

Jerzy Dadaczyński

Giuseppe Veronesego podstawy matematyki

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 53 [Numer specjalny: elementy historii matematyki], 53-92

2013

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Giuseppe Veronesego podstawy matematyki

ks. dr hab. Jerzy Dadaczyński
Katedra Filozofii Logiki UPJPII (dawniej: PAT) Kraków

Giuseppe Veronese's foundations of mathematics

Abstract

The aim of this paper is to analyze Veronese's philosophical principles of mathematics. He tried to begin the construction of mathematics (geometry) with the concept of the Thinking Subject and the phenomenon of thinking, which is discussed in detail. It is very likely that this idea had an impact on Hilbert's concept of the Mathematical Subject. Some similarities between Veronese's view and the intuitionistic thinkers are also shown.

Key words:

foundations of mathematics, epistemology of mathematics, ontology of mathematics, mathematical subject, Giuseppe Veronese

Giuseppe Veronese (1853–1917), włoski geometra, choć pracował przede wszystkim w środowisku włoskim, to jednak zyskał światowy rozgłos. Zawdzięczał to głównie zbudowaniu

geometrii niearchimedesowej. Wywołało to gorące protesty przede wszystkim ojca współczesnego paradygmatu uprawiania matematyki Georga Cantora. Niemiecki matematyk był twórcą jednego z wariantów konstrukcji liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych, co definitywnie kończyło proces arytmetyzacji analizy matematycznej i eliminowało potrzebę odwoływania się w tej dyscyplinie matematycznej do wielkości niearchimedesowych (aktualnie nieskończenie małych), których nieściśle stosowanie od czasów Isaaca Newtona i Gottfrieda Wilhelma Leibniza w podstawach analizy generowało w nich niejasności i sprzeczności. Dlatego Cantor komentował pojawienie się wielkości niespełniających aksjomatu Eudoksosa-Archimedesesa w konstrukcji geometrii Veronesego jako pojawienie się „zarazka cholery” w podstawach matematyki.

Veronese był atakowany również w środowisku włoskim za wprowadzenie wielkości niespełniających aksjomatu Eudoksosa-Archimedesesa w geometrii. Krytyka pochodziła przede wszystkim od Giuseppe Peana. Twórca aksjomatyki liczb naturalnych, który był zwolennikiem stosowania metod formalnych w geometrii, zarzucał Veronesemu nieściśle i nieuzasadnione wprowadzenie wielkości niearchimedesowych do geometrii.

Krytyka geometrii Veronesego, której autorami byli luminarze matematyki końca XIX wieku, spowodowała, że jego nazwisko stało się głośne w świecie matematycznym. Do jego rozgłosu przyczyniło się też spektakularne zamknięcie całej sprawy. Sam David Hilbert w swoich *Grundlagen der Geome-*

trie wskazał model dla geometrii niearchimedesowej Veronesego. Oznaczało to – oczywiście względną – niesprzeczność jego systemu. To zaś, zgodnie z jedną z zasad filozofii matematyki Hilberta (być niesprzecznym = istnieć), świadczyło o matematycznym istnieniu obiektów niearchimedesowych wprowadzonych przez Veronesego.

Nie tylko jednak kwestia geometrii niearchimedesowej przyczyniła się do tego, że Veronese był znany w głównym środowisku matematycznym drugiej połowy XIX wieku, tzn. w środowisku niemieckojęzycznym. Włoch odbył studia inżynierskie i matematyczne na politechnice w Zurychu, a w latach 1880–1881 przebywał jako stypendysta przygotowujący dysertację doktorską na Uniwersytecie Lipskim, będąc uczniem samego Felixa Kleina. To też spowodowało, że dążył do wydania niemieckiego tłumaczenia swego głównego dzieła. Opublikowano je najpierw w języku włoskim w roku 1891 pod tytułem *Fondamenti di geometria a più dimensioni*. Już w 1894 roku ukazało się właśnie w Lipsku tłumaczenie niemieckie, zatytułowane *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*. Veronese, który studia odbywał w języku niemieckim, nadzorował ów przekład i oceniał go bardzo wysoko.

Wyżej podane przyczyny wpłynęły na to, że włoski geometra, a dokładniej jego zasadnicze idee, był bardzo dobrze znany matematykom niemieckiego obszaru językowego. Z drugiej zaś strony powody, które podano na końcu, pozwalają traktować niemieckie tłumaczenie jego monumentalnego dzieła jako dobrą i wierną reprezentację jego idei.

Trzeba jednak zauważyć, że dzieło włoskiego matematyka, obok znanych elementów jego dorobku: geometrii niearchimedeseowej i geometrii rzutowej wielowymiarowej, zawiera także sporą porcję filozofii matematyki. Jest ona po części zlokalizowana w *Przedmowie autora*, po części zaś na początku samego korpusu dzieła – Veronese stara się tu wyraźnie budować swoją matematykę na założeniach filozoficznych.

Celem niniejszego artykułu jest analiza i próba uporządkowania Giuseppe Veronesego filozoficznych założeń matematyki. Postawione też zostanie pytanie o jej ewentualną aktualność.

Najpierw skupię się na kwestiach epistemologii i ontologii matematyki Veronesego.

Korpus swojego monumentalnego dzieła rozpoczyna on od czegoś, co można nazwać charakterystyką Podmiotu Myślącego, albo inaczej – charakterystyką Podmiotu Matematycznego. Pierwsze cztery paragrafy *Geometrii* stwierdzają, co następuje:

§ 1. Ja myślę.

§ 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy.

§ 3. Ja myślę najpierw jedną rzecz (i) następnie jedną [inną – przyp. J.D.] rzecz.

§ 4. *Def.* To, co w myśleniu odpowiada rzeczy, jest nazywane przedstawieniem, pojęciem albo duchowym wyobrażeniem tej rzeczy¹.

¹ „§ 1. Ich denke.

§ 2. Ich denke ein Ding oder mehrere Dinge.

§ 3. Ich denke zuerst ein Ding , nachher ein Ding.

W punkcie wyjścia swojego wykładu matematyki (geometrii) Veronese przyjmuje istnienie Podmiotu Myślącego. Choć stwierdzenie pierwszego paragrafu nie ma formalnie kształtu Kartezjuszowskiego *cogito ergo sum*, to jednak wydaje się do niego nawiązywać. Przede wszystkim pierwsze stwierdzenie matematyki Veronesego jest podatne na tę samą krytykę co argument Kartezjusza. Ten ostatni podważyli stopniowo empiryści brytyjscy George Berkeley i David Hume. Berkeley generalnie rozerwał arystotelesowski związek pomiędzy przypadłością a koniecznym według tradycji arystotelesowskiej jej „podłożem”, czyli substancją. Hume wyciągnął z tego następujący wniosek: skoro generalnie przypadłość nie wymaga „podłoża”, czyli substancji, „na” której istnieje, to myślenie nie wymaga takiego „podłoża” w postaci „ja”, podmiotu (który myśli).

Najprawdopodobniej krytyka Hume’a nie była znana Veronesemu. W każdym razie bez żadnych wyjaśnień – niejako bezproblemowo – związał on myślenie z podmiotem (myślącym). Na mocy – przyjętych *implicite* – założeń metafizyki Arystotelesowskiej uważał *cogito ergo sum* za wyrażenie prawdziwe. Poza tym włoski matematyk twierdził *explicite*: „nikt nie może w istocie wątpić w istnienie naszego rozumu

§ 4. *Def.* Das, was in dem Gedanken einem Ding entspricht, wird *Vorstellung, Begriff oder geistige Vorstellung* des Dinges genannt”. G. Veronese, *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, Leipzig 1894.

(*Verstand*) i jego logicznego uposażenia bez popadnięcia w sprzeczność”².

W stwierdzeniu Veronesego można znaleźć w istocie trzy tezy:

1. Istnienie Podmiotu jest niepowątpiewalne.
2. Podmiot (*Verstand*) wyposażony jest w logikę. Trzeba podkreślić, że ta teza nie jest powszechnie przyjmowana. I tak np. intuicjoniści uważają, że matematyka jest swobodną działalnością (twórczością) rozumu, logika zaś jest czymś w stosunku do niej wtórnym. Zasada konstruktywizmu (konieczności wykonania konstrukcji obiektu matematycznego) prowadziła do odejścia od logiki klasycznej (ku intuicjonistycznej). Z kolei w wypadku Veronesego logika jest na wyposażeniu Podmiotu Matematycznego, jest *a priori*. Jest ona też wcześniejsza od matematyki – matematyka może być uprawiana jedynie zgodnie z pryncypiami „wcześniejszej” logiki. Dalsze badania pokażą, że chodzi o logikę klasyczną.
3. Podważenie istnienia Podmiotu prowadzi do sprzeczności³.

