Ryszard Rębowski

3.14 – czyli imieniny liczby π

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy 7, 21-28

2011

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy
ISSN 1896-8333 nr 7/2011

Ryszard Rębowski
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

3.14 – czyli imieniny liczby π

STRESZCZENIE

Liczba π towarzyszyła człowiekowi od zawsze – przecież koło było jego jednym z największych wynalazków. Każdego roku, 14 marca świat naukowy obchodzi jej imieniny. Z tej okazji przypomnieliśmy podstawowe fakty dotyczące geometrycznego pochodzenia π oraz historię najważniejszych odkryć w matematyce pozwalających lepiej zrozumieć jej znaczenie w nauce.

Słowa kluczowe: liczba π, koło, średnica koła, radian.

1. Wstęp

Któż z nas nie słyszał o π, nawet jeśli nie zdaje sobie sprawy z tego, że litera π pochodzi z alfabetu greckiego. Bowiem nie o znajomość greki tutaj chodzi, a – jak większość z nas myśli, i słusznie – chodzi o koło, czyli o geometrię. Każdy z nas pewnie kiedyś na lekcji matematyki badał zależność obwodu tego koła od jego średnicy i w wyniku kilku pomiarów stwierdził zadziwiającą zależność:

$$\frac{L}{d} = const.,$$

gdzie L oznacza obwód koła, d jego średnicę.

Właśnie to spostrzeżenie rzuca się od razu w oczy, aczkolwiek wcale nie jest jasne, dlaczego tak jest! Jeśli już to zauważyliśmy, to rzeczą naturalną jest zapytać o wartość tej stałej. Tym razem jest jeszcze gorzej, aniżeli zdajemy sobie z tego sprawę. Nie wtajemniczeni chóralnie odpowiadają: 3,14, ale tym razem populizm nie zwycięża, bowiem odpowiedź jest niepoprawna!

Co do jednego wątpliwości nie powinniśmy mieć – ta stała, o której mowa jest wyżej, to liczba. W takim razie pytanie powinno brzmieć: *jaka liczba?*

2. Geometryczne pochodzenie liczby π

Zostawmy na chwilę ostatnią kwestię i zajmijmy się samą regułą proporcji, o której mowa wyżej. Spróbujmy ją uzasadnić. W tym celu weźmy koło o promieniu R. Niech L oznacza jego obwód. Wybierzmy z tego koła jego wycinek o kącie środkowym $\alpha \in (0°, 360°)$. Wtedy z zasady proporcji długość $\tilde{L}$ łuku tego wycinka jest równa

$$\tilde{L} = L\frac{\alpha}{360}.$$

Załóżmy, że $\alpha = \alpha_o$ jest takie, że $\tilde{L} = R$. Wtedy powyższa proporcja będzie miała postać

$$\frac{L}{R} \cdot \alpha_o = 360°,$$

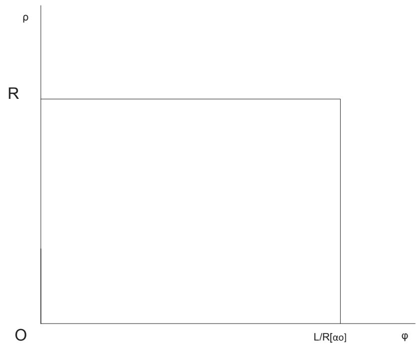
co oznacza, że kąt pełny jest równy $\frac{L}{R}$ jednostek, gdzie jednostką tą jest miara kąta α_o.

Spójrzmy teraz na rozważane koło z punktu widzenia jego środka i półprostej wyprowadzonej z tego środka. Wtedy położenie każdego punktu należącego do tego koła możemy opisać parą dwóch liczb:

ρ – odległością tego punktu od środka koła,

φ – miarą kąta skierowanego w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara, gdzie $\varphi \in< 0°, 360°$.

