.

Księga szkocka (19391941), kserokopia rękopisu, zbiory prywatne, Lwów.

Kuratowski K., Mostowski A. (1978), *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa.

Lowe J. (1997), *Mówi Warren Buffet*, Wydawnictwo K.E. Liber, Warszawa.

Marzanowicz W., Zarzycki P. (2006), *Elementarna teoria liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Mauldin R. D. (1981), *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Cafe*, BostonBasel-Stuttgart, Birkhausen.

Malawski M., Wieczorek A., Sosnowska H. (1997), *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Mycielski J. (1992), *Games with Pefect Information*, w: *Handbook of Game Theory with Economic Application*, red. R.J. Aumann, S. Hart, t. I, North-Holland, Amsterdam.

Ryll-Nardzewski C. (1973), *Prace Hugona Steinhausa o sytuacjach konfliktowych*, „Wiadomości Matematyczne" t. XVII.

THE RELATIONSHIP BETWEEN AUCTION RULES AND BANACH-MAZUR'S GAME

Abstract

Modelling economic phenomena, processes as well as a social interaction had been shaped over the years. The theory of mathematical models has own language, strictly specified form, depending on the nature of described issues. The game theory was firstly used for the description of economic phenomena in 1944's by John von Neuman and Oscar Morgenstern in: „Theory of Games and Economic Behavior". The game theory was turned out that to be an outstanding modelling device. But there are certain type of games, the so-called positional game with perfect information (Banach-Mazur games), which so far have not been applied in economy. The perfect information positional game is defined as the game during which at any time the choice is made by one of the players who is acquainted with the previous decision of his opponent. The game is run on the sequential basis.

The aim of presentation is discuss selected Banach-Mazur games and to present some applications of positional game.

Translated by Iwona Drabik

Key words: Banach-Mazur games, modelling of economic phenomena, oral auctions, chess.
Kod JEL: C72, D44.