² „Niemand kann in der That an der Existenz unseres Verstandes und seiner logischen Verrichtungen zweifeln, ohne sich zu widersprechen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 10.

³ Tutaj analizowane zdanie Veronesego interpretowane jest następująco: podważenie istnienia Podmiotu prowadzi do sprzeczności i podważenie Jego uposażenia logicznego prowadzi do sprzeczności. Wydaje się, że właśnie taką treść wiązał włoski matematyk ze swoim zdaniem.

Powstaje oczywiście pytanie, o jaką sprzeczność chodzi tutaj Veronesemu. Wydaje się, że inaczej niż w pierwszych czterech paragrafach korpusu swojej matematyki Veronese odwołuje się *implicit*e w cytowanym tekście z *Przedmowy* do argumentu Kartezjusza. Rozumowanie, które prowadzi do sprzeczności – przy poważeniu istnienia Podmiotu – można by rekonstruować następująco:

- | | |
|---------------------------|---|
| 1. <i>non sum</i> | (treść wątpliwości – założenie) |
| 2. <i>cogito</i> | (treść doświadczenia) |
| 3. <i>cogito ergo sum</i> | (na podstawie zasad metafizyki Arystotelesa) |
| 4. <i>sum</i> | (opuszczanie implikacji 3, 2 [Podmiot wyposażony jest w logikę], sprzeczność 4, 1 [Podmiot wyposażony jest w logikę]) |
| Zatem: <i>sum</i> | (negacja założenia generującego sprzeczność: 4) |

Sprzeczność, do której według Veronesego prowadzi zaprzeczenie istnienia Podmiotu, występuje w punkcie 4. Wobec przesłanki trzeciej można oczywiście wysunąć zastrzeżenia, które – jak wspomniano wyżej – sformułowali już empiryści brytyjscy.

Obok apriorycznego uposażenia w logikę klasyczną Podmiot Matematyczny wykazuje, według Veronesego, pewną zasadniczą zdolność. Włoski matematyk w swoim komentarzu do § 2 („Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy”) podaje nastę-

pujące przykłady (rzeczy): „Moje Ja jest *jedną* rzeczą, działania myślenia, sąd, wniosek, zwierzęta i rośliny to *więcej* rzeczy”⁴.

Wskazanie własnego Ja jako przedmiotu myślanego przez Podmiot dowodzi, że według Veronesego Podmiot Myślący jest samoświadomy⁵. Wydaje się też, że skoro Podmiot Myślący jest samoświadomy, to poznaje on zasady logiki, które są jego apriorycznym uposażeniem właśnie w aktach samoświadomości. Nie widać bowiem innej możliwości dotarcia przez Podmiot do apriorycznie „zadanych” zasad logiki.

Wyniki analizy pierwszych czterech paragrafów korpusu matematyki Veronesego wspomaganą fragmentem *Przedmowy* można ująć syntetycznie w następujący sposób:

⁴ „Mein Ich ist *ein* Ding, die Handlungen des Denkens, ein Urtheil, ein Schluss, die Tiere und die Pflanzen sind *mehrere* Dinge”. G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

⁵ Dalsze badania pokażą, że według koncepcji Veronesego należy rozróżnić „myślenie własnego Ja (i dowolnego innego przedmiotu)” i „myślenie o własnym Ja (i o dowolnym innym przedmiocie)”. Już tu jednak należy zaznaczyć, że według Veronesego zachodzi pomiędzy nimi zasadniczy związek: „§ 18. Wenn wir ein Urtheil aufstellen, so können wir nachher beurtheilen, ob dieses Urtheil richtig ist oder nicht; in einem solchen Fall wird das Urtheil als ein dem Gedanken gegebenes Ding betrachtet. Auf gleiche Weise können mehrere Dinge, die zuerst von dem gesetzt sind, nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und zwar entweder in der Ordnung, in der wir sie betrachtet haben, oder unabhängig von dieser Ordnung, das heißt indem wir von derselben absehen. Und umgekehrt: Da einem dem Gedanken gegebenen Ding ein Begriff entspricht, mittels dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen, so können wir es mittels dieses Begriffs als von dem Gedanken gesetzt auffassen. Es gilt deshalb der folgende Satz: Ein von den Gedanken gesetztes Ding kann nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und umgekehrt”. G. Veronese, dz. cyt.

1. Istnieje Podmiot;
2. Podmiot wyposażony jest w logikę;
3. Podmiot myśli;
4. Podmiot myśli zgodnie z zasadami logiki (w którą jest wyposażony);
5. Podmiot jest samoświadomy;
6. Podmiot myśli o swoim myśleniu;
7. Podmiot myśli o swoim myśleniu zgodnie z zasadami logiki;
8. Podmiot na drodze samorefleksji może *explicite* poznać zasady swego myślenia: logikę.

Jak się wydaje, należy tu jeszcze uwzględnić przypis, którym włoski matematyk opatrzył pierwszy paragraf swojego tekstu („Ja myślę”). Stwierdza on tam, że: „W ten sposób wyrażamy zdolność myślenia i wyprowadzamy stąd zasady abstrakcyjnych form, przy czym jednak myślenie nie jest jakimś szczególnym przedmiotem badań matematycznych”⁶.

Abstrakcyjne formy to – jak później zostanie jeszcze wyjaśnione – przedmioty matematyki. Dla prowadzonych tutaj dociekań istotne jest stwierdzenie Veronesego, że myślenie nie jest (jakimś szczególnym) przedmiotem badań matematycznych. Nie wyklucza jednak włoski matematyk tego, iż myślenie – to

⁶ „Damit drücken wir die Fähigkeit zu denken und die Handlung des Denken aus und leiten daraus die Principien der abstracten Formen ab, ohne dass jedoch das Denken ein besonderer Gegenstand der mathematischen Forschung wäre”. G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

stojące, według niego, u początku matematyki – jest (będzie) przedmiotem badań jakiejś innej dyscypliny naukowej. Trzeba dodać, że gdyby takie badania były prowadzone „w duchu” Veronesego, to koniecznie, obok myślenia, musiałyby uwzględnić Podmiot Myślący. Pokazano bowiem, że włoski matematyk związał nieoddzielnie, w duchu arystotelesowsko-kartezjańskim, myślenie z Podmiotem (Myślącym).

W każdym razie nie wyklucza Veronese badań myślenia i badań Podmiotu Myślącego, stojących u początków matematyki, w ramach takich dyscyplin jak filozofia (epistemologia) matematyki (ale chyba nie podstawy matematyki), psychologia, neurobiologia, a także w ramach ich interdyscyplinarnych kombinacji. Sam jednak nie przejawiał żadnych ambicji do prowadzenia takich badań. Raczej przyjmował on fenomen myślenia i związany z tym, według niego, fakt istnienia Podmiotu Myślącego (wyposażonego *a priori* w logikę) jako konieczne warunki (uprawiania) matematyki.

Dalsze badanie filozofii matematyki Veronesego będzie wymagać wprowadzenia – obok takich pojęć, jak myślenie, Podmiot Myślący, logika – pojęcia przedmiotu. Zatem do analiz epistemologicznych dodane zostaną elementy ontologii. Jest to niezbędne do dalszej charakterystyki epistemologii matematyki włoskiego geometry. Charakterystykę przedmiotów, którymi zajmuje się matematyka, przedstawię później.

Pojęcie przedmiotu pojawiło się już w czterech pierwszych paragrafach korpusu matematyki Veronesego. Warto je w tym miejscu jeszcze raz przypomnieć:

- § 1. Ja myślę.
- § 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy.
- § 3. Ja myślę najpierw jedną rzecz (i) następnie jedną [inną – przyp. J.D.] rzecz.
- § 4. *Def.* To, co w myśleniu odpowiada rzeczy, jest nazywane przedstawieniem, pojęciem albo duchowym wyobrażeniem tej rzeczy.

Wypada zwrócić uwagę, że w języku niemieckim istnieje rozróżnienie między *ein Ding denken* oraz *an einen Ding denken*, czyli między *myśleć (pewną) rzecz* oraz *myśleć o (pewnej) rzeczy*. W drugim i trzecim paragrafie Veronese używa wyłącznie pierwszej formy. Píše on o *myśleniu rzeczy*, a nie o *myśleniu o rzeczy*.