Weźmy teraz układ współrzędnych kartezjańskich, gdzie na osi poziomej będziemy odmierzali wartości kąta φ w jednostkach α_o, zaś na osi pionowej wartości ρ. Wtedy wszystkie punkty z koła o promieniu R można opisać za pomocą punktów znajdujących się w prostokącie umiejscowionym w zdefiniowanym wyżej układzie, którego podstawą jest odcinek $< 0, \frac{L}{R})$ leżący na osi $O\varphi$, natomiast (lewym) bokiem odcinek $< 0, R >$ leżący na osi $O\rho$ (patrz rys. 1).



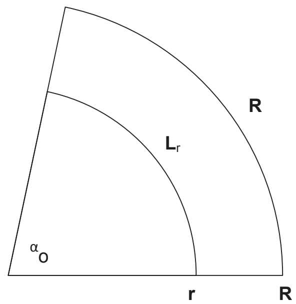
Rys. 1. Obraz koła w układzie $O\varphi\rho$

Zauważmy, że wtedy pole tego prostokąta równe jest długości okręgu naszego koła. Weźmy teraz wycinki naszego koła o parametrach: α_o, $r < R$, jak to pokazano na rys. 2, gdzie przez L_r oznaczyliśmy długość łuku wycinka koła o promieniu r. Wtedy wycinki w układzie $O\varphi\rho$ będą prostokątami jak na rys. 3. W takim razie z zasady proporcji, w jednostkach α_o, L_r ma długość

$$L_r = r \cdot 1\ [\alpha_o] = r,$$

dla każdego $0 < r \leq R$. W szczególności, podstawiając $r = R$ i z uwagi, że $L_R = R$ (patrz rys. 2), w standardowych jednostkach dostaniemy

$$R = L\frac{\alpha_o}{360}.$$



Rys. 2. wycinek kołowy o parametrach α_o, r, R

Pokazaliśmy zatem, że **dla każdego koła o promieniu** R **i długości okręgu** L **zachodzi równość**

$$\boldsymbol{L = \frac{360}{\alpha_o}R.}$$

W szczególności

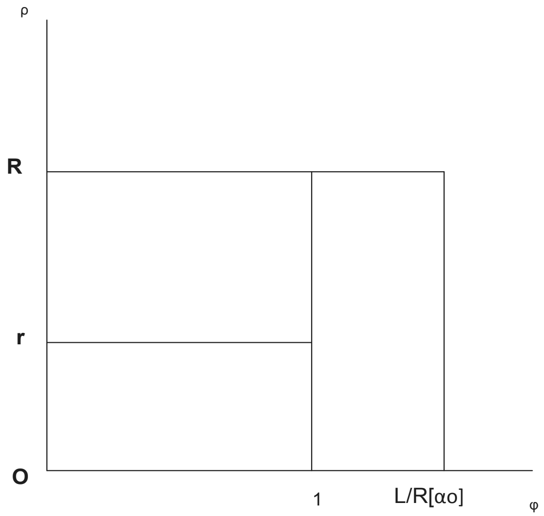
$$\boldsymbol{\frac{L}{d} = \frac{180}{\alpha_o},\ d = 2R.}$$

Oznaczając teraz przez **π** wartość liczby

$$\boldsymbol{\frac{180}{\alpha_o}},$$

możemy zapisać

$$\boldsymbol{L = 2\pi R}.$$



Rys. 3. Obrazy wycinków kołowych w układzie $O\varphi\rho$

3. Podstawowe fakty o liczbie π

1. Dobrze wiadomo[1], że miara kąta $\boldsymbol{\alpha_0}$ w przybliżeniu ma wartość

$$\mathbf{57{,}29577951^\circ}$$

i jednostkę $\mathbf{1}[\boldsymbol{\alpha_0}]$ nazywa się *radianem*, w skrócie rad.