Włoski matematyk nie definiuje tego, czym jest przedmiot. Nie wiąże go na przykład z istnieniem. W wyjaśnieniu do swojego drugiego paragrafu podaje natomiast *de facto* pewne przykłady przedmiotów. Veronese pisze: „Moje Ja jest *jedną* rzeczą, działania myślenia, sąd, wniosek, zwierzęta i rośliny to więcej rzeczy”⁷. Trzeba w tym miejscu przypomnieć jeszcze raz treść drugiego paragrafu, który został zaopatrzony w powyższą uwagę. W drugim paragrafie stwierdzono: „§ 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy”.

Otóż zestawienie tych dwóch tekstów stwarza pewną sytuację problemową. Na pewno można myśleć wniosek, można

⁷ „Mein Ich ist *ein* Ding, die Handlungen des Denkens, ein Urtheil, ein Schluss, die Tiere und die Pflanzen sind *mehrere* Dinge”. G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

się zgodzić, że można myśleć (wydawać) sąd – który jest tutaj czymś odmiennym od przedmiotu abstrakcyjnego, jak pojmowało go wielu filozofów, np. Immanuel Kant – można się też zgodzić, że można myśleć samego siebie, ale nie można myśleć ani zwierząt, ani roślin. Zwykło się myśleć o tych przedmiotach, a nie te przedmioty.

Narzuca się tu podział na przedmioty mentalne, będące produktem myślenia lub fragmentem (strumienia?) myślenia, i przedmioty niementalne, zapewne zewnętrzne w stosunku do Podmiotu Myślącego. Na taki przynajmniej podział zdaje się wskazywać zwyczaj językowy: myślenia pewnych przedmiotów i myślenia o pewnych przedmiotach.

Można by wprawdzie bronić hipotezy, że włoski matematyk wyliczył tu tylko takie przedmioty, które są obiektami mentalnymi w wyżej podanym znaczeniu. Ale wtedy trzeba by przyjąć, że Veronese reprezentował jakiś rodzaj solipsyzmu, czy idealizmu subiektywnego w stylu Berkeleyowskim.

Tak jednak nie jest. W dalszym ciągu swojego korpusu matematycznego wprowadza bowiem pojęcie przedmiotów duchowych (*geistige Dinge*)⁸. Należy przyjąć, że wprowadzenie takiej kategorii przedmiotów oznaczało, iż włoski matematyk uważał, że niepusty jest zbiór będący dopełnieniem (do uniwersum przedmiotów) zbioru przedmiotów duchowych. A zatem istnieją przedmioty nie-duchowe. Można je również – na mocy tekstów Veronesego – ulokować w rzeczywistości. Otóż stwier-

⁸ Por. tamże, s. 17.

dza on w dalszych tekstach istnienie świata zewnętrznego (*Aussenwelt*)⁹. Trzeba przyjąć w tym miejscu, że chodzi o świat zewnętrzny w stosunku do Podmiotu Myślącego. Nie może być zatem mowy o jakiejś formie solipsyzmu w filozofii włoskiego matematyka. I właśnie w tym świecie zewnętrznym, który wspomniano, należy umieścić Veronesego przedmioty nie-duchowe.

Wydaje się, że zasadne jest tutaj utożsamienie przedmiotów duchowych, o których pisał włoski matematyk, ze scharakteryzowanymi powyżej obiektami mentalnymi. Tak więc w nie-solipsystycznej rzeczywistości Veronesego występują z jednej strony przedmioty mentalne, z drugiej zaś przedmioty niementalne, które należą do świata zewnętrznego. Przedmioty mentalne zdefiniowano wcześniej jako produkty myślenia czy też fragmenty (strumienia?) myśli.

Wpada jeszcze w tym miejscu wskazać kontrowersję, która dała zasadniczy impuls prowadzonym powyżej rozważaniom na temat typów przedmiotów. Otóż w świetle powyżej sformułowanych wniosków trzeba stwierdzić, że nie wszystkie wyliczone przez Veronesego w jego wyjaśnieniu przedmioty mogą być zaliczone do zbioru przedmiotów mentalnych. Trzeba przyjąć, że wyliczył on zarówno przedmioty mentalne, jak i niementalne.

Warto jeszcze raz odnieść konstrukcję włoskiego matematyka do filozofii Kartezjusza. Francuski filozof, po ustaleniu istnienia „myślącego ja”, korzystał z tego ustalenia jako z prze-

⁹ Por. tamże.

słanki prowadzącej do ustalenia istnienia przedmiotów poza owym „myślącym ja”: Boga i przedmiotów materialnych (rozciągłych). Veronese natomiast w ogóle nie korzysta z ustaleń (założeń) dotyczących Podmiotu Myślącego w argumentacji dowodzącej istnienia świata zewnętrznego (*Aussenwelt*) lub przedmiotów niementalnych. Włoski matematyk bowiem w ogóle takiej argumentacji nie przedstawia. Jego filozofia obok założeń dotyczących Podmiotu Myślącego zawiera zatem szereg kolejnych mocnych założeń egzystencjalnych – właśnie tych dotyczących (istnienia) świata zewnętrznego i (istnienia) przedmiotów niementalnych.

Istnienie przedmiotów mentalnych w ontologii wynikało z założenia istnienia myślenia i – tutaj przyjętej, choć nie wyrażonej przez włoskiego matematyka *explicite* – definicji przedmiotu mentalnego (przy założeniu podzielności [strumienia] myślenia).

Wypada w tym miejscu stwierdzić, że włoski geometra wyróżnił jeszcze pewną ważną podklasę przedmiotów mentalnych. W tym celu trzeba przypomnieć treść czwartego paragrafu korpusu matematyki Veronesego:

§ 4. *Def.* To, co w myśleniu odpowiada rzeczy, jest nazywane przedstawieniem, pojęciem albo duchowym wyobrażeniem tej rzeczy.

Należy zauważyć, że włoski matematyk stawia w tym tekście znak równości m.in. pomiędzy przedstawieniami (*Vorstel-*

lungen) i pojęciami (*Begriffe*). Jest to zasadnicze uproszczenie w stosunku do zastanej tradycji. Wystarczy tutaj wskazać chociażby na subtelne rozróżnienie między przedstawieniem a pojęciem dokonane przez Bernarda Bolzana. Pojęcie (przedstawienie) jest zdaniem włoskiego matematyka tym, „co w myśleniu odpowiada rzeczy”. Zatem pojęcie (przedstawienie) jest tu pojmowane jako coś będącego „fragmentem”, „częścią” myśli. Zgodnie z przedstawioną powyżej koncepcją przedmiotu mentalnego pojęcie (przedstawienie) jest przedmiotem mentalnym.

Trzeba zaznaczyć, że odpowiada to koncepcji – walczącego z „psychologizmem”¹⁰ w podstawach logiki i matematyki – Bolzana. Ale nie do końca. Matematyk z Pragi obok pojęć (przedstawień) subiektywnych – odpowiadają one proponowanej tutaj definicji przedmiotów mentalnych – wprowadził też abstrakcyjne (pozaczasowe i pozaprzestrzenne) pojęcia (przedstawienia) obiektywne. Ich porządkowi miał – w idealnym przypadku – odpowiadać jednojednoznacznie porządek pojęć (przedstawień) subiektywnych. Włoski matematyk ograniczył się natomiast wyłącznie do Bolzanowskich pojęć (przedstawień) subiektywnych. Może to budzić podejrzenie, że Veronese – przynajmniej nieświadomie – skłaniał się w stronę psychologizmu. Do kwestii tej przyjdzie powrócić w podsumowaniu niniejszego artykułu.

Warto jeszcze raz zwrócić uwagę, że według włoskiego matematyka pojęcie (przedstawienie) to „to, co w myśleniu od-

¹⁰ Psychologizm nie był wtedy tak nazywany.

powiada rzeczy”. Veronese nie precyzuje, o jakie przedmioty (rzeczy) tutaj chodzi. Należy zatem przyjąć, że chodzi o przedmioty wszelkiego rodzaju: zarówno mentalne, jak i niementalne. Zatem Podmiot Myślący tworzy w swym myśleniu pojęcia zarówno takich przedmiotów jak wnioskowanie, które samo jest – według Veronesego – elementem myślenia (przedmiotem mentalnym), jak i takich przedmiotów jak wyspa Capri, która należy do świata zewnętrznego. Innymi słowy, każdy przedmiot – zarówno mentalny, jak i niementalny – może mieć swój „obraz” w myśleniu, a więc taki „obraz”, który jest przedmiotem mentalnym. Tym „obrazem” mentalnym każdego (potencjalnie) przedmiotu jest pojęcie (przedstawienie). W przypadku przedmiotu należącego do świata zewnętrznego można to ująć i w taki sposób: jeśli myślę o wyspie Capri, to myślę pojęcie wyspy Capri. Pojęcie wyspy Capri jest przedmiotem mentalnym, choć wyspa Capri jest przedmiotem niementalnym, jest przedmiotem należącym do świata zewnętrznego (*Aussenwelt*).

Wydaje się, że w ten sposób można wyjaśnić kontrowersję, która mogłaby się rodzić wokół komentarza Veronesego do drugiego paragrafu jego korpusu matematycznego („§ 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy”): „Kiedy się myśli, myśli się jakąś rzecz. Ja nie myślę żadnej rzeczy, znaczy: Ja nie myślę”¹¹.

Zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, nie można myśleć wyspy Capri, ponieważ nie jest ona przedmiotem mentalnym.

¹¹ „Wenn man denkt, denkt man irgend ein Ding. Ich denke kein Ding, bedeutet: Ich denke nicht”. G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

Można myśleć o wyspie Capri. Ale kiedy się o niej myśli, myśli się pojęcie wyspy Capri. Owo pojęcie jest przedmiotem mentalnym, jest przedmiotem, który się myśli. A zatem nawet wtedy, kiedy myśli się o jakimś przedmiocie niementalnym, myśli się pewien przedmiot mentalny.

W szóstym paragrafie swojego korpusu matematycznego Veronese wyjaśnia *explicite* różnicę między *denken ein Ding* oraz *denken an ein Ding*. Stwierdza on: „Kiedy myślę pewną rzecz, to mówi się: Rzecz jest przez myślenie *dana*, kiedy myślę o pewnej rzeczy, mówi się: rzecz jest *myśleniu* dana. *Przykł.* Budowa sądu jest przedmiotem danym przez myślenie; Człowiek Karol jest przedmiotem danym myśleniu”¹².

Należy jeszcze raz wyjaśnić, że myślany może być tylko przedmiot mentalny, w tym pojęcia przedmiotów niementalnych (oraz oczywiście mentalnych), a także pojęcia pojęć, pojęcia pojęć pojęć itd. Podmiot Myślący natomiast może myśleć o każdym dowolnym przedmiocie.

Veronese formułuje w dalszym fragmencie swego korpusu matematycznego coś, co można by nazwać zasadą równoważności myślenia. Warto w tym miejscu przytoczyć dłuższy fragment paragrafu osiemnastego:

¹² „§ 6. *Def.* Wenn ich ein Ding denke, so sagt man: Das Ding ist von dem Gedanken *gegeben* oder *gesetzt*, wenn ich an ein Ding denke, so sagt man: Das Ding ist *dem* Gedanken gegeben. *Beisp.* Der Aufbau eines Urtheils ist ein von dem Gedanken gesetztes Ding; der Mensch Carl ist ein dem Gedanken gegebenes Ding”. G. Veronese, dz. cyt.

Kiedy wydajemy sąd (*Urtheil*) [kiedy sąd jest przez myślenie dany – przyp. J.D.], możemy potem osądzić, czy ten sąd jest poprawny (*richtig*), czy też nie: w takim wypadku [osądzenia – przyp. J.D.] sąd jest traktowany jako dany myśleniu. W podobny sposób więcej rzeczy, które najpierw są przez myślenie dane, może być później traktowane jako dane myśleniu. [...] I odwrotnie: ponieważ każdemu przedmiotowi danemu myśleniu odpowiada jakieś pojęcie, za pomocą którego ten przedmiot porównujemy z innymi przedmiotami, to możemy ów przedmiot, za pośrednictwem owego pojęcia, traktować jako dany przez myślenie. A zatem obowiązuje następujące zdanie:

Przedmiot dany przez myślenie może później być traktowany jako dany myśleniu i na odwrót.

Przykł. Przez powtórzenie tego samego duchowego działania konstruujemy np. liczbę dwa, potem jednak możemy tę liczbę uważać jako przedmiot dany myśleniu¹³.

¹³ „§ 18. Wenn wir ein Urtheil aufstellen, so können wir nachher beurtheilen, ob dieses Urtheil richtig ist oder nicht; in einem solchen Fall wird das Urtheil als ein dem Gedanken gegebenes Ding betrachtet. Auf gleiche Weise können mehrere Dinge, die zuerst von dem gesetzt sind, nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und zwar entweder in der Ordnung, in der wir sie betrachtet haben, oder unabhängig von dieser Ordnung, das heißt indem wir von derselben absehen. Und umgekehrt: Da einem dem Gedanken gegebenen Ding ein Begriff entspricht, mittels dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen, so können wir es mittels dieses Begriffs als von dem Gedanken gesetzt auffassen. Es gilt deshalb der folgende Satz: Ein von den Gedanken gesetztes Ding kann nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und umgekehrt.

Otóż należy zaznaczyć, że sformułowane i uzasadniane w powyższym tekście twierdzenie jest koniunkcją dwóch zdań („i na odwrót”). Veronese przytacza dwa przykłady, które mają potwierdzać owo zdanie. Można je uzasadnić i w taki sposób: jeśli myśli się jakiś przedmiot, to można też o tym przedmiocie myśleć. Zaś tym – zgodnie z tym, co pisał włoski matematyk – co odpowiada w myśleniu temu przedmiotowi jest pojęcie. Podmiot Myślący myśli (wydaje) pewien sąd, ale może myśleć o owym sądzie, np. zastanawiając się, czy jest on prawdziwy, czy też fałszywy. Tym, co w myśleniu odpowiada owemu sądowi (choć sam jest on przedmiotem mentalnym), jest pojęcie owego sądu.

Trudno natomiast zgodzić się z drugim zdaniem powyższej koniunkcji. Wypada je w tym miejscu sformułować. Brzmi ono: przedmiot dany myśleniu może później być traktowany jako dany przez myślenie.

Chodzi o dowolny przedmiot. Jest to więc w istocie zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora ogólnego: dla każdego przedmiotu. Wystarczy zatem jeden kontrprzykład, aby obalić to twierdzenie. Można odwołać się do przykładu podawanego już wyżej. Wyspa Capri jest dana myśleniu: Podmiot Myślący myśli o wyspie Capri. Ale Podmiot Myślący nie może myśleć wyspy Capri (Podmiot Myślący może myśleć wyłącznie pojęcie wyspy Capri): wyspa Capri nie może być dana przez myślenie.

Beisp. Durch die Wiederholung derselben geistigen Handlung construieren wir z. B. die Zahl zwei, dann aber können wir diese Zahl als ein dem Gedanken gegebenes Ding ansehen”. G. Veronese, dz. cyt.

Łatwo stwierdzić, że obalone zdanie jest trywialnie prawdziwe, gdy kwantyfikuje się po przedmiotach mentalnych. Uzupełnieniem kontrprzykładu jest wskazanie na uzasadnienie, które Veronese starał się dać podważonemu twierdzeniu: jest ono mętne, nie mieści się w ramach tego, co zwykle się kwalifikować jako uzasadnienie w filozofii analitycznej.

Podsumowując w tym miejscu analizę tego wątku filozofii Veronesego, który dotyczy „przecięcia” problematyki Podmiotu Myślącego i podstaw ontologii, należy stwierdzić, że włoski matematyk nie włożył wielkiego wysiłku w rozpracowanie tematyki. Wydaje się on zaledwie „szkicować” niektóre kwestie, nie przykładając należytej uwagi do szczegółów. Stąd właśnie biorą się wadliwości oraz niejasności jego koncepcji powodujące pewne trudności interpretacyjne. Trzeba też zapytać, czy nie można było uprościć Veronesego ujęcia myślenia, wprowadzając poziom przedmiotowy myślenia (myślenie przedmiotów), poziom metapredmiotowy (myślenie o przedmiotach, za pomocą pojęć), poziom metametapredmiotowy (myślenie o myśleniu o przedmiotach, za pomocą pojęć pojęć) itd. Zapewne w ten sposób wprowadzono by większą przejrzystość prowadzonych analiz, ale lektura tekstu włoskiego matematyka nie wydaje się zawierać takiej sugestii. Tak więc posłużenie się takim narzędziem byłoby zdecydowanym „naddatkiem” w stosunku do jego intencji.

Dalsze analizy dotyczące Podmiotu Myślącego Veronesego muszą koniecznie podjąć kwestię innego jeszcze, niż logika, uposażenia apriorycznego Podmiotu. Włoski matematyk wska-

zuje na owo *a priori* niezwykle zdawkowo, zaledwie w jednym krótkim przypisie:

Następstwo naszych przedstawień lub umiejętność traktowania wielu rzeczy jedna po drugiej daje nam ogląd pewnego przedmiotu, bez którego nie moglibyśmy rozwinąć naszego myślenia. Owym przedmiotem jest czas. Abstrahujemy jednak od czasu jako elementu naszych rozważań¹⁴.

Włoski matematyk wychodzi tutaj od pewnych podstawowych (samo)obserwacji Podmiotu Myślącego. Otóż Podmiot potrafi rozpoznać następstwo przedstawień (pojęć) w swoim myślenia, a także zdolność traktowania (zajmowania się) przedmiotów „po kolei”. Należy mocno podkreślić, że Podmiot nie musi dla rozpoznania tych zdolności wychodzić poza swoje myślenie, nie musi odwoływać się do świata zewnętrznego. Według włoskiego matematyka owe (samo)obserwacje dają Podmiotowi ogląd (*Anschauung*) czasu. Zaskakujące jest stwierdzenie Veronesego, że czas jest przedmiotem – a nie np. pojęciem (przedstawieniem). Swego stwierdzenia dotyczącego przedmiotowości czasu włoski matematyk w żaden sposób nie wyjaśnia. Nie

¹⁴ „Die Aufeinanderfolge unserer Vorstellungen oder das Vermögen mehrere Dinge das eine nach dem anderen betrachten zu können gibt uns die Anschauung von einem gewissen Ding, ohne welches wir unserem Gedanken nicht entwickeln können. Dieses gewisse Ding ist die Zeit. Wir abstrahieren jedoch von der Zeit als Element unserer Betrachtungen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 8.

wiadomo w szczególności, czy jest to przedmiot zewnętrzny w stosunku do świata Podmiotu Myślącego, czy też nie. W każdym razie z faktu, że samoobserwacja Podmiotu prowadzi go do oglądu (*Anschauung*) czasu, wynika, iż albo czas jest przedmiotem „w” Podmiocie, albo też przynajmniej w Podmiot Myślący „wbudowane” jest jakieś *a priori* czasu. Czas (*a priori* czasu) jest w Podmiocie pierwotne w stosunku do myślenia. Co więcej, rozwój myślenia Podmiotu koniecznie wymaga „wcześniejszego” (*a priori*) czasu w Podmiocie Myślącym.

Veronese podkreśla, że nie czyni czasu przedmiotem swoich rozważań. Jest to zasadniczy brak jego filozofii matematyki. Tym bardziej że okaże się, iż właśnie czas, lub ogląd (*Anschauung*) czasu, stanowi „materiał”, z którego Podmiot Myślący konstruuje arytmetykę i – szerzej – czystą matematykę. Pomysł oczywiście pochodzi od Kanta. Ale filozof z Królewca, znajdując w apriorycznych formach naoczności – czasie i przestrzeni – konieczny „materiał” do konstrukcji matematyki, poświęcił im i ich niezbędności znaczny i istotny fragment swoich badań. Veronese natomiast zbywa w istocie całą kwestię jednym przypisem.

Trzeba jednak zaznaczyć, że czas (*a priori* czasu) leży już u podstaw jednego z pierwszych paragrafów korpusu matematyki Veronesego. Wypada go w tym miejscu przypomnieć: „§ 3. Ja myślę najpierw jedną rzecz (i) następnie jedną [inną – przyp. J.D.] rzecz”. Myślenie „najpierw” i „następnie” opiera się niewątpliwie na założeniu (*a priori*) czasu. Poza tym leży ono u podstaw arytmetyki. Włoski matematyk odwołuje się w swej konstrukcji arytmetyki do stworzonego przez siebie aparatu teo-

riomnogościowo-mereologicznego. Czasami jednak opisuje ją bez odwołania do szczegółów technicznych. Wtedy stwierdza:

Przykł. Przez powtórzenie tego samego duchowego działania konstruujemy np. liczbę dwa, potem jednak możemy tę liczbę uważać jako przedmiot dany myśleniu.

Z powyższego tekstu wynika, że Podmiot Myślący konstruuje liczbę dwa – a potem następnie liczby naturalne – przez powtórzenie pewnego mentalnego działania. Powtórzenie działania wymaga niewątpliwie leżącego u jego podstaw (*a priori*) czasu.

Do kwestii konstruktywizmu w filozofii matematyki Veronesego przyjdzie jeszcze powrócić, kwestię *a priori* czasu w Podmiocie Myślącym można natomiast podsumować następująco:

1. Podmiot Myślący ma zdolność traktowania rzeczy „jedna za drugą”;
2. Podmiot Myślący rozpoznaje następstwo przedstawień (pojęć);
3. Te zdolności Podmiotu Myślącego dają mu ogląd czasu;
4. Czas jest przedmiotem;
5. Nie jest rozstrzygnięte, czy czas jest przedmiotem w Podmiocie Myślącym, czy poza nim;
6. Czas lub *a priori* czasu jest w Podmiocie Myślącym;
7. Podmiot Myślący rozpoznaje czas w sobie bez odwołania do świata zewnętrznego;

8. Czas jest w Podmiocie Myślącym przed myśleniem;
9. Podmiot Myślący nie może rozwijać myślenia bez (*a priori*) czasu;
10. Czas (*a priori* czasu) pozwala rozwinąć Podmiotowi Myślącemu arytmetykę.

Skoro powyżej analizowano zagadnienie czasu, to warto zaraz potem podjąć kwestię przestrzeni w posiadających wydzwięk filozoficzny wypowiedziach włoskiego matematyka. Veronese kwituje to zagadnienie bardzo krótko:

Przez oglądową przestrzeń (*Anschauungsraum*) rozumiemy tutaj przedstawienie (pojęcie) świata zewnętrznego, a nie sam ów świat zewnętrzny¹⁵.

Włoski matematyk łączy pojęcie oglądu z pojęciem przestrzeni. Ta zbitka pojęciowa wskazywałaby na „ślady” kantowskiego podejścia do zagadnienia przestrzeni. Tak jednak nie jest. Przestrzeń – ta której ogląd posiada Podmiot Myślący – nie jest *a priori*; nie jest aprioryczną formą naoczności. Oglądowa przestrzeń jest pojęciem Podmiotu Myślącego wytworzonym przez „ogląd” zmysłowy świata zewnętrznego.

O ile zatem Veronese zdaje się rozwiązywać zagadnienie czasu w duchu kantowskim – czas lub *a priori* czasu jest w Pod-

¹⁵ „Unter Anschauungsraum verstehen wir hier die Vorstellung von der äusseren Welt und nicht etwa diese selbst”. G. Veronese, dz. cyt., s. 17.

miocie Poznającym – o tyle przestrzeń, która występuje w poznaniu świata zewnętrznego, jest czymś w świecie zewnętrznym, a nie jest *a priori* w Podmiocie Myślącym.

Dlaczego włoski matematyk przyjął takie właśnie rozwiązanie? Veronese odchodzi od głównego nurtu rozwiązania kantowskiego, ponieważ XIX wiek przyniósł pluralizm geometrii. Sam w swym monumentalnym dziele zajmuje się on geometriami n -wymiarowymi i dlatego nie mógł uznać istnienia jednej i jedynej apriorycznej przestrzeni. Zaproponowane przez niego rozwiązanie idzie w tym kierunku, że Podmiot Myślący ma dzięki poznaniu zmysłowemu pojęcie jednej przestrzeni świata zewnętrznego, a inne przestrzenie są przedmiotami mentalnymi – produktem myślenia Podmiotu Myślącego – których pojęciami posługuje się w (różnych) geometriach.

Generalnie trzeba stwierdzić, że podejście Veronesego do kwestii czasu i przestrzeni przypomina rozwiązanie intuicjonistów. Te same też są powody rezygnacji z *a priori* przestrzeni świata zjawiskowego w Podmiocie. *A priori* czasu zaś w obydwu przypadkach wykorzystane jest do konstrukcji liczb naturalnych (arytmetyki).

Wypada teraz przejść do ogólnej charakterystyki przedmiotów, którymi, według Veronesego, zajmuje się matematyka. Włoski matematyk odpowiednie definicje przedstawił w korpusie swej matematyki i uzupełnił pewnymi wyjaśnieniami w *Przedmowie*. W paragrafie 38 podał następującą definicję abstrakcyjnych przedmiotów matematycznych:

Przedmioty duchowe (mentalne), których charakterystykami są całość, części, porządek, rodzaj pozycji, albo które dają się porównywać za pomocą tych charakterystyk, nazywają się *abstrakcyjnymi matematycznymi formami* albo *wielkościami*, nawet jeśli nie uwzględnia się niektórych wyżej wymienionych charakterystyk¹⁶.

W tym miejscu nie wydaje się konieczne wyjaśnianie wszystkich terminów, którymi posługiwał się Veronese. Niech wystarczy wyjaśnienie jednego podanego przez niego terminu:

Charakterystyka (*contragesso*) pewnej rzeczy jest tym, za pomocą czego możemy ową rzecz porównywać z innymi rzeczami. *Przykł.* Caius jest jako człowiek równy Tytusowi, ale Caius i Tytus mogą być różni przy odniesieniu do innych ich charakterystyk¹⁷.

Istotne jest stwierdzenie włoskiego matematyka, że abstrakcyjne formy matematyczne to przedmioty duchowe (*geistige*), czyli – zgodnie z przyjętą tu terminologią – przedmioty

¹⁶ „§ 38. *Def. I.* Die geistigen Gegenstände, deren Merkmale das Ganze, die Theile, die Ordnung und die Art der Position sind oder welche sich mittels dieser Merkmale vergleichen lassen, heissen *abstracte mathematische Formen oder Grössen*, auch wenn von einigen der obengennanten Merkmale abgesehen wird”. G. Veronese, dz. cyt.

¹⁷ „§ 9. *Def. I.* Das Merkmal (*contragesso*) eines Dinges ist dasjenige, mittels dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen können. *Beisp.* Caius ist dem Titius als Mensch gleich, aber Caius und Titius können im Bezug auf andere ihrer Merkmale verschieden sein”. G. Veronese, dz. cyt.

mentalne. Są zatem abstrakcyjne formy matematyczne (czy też wielkości, jak chce Veronese) elementami myślenia Podmiotu Myślącego – są jego „produktem”. Opatrzanie owych przedmiotów drugą nazwą: „wielkość”, o wielkim ciężarze gatunkowym w dziejach matematyki, każe się bliżej przyjrzeć abstrakcyjnym formom matematycznym. Matematyka przecież wielokrotnie w swych dziejach, od starożytności greckiej, określana była jako nauka o wielkościach.

Otóż Veronese stwierdza, że abstrakcyjne formy matematyczne to przedmioty, którymi zajmują się nauki ścisłe – logika i matematyka czysta:

Liczba, która w pierwszym ujęciu jest efektem liczenia przedmiotów, mogących być także czysto abstrakcyjnymi, należy do drugiej kategorii, ponieważ nie jest potrzebny żaden przedmiot poza myśleniem, który ją przedstawia, tzn. musiałby dać jej obraz, aby otrzymała znaczenie matematyczne. Przedmioty drugiej kategorii nazywają się *formami*, a nauki, które zajmują się formami – naukami *formalnymi*. Takimi są logika i czysta matematyka. W tych naukach prawda pochodzi ze zgodności różnych aktów myślenia¹⁸.

¹⁸ „Die Zahl, welche in ihrer ersten Bildung das Resultat der Verrichtung des Zählens von Gegenstaenden ist, die auch rein abstract sein können, gehört dagegen der zweiten Kategorie an, weil kein Gegenstand ausserhalb des Gedankens nöthig ist, welche sie darstellen, d.h. ihrer Bild liefern müsste, damit sie ihre mathematische Bedeutung erhalte. Die Dinge der zweiten Kategorie heissen *Formen* und die Wissenschaften, welche sich mit den Formen beschäftigen, *formale*.”

Oznacza to, że logika i matematyka czysta zajmują się abstrakcyjnymi formami, które, zgodnie z tym, co powiedziano wyżej i co zostało potwierdzone w ostatnim tekście, są przedmiotami mentalnymi. Logikę i matematykę czystą można by uprawiać w izolowanym, solipsystycznym świecie Podmiotu Myślącego.

Trzeba zauważyć, że Veronese nie rozróżnia *explicite* przedmiotów matematyki czystej i przedmiotów logiki. Te pierwsze można z pewnością – zgodnie z jego wskazaniem – nazwać abstrakcyjnymi formami matematyki. Te drugie, zgodnie z tym, co twierdzi on w swym ostatnim tekście, to również formy abstrakcyjne. Konsekwentnie trzeba by je nazwać abstrakcyjnymi formami logicznymi. Ale oprócz tego, że są one przedmiotami mentalnymi, więcej o nich na podstawie tekstów włoskiego matematyka nie da się powiedzieć.

Veronese podaje jednak jeszcze jedną kategorię przedmiotów, którymi zajmuje się matematyka.

Kiedy pewnej konkretnej rzeczy (realnie poza myśleniem egzystującemu przedmiotowi) odpowiada pewna abstrakcyjna forma matematyczna, to owa rzecz nazywa się konkretną matematyczną formą¹⁹.

Solche sind die Logik und die reine Mathematik. In diesen Wissenschaften geht die Wahrheit aus der Übereinstimmung verschiedenen Acte des Gedankens hervor". G. Veronese, dz. cyt., s. 7.

¹⁹ „Wenn einem concreten Ding (einem reellen ausserhalb des Gedankens existirenden Gegenstand) eine abstracte mathematische Form entspricht, so heisst der gegebene Gegenstand *concrete mathematische Form*". G. Veronese, dz. cyt., § 38.

Tym samym stwierdza *de facto*, że w świecie zewnętrznym w stosunku do Podmiotu Myślącego istnieją przedmioty konkretne (rozciągłe), którym odpowiadają abstrakcyjne formy matematyczne. Na czym owa odpowiedniość ma polegać, nie odpowiada. Mając dotychczasowe ustalenia dotyczące Podmiotu Myślącego i jego uposażenia, należy przypuszczać, że odpowiedniość zachodzi wtedy, gdy przedmiot konkretny i abstrakcyjna forma matematyczna (przedmiot mentalny) podpadają pod to samo pojęcie, w które wyposażony jest podmiot. Owa odpowiedniość ma pewne dalsze skutki, które Veronese natychmiast zauważa w przypisie do przedstawionej powyżej definicji:

Stąd wynika, że kiedy chce się traktować konkretne matematyczne formy z logiczną ścisłością, to trzeba przynajmniej podstawowe zasady dotyczące abstrakcyjnych form matematycznych odnieść do odpowiednich konkretnych form, ponieważ my prowadzimy badania dotyczące nie realnych przedmiotów, ale odpowiadających im duchowych (mentalnych) przedstawień²⁰.

W tym miejscu wyznacza Veronese metodologię matematyki stosowanej, która zajmuje się konkretnymi formami mate-

²⁰ „Daraus geht hervor, dass wenn man die concreten mathematischen Formen mit logischer Schärfe behandeln will, man wenigstens die Grundprincipien der abstracten den concreten entsprechenden Formen aufstellen muss, da wir ja nicht über die reellen Gegenstände sondern über ihre entsprechenden geistigen Darstellungen unsere Untersuchungen anstellen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 19.

matycznymi. Po stwierdzeniu opisanej wyżej odpowiedniości zajmuje się abstrakcyjnymi formami matematycznymi i stosuje do nich zasady (operacje) logiczno-matematyczne. Działania matematyka – w przypadku uprawiania matematyki stosowanej – dokonują się w sferze mentalnej. Konieczna jest jednak konfrontacja – w przypadku matematyki stosowanej – z rzeczywistością zewnętrzną w stosunku do Podmiotu Myślącego. Chodzi tu o jakąś (nieważne, czy będzie to weryfikacja, falsyfikacja czy korroboracja) formę sprawdzenia empirycznego (testu) wyników operacji matematycznych dokonanych na mentalnych odpowiednikach konkretnych form matematycznych. Veronese stwierdza w *Przedmowie*:

Nauki o przedmiotach istniejących rzeczywiście poza myśleniem nazywają się »eksperymentalnymi«. Prawda tych nauk polega na zgodności myślenia z przedmiotem poza myśleniem²¹.

Stwierdzenie włoskiego matematyka, że prawda w przypadku nauk eksperymentalnych polega na zgodności myślenia z przedmiotem zewnętrznym, to potwierdzenie, że w przypadku matematyki stosowanej trzeba testu empirycznego dla wyników operacji mentalnych.

²¹ „Die Wissenschaften von thatsächlich ausserhalb des Gedankens existirenden Gegenständen heissen ‘experimentale’. Die Wahrheit diesen Wissenschaften beruht dagegen auf der Übereinstimmung des Gedankens mit dem Gegenstand ausserhalb desselben”. G. Veronese, dz. cyt., s. 7.

W wyżej prezentowanych tekstach Veronese dotyka – dyskutowanej od czasów pitagorejczyków po dzień dzisiejszy – kwestii matematyczności przyrody (świata zewnętrznego). Daje też swoją odpowiedź na pytanie o matematyczność świata zewnętrznego. Jest on matematyczny, ponieważ występują w nim konkretne formy matematyczne, które odpowiadają – podpadając pod to samo pojęcie będące na uposażeniu Podmiotu Myślącego – mentalnym abstrakcyjnym formom matematycznym, którymi zajmuje się matematyka czysta.

Nie jest jednak tak, że Veronese znalazł absolutne rozwiązanie problemu matematyczności świata. W istocie cały problem tylko przesunął. Rodzi się bowiem pytanie, dlaczego istnieją w świecie zewnętrznym konkretne formy matematyczne, które odpowiadają (mentalnym) abstrakcyjnym formom matematycznym. Veronese tego pytania nawet nie postawił, tym trudniej więc doszukiwać się u niego odpowiedzi. Nie dostrzegł też innej trudności, którą można opisać następująco: stwierdza się zgodność matematycznych form – abstrakcyjnej i konkretnej. Na abstrakcyjnej dokonuje się operacji logiczno-matematycznych. Dlaczego test empiryczny potwierdza przewidywania sformułowane w wyniku zastosowania owych operacji? Czy znaczy to, że świat pozamentalny również posiada strukturę logiczno-matematyczną? Ale jeśli tak, to dlaczego świat ma taką strukturę? Te pytania w koncepcji Veronesego pozostają bez odpowiedzi. Nie dał on zatem zadowalającego rozwiązania problemu matematyczności świata. Nie jest to jednak żadna ujma, gdyż Veronese znajduje się tutaj w towarzystwie wielu wybitnych myślicieli.

Wypada jeszcze raz powrócić do kwestii przedmiotów, którymi według włoskiego badacza zajmuje się matematyka. Dotychczas ustalono, że matematyka czysta zajmuje się badaniem abstrakcyjnych form matematycznych, natomiast matematyka stosowana zajmuje się badaniem konkretnych form matematycznych. Veronese w zbiorze tych pierwszych wyróżnia poza tym formy, które odpowiadają konkretnym formom matematycznym. Nie przypisuje im jednak istotnego znaczenia w matematyce:

Z drugiej strony nie możemy zapomnieć, że materiał, którego dostarczają nam zmysłowe wrażenia, jest przerabiany przez naszego ducha, i że element subiektywny ma przewagę nad elementem obiektywnym w matematyce czystej, geometrii i racjonalnej mechanice, i że ponadto my wszyscy posiadamy w sobie pierwsze idealne geometryczne formy, zanim jeszcze zaczynamy studium geometrii i bez konieczności zakładania, że te formy byłyby właśnie realnymi przedmiotami z ich wszystkimi niedokładnościami²².

²² „Wir können aber anderseits nicht verkennen, dass der Rohstoff, den uns die sinnliche Eindrücke liefern, durch unsern Geist verarbeitet wird und dass das subjective Element in der reinen Mathematik, der Geometrie und der rationalen Mechanik den Vorrang vor dem objectiven Element hat, und dass wir alle überdies die ersten idealen geometrischen Formen in uns besitzen, noch ehe wir mit dem Studium der Geometrie beginnen und ohne voraussetzen zu müssen, diese Formen seien eben die reellen Gegenstände mit ihrem sämmtlichen Ungenauigkeiten”. G. Veronese, dz. cyt., s. 15.

Tak więc ostatecznie matematyka czysta, a także geometria, a nawet mechanika posługują się i odnoszą się do przedmiotów mentalnych, jakimi są abstrakcyjne formy matematyczne i geometryczne. Aby zrozumieć stanowisko Veronesego, trzeba przypomnieć, że w swoim monumentalnym dziele zajmował się on geometriami n -wymiarowymi. Jest oczywiste, że nie mógł się w niej absolutnie odwoływać do materiału dostarczanego przez wrażenia zmysłowe. Obiektów takich geometrii dostarcza zatem myślenie, rzecz jasna w formie nieogładowej.

Włoski matematyk zwrócił też uwagę na istotną sprawę języka matematyki. Veronese natychmiast po charakterystyce Podmiotu Myślącego, w § 5 zajął się kwestią oznaczania rzeczy (pojęć) przez znaki. Stwierdza tam: „Jedna lub więcej rzeczy albo pojęć będzie oznaczana przez znaki, np. przez litery alfabety. *Def.* Te znaki *przedstawiają* te rzeczy, a te rzeczy *odpowiadają* swoim znakom i są przez swoje znaki przedstawiane”²³.

Należy zauważyć, że w przytoczonym tekście nie ma *explicitie* Podmiotu Myślącego oznaczającego znakami pewne obiekty i operującego znakami. Można z niego jednak wyprowadzić dwa wnioski:

1. Według Veronesego nie istnieje obiektywny porządek wiążący znaki z przedmiotami. Jest to kwestią konwen-

²³ „§ 5. Ein oder mehrere Dinge oder Begriffe werden mit Zeichen, z. B. mit Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden. *Def.* Diese Zeichen *stellen* diese Dinge *dar*, und diese Dinge *entsprechen* ihren Zeichen und werden durch ihre Zeichen dargestellt”. G. Veronese, dz. cyt.

cji. Wskazuje na to wyraźnie zwrot „*zum Beispiel*”. Powstaje tu oczywiście pytanie o ustalającego konwencję. Kontekst czterech pierwszych paragrafów poprzedzających analizowany tekst Veronesego zdaje się jednoznacznie wskazywać na Podmiot Myślący.

2. Mówiąc o oznaczaniu, Veronese używa strony biernej. Wskazuje to na jakąś „moc” (podmiot), która rzeczom (pojęciom) przypisuje znaki. I tutaj kontekst poprzedzającej piąty paragraf charakterystyki Podmiotu Myślącego wskazuje na ten Podmiot.

Zatem generalny wniosek w tym miejscu jest taki, że choć Veronese, poruszając kwestię „znakowania” przedmiotów, nie odwołuje się *explicite* do scharakteryzowanego wcześniej Podmiotu Myślącego, to ów Podmiot wydaje się „mocą sprawczą” oznaczania znakami przedmiotów.

Ostateczną pewność w tej kwestii daje lektura dalszych fragmentów *Geometrii*. W § 36 włoski matematyk pisze: „ponieważ miejsca (pozycje) zajęte przez ten sam przedmiot są różne, to możemy powtórzoną rzecz przy każdym powtórzeniu oznaczyć odmiennym znakiem”²⁴.

Użyty przez autora zaimek osobowy „my” (*wir*) ewidentnie wskazuje na podmiotowe uwarunkowanie doboru znaków. In-

²⁴ „§ 36. Da die von demselben Ding in der Reihe eingenommenen Stellen verschieden sind, so können wir das wiederholte Ding bei jeder Wiederholung mit einem von dem vorhergehenden verschiedenen Zeichen belegen”. G. Veronese, dz. cyt.

nymi słowy, dalsze teksty *Geometrii* potwierdzają tezę, że według Veronesego właśnie Podmiot Matematyczny ma zdolność oznaczania przedmiotów za pomocą prostych znaków.

Z kolei § 42 zawiera tekst „dotykający” pierwszego z wyżej sformułowanych wniosków: „§ 42. *Przykł. 1.* Tak zachodzi pomiędzy formami i ich znakami związek jednoznaczny, gdy każdemu znakowi odpowiada jeden przedmiot i każdemu przedmiotowi jeden znak”²⁵.

Veronese stwierdza w istocie, że można ustalić – dokładniej, na podstawie wcześniejszych analiz, trzeba by powiedzieć: Podmiot Myślący jest w stanie ustalić – jednoznaczne przyporządkowanie znaków przedmiotom (pojęciom). Wypada przypuszczać, że Podmiot Myślący jest w stanie zapamiętać owo przyporządkowanie (funkcję). To wydaje się podstawową umiejętnością konieczną do stworzenia przez Podmiot Myślący sztucznego (symbolicznego) języka (matematyki).

Trudno ustalić, czy Veronese, jak np. intuicjoniści, był zdania, że matematyka może być uprawiana jako czynność czysto mentalna, bez potrzeby werbalizowania owych myśli, czyli bez języka. Sam – oczywiście ze względu na potrzebę komunikacji – postulował symboliczny język matematyki i wskazywał w istocie, że umiejętność zbudowania takiego języka jest podstawową zdolnością Podmiotu Myślącego.

²⁵ „§ 42. *Beisp. 1.* So besteht zwischen den Formen und ihren Zeichen ein eindeutiger Zusammenhang, wenn jedem Zeichen ein Ding entspricht und einem Ding ein Zeichen”. G. Veronese, dz. cyt.

Trzeba jednak zaznaczyć, że Veronese podkreśla, iż matematyka nie jest nauką o znakach, ale o przedmiotach (mentalnych) i o pojęciach. Pisze on wprost: „czysta matematyka przedstawia się jako nauka o pojęciach, a nie o czystych [...] znakach, jakiegokolwiek te ostatnie by były”²⁶. Można więc uznać, że, podobnie jak później Hilbert, Veronese stał na stanowisku, iż matematyki nie można redukować do zbioru formuł budowanych ze znaków. Twierdził on wprost, że matematyka posiada pewną treść (poza-znakową). Wydaje się, że ten pogląd Veronesego został wypowiedziany jako sprzeciw wobec atakującego go niejednokrotnie Peana, który skłonny był redukować matematykę do jej zapisu formalnego²⁷.

Kończąc przegląd tematów z zakresu filozofii matematyki poruszanych przez Veronesego, należy jeszcze koniecznie zwrócić uwagę na jedną kwestię, która poniekąd przewijała się w dotychczasowych analizach. Podobnie jak Kant i współcześni mu intuicjoniści był Veronese konstruktywistą. Matematyka dotyczy przedmiotów mentalnych. Są one – zgodnie z określeniem przed-

²⁶ „Die reine Mathematik stellt sich so als eine Wissenschaft von Begriffen und nicht von reinen [...] Zeichen dar, wie möglich die letzteren auch sein mögen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 26.

²⁷ „Aus Furcht in das Unbestimmte zu gerathen soll man aber auch nicht die Mathematik und Geometrie in ihren Fundamenten auf einen reinen Zeichenconventionalismus reducirern wollen, wohl aber soll man sie auf philosophische Art behandeln, d.h. die Natur der Dinge, mit denen man sich beschaeftigt, möglichst klar machen, ohne deshalb die Bedeutung anderer Methoden zu bestreiten, die von einem anderen, aber beschränkten, Gesichtspunkt ausgehen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 13.

miotów mentalnych – produktem myślenia Podmiotu Myślącego. Zatem Podmiot Myślący tworzy, konstruuje obiekty matematyki.

Lektura dzieła włoskiego matematyka dostarcza tutaj stosownych przykładów. Najlepszym jest tekst, który już kilkakrotnie, w innym nieco kontekście, był tu przytaczany:

Przykł. Przez powtórzenie tego samego duchowego działania konstruujemy np. liczbę dwa, potem jednak możemy tę liczbę uważać za przedmiot dany myśleniu.

Trzeba zaznaczyć, że w istocie konstrukcja arytmetyki proponowana przez Veronesego jest bardziej skomplikowana. Prowodzi ona przez odpowiednik teorii mnogości/mereologii, którego projekt przedstawił. I tutaj jednak zachodzą procedury konstruowania pewnych przedmiotów przez Podmiot Myślący. Jako zobrazowanie niech posłuży jeden przykład:

§ 13. *Def. I.* Ja myślę razem więcej danych rzeczy, które nie są nawzajem sprzeczne i są takie, że kiedy usunę dowolną z nich, to nie wyjmę żadnej innej rzeczy. Rezultat tej operacji nazywa się *grupą* (agregatem, wielością albo systemem) danych rzeczy²⁸.

²⁸ „§ 13. *Def. I.* Ich denke mehrere gegebene Dinge zusammen, welche sich nicht gegenseitig widersprechen und so beschaffen sind, dass, wenn ich ein beliebiges von ihnen wegnehme, ich nicht irgend ein anderes der gegebenen Dinge wegnehme. Das Resultat dieser Operation heisst *Gruppe* (Aggregat, Vielheit oder System) der gegebenen Dinge”. G. Veronese, dz. cyt.

Mowa tu o pewnej operacji (*Operation*), która jest działaniem mentalnym: myśleniem razem (*zusammendenken*). Rezultatem tej operacji to nowy przedmiot – niewątpliwie mentalny – któremu Veronese daje nazwy znane z dziejów teorii mnogości czy mereologii. Tak więc dokonuje się tutaj, według włoskiego geometry, mentalna konstrukcja nowego przedmiotu. Jest on dalej wykorzystywany w (mentalnej) konstrukcji przedmiotów arytmetyki – liczb naturalnych.

Można wspomnieć, że Bolzano w swych pierwszych dociekaniach teoriomnogościowo-mereologicznych rozumował dokładnie tak samo. Zbiór, wielość były mentalnymi konstrukcjami, rezultatem myślenia razem (*zusammendenken*) pewnych przedmiotów. Dopiero w dojrzałej fazie swojej działalności matematyk z Pragi „zobiektywizował” zbiory i wielości. Veronese natomiast pozostał na stanowisku konstruktywistycznym.

Konstruktywiści – niezależnie od tego, jak pojmują konstrukcję – mają zasadnicze trudności z fundamentalnym dla matematyki pojęciem nieskończoności. Veronese był tego świadomy. Zdawał sobie sprawę, że nie można przypisać Podmiotowi Myślącemu zdolności wykonania aktualnie nieskończenie wielu operacji, ani myślenia nieskończenie wielu przedmiotów, nawet gdyby to było „rozciągnięte” w czasie. Uważał jednak, iż Podmiot Myślący może myśleć o (*denken an*) nieskończenie wielu przedmiotach, a zatem dysponuje pojęciem nieskończoności (aktualnej)²⁹.

²⁹ „Wir können überdies von den Beziehungen des Gedankens zu den wahrnehmbaren Dingen abstrahieren. Auf diese Art wird die Betrachtung einer unbegrenzten Reihe von Dingen ermöglicht und mittels des

Stwierdzony na końcu analiz konstruktywizm stawia Veronesego na tej linii rozwojowej filozofii matematyki, która swój początek ma u Kanta. Nie wiadomo, czy włoski matematyk był pod bezpośrednim (wynikającym z lektury) wpływem myśliciela z Królewca. Veronese nie uznaje wszak czasu i przestrzeni jako apriorycznych form naoczności. Przyznaje jednak Podmiotowi Myślącemu pewne *a priori* czasu, odrzucając wszelką aprioryczność przestrzeni będącej strukturą rzeczywistości fizycznej. Filozofia matematyki Veronesego jest subiektywistyczna, a nawet – w pewnym sensie – solipsystyczna. Można jej postawić zarzut psychologizmu. Jej autor nigdzie nie uzasadnia obiektywności logiki, w którą – przed myśleniem – wyposażony jest Podmiot Myślący. Ciekawe jest to, że włoski matematyk budował swą koncepcję matematyki, gdy równocześnie rozpoznawano potrzebę antypsychologizmu (Gottlob Frege).

Wskazano na istotne zbieżności koncepcji Veronesego z filozofią matematyki prawie ze współczesnych intuicjonistów. Kwestia ta wymaga jednak dalszych badań. Koncepcja Podmiotu Myślącego miała prawdopodobnie wpływ na koncepcję Podmiotu Matematycznego Hilberta, która była prezentowana

Princips § 18. diejenige einer gegebenen unbegrenzten Reihe, auch wenn sie für die Verhältnisse eines Individuums nicht realisierbar ist. Denkt man sich, die Operation, durch welche mehrere Gegenstände einer nach dem andern bis zu einem Gegenstand *B* gesetzt werden, sei vollendet und der erste Gegenstand in dem Moment *A* gesetzt, so kann man auch sagen, man beziehe die so erhaltene Reihe von Dingen, die man als dem Gedanken gegeben ansieht (§ 18.), auf dem Moment *A*, d.h. von der von *A* bis *B* verflissenen Zeit absehen. So erklären sich die oft gebrauchten Ausdrücke: *unbegrenzt, ins Unendliche oder ohne Ende fortfahren*”. G. Veronese, dz. cyt., § 13.

w wykładach getyńskich z początku XX wieku. Wydaje się też, że koncepcja swobodnej konstrukcji przedmiotów geometrycznych miała wpływ na takież podejście do tej kwestii przez Hilberta. Ową swobodę wyrażał matematyk z Getyngi słynnym „Wir denken uns”.

Na koniec trzeba podkreślić, że mimo iż Veronese rozpoczął budowę swojej matematyki (geometrii) od Podmiotu Myślącego i fenomenu myślenia, to analizie Podmiotu uprawiającego (tworzącego) matematykę i myśleniu „matematycznemu” nie poświęcił specjalnej uwagi.

Bibliografia

Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899.

Veronese G., *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, Leipzig 1894.