2. Wtedy wartość przybliżona liczby $\boldsymbol{\pi}$ jest równa

$$\boldsymbol{\pi} \cong \mathbf{3{,}14159265376}.$$

3. Wykazane wyżej zależności pozwalają zamienić jednostkę [°] na [**rad**] i na odwrót. Jeśli dla kąta płaskiego $\boldsymbol{\alpha}$, przez $\boldsymbol{\alpha}^\circ$ oznaczymy jego miarę w stopniach, a przez $\boldsymbol{\alpha}[\mathbf{rad}]$ w radianach, to

$$\alpha[rad] = \frac{\alpha^o}{180^o}\pi[rad].$$

Jak pokazał w 1882 roku F. Lindemann, liczba $\boldsymbol{\pi}$ nie jest pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego, a więc postaci $\boldsymbol{W(x) = 0}$, gdzie $\boldsymbol{W}$ oznacza dowolny wielomian rzeczywisty o współczynnikach całkowitych. Jako taka nie może być liczbą wymierną. Pozwoliło to wraz

[1] Uzasadnienie przedstawionych faktów można znaleźć np. w [Boyer 1964, Cajori 1994, Courant i Robbins 1962, Downing 1995, Merzbach, Boyer 2010, Tanton 2005, Weisstein 1985].

z twierdzeniem Wantzela–Gaussa rozstrzygnąć słynny problem *szkoły pitagorejskiej – problem kwadratury koła*. Pitagorejczycy pytali się:

czy za pomocą linijki i cyrkla można skonstruować kwadrat, którego pole będzie równe polu danego koła?

Z twierdzenia Wantzela–Gaussa wynika, że jeśli kwadratura koła miałaby rozwiązanie, to liczba π musiałaby być algebraiczna, a tak nie jest, co właśnie wykazał Lindemann.

4. Liczba π jako liczba niewymierna nie pozwala się zapisać w układzie dziesiętnym, stąd potrzeba posługiwania się jej przybliżeniem. Dokładniej, taki zapis wyglądałby wtedy następująco

$$\mathbf{3, c_1c_2\ldots\, c_n\ldots,}$$

gdzie ciąg c_j przyjmuje wartości ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$ ($c_1 = 1, c_2 = 4, c_3 = 1, c_4 = 5$ itd.) oraz odpowiedni szereg liczbowy jest zbieżny do wartości części ułamkowej liczby π, czyli

$$\pi = 3 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{10^j}.$$

Ponadto żadna sekwencja postaci $c_k, c_{k+1}, \ldots\, c_{k+l}$ nigdy nie powtórzy się w ciągu (c_j).

Z drugiej strony istnieją sposoby jej *wyreprezentowania*. Jedną z takich metod jest teoria szeregów liczbowych i szeregów funkcyjnych. Studenci informatyki PWSZ im. Witelona w Legnicy wiedzą, że funkcję ***arctg x*** można rozwinąć w taki szereg, czyli przedstawić ją następująco

$$arctg\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \text{ dla } x \in [0, 1].$$

W szczególności po podstawieniu x = 1 dostaniemy

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Co za regularność! Przecież ciąg $\left((-1)^n \frac{1}{2n+1}\right)_{n \geq 0}$ jest naprzemiennym ciągiem odwrotności kolejnych liczb nieparzystych! Jakże daleko mu do geometrii koła. A jednak.

5. Liczba π związana jest ze słynną funkcją *dzeta ζ Riemanna*, gdzie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 1.$$

Wtedy, jak wykazał po raz pierwszy Euler, dla szeregu *2-harmonicznego* mamy

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Genezą tej równości zajmiemy się w kolejnym artykułe poświęconym liczbie $\boldsymbol{\pi}$.

6. Na liczbę $\boldsymbol{\pi}$, jak pokazał w 1748 roku L. Euler, należy spojrzeć z ogólniejszej perspektywy – liczb zespolonych. Ze słynnego wzoru Eulera wynika, że

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Fenomen tego wzoru, z tego powodu często nazywany najpiękniejszym wzorem matematyki, polega na tym, że obok siebie znalazło się pięć z sześciu najważniejszych liczb: liczby **0**, **1**, bez których nie można mówić o *ciele liczb rzeczywistych*, dwie najważniejsze liczby niewymierne **e**, $\boldsymbol{\pi}$ (niektórzy do tego zbioru zaliczają jeszcze liczbę $\sqrt{2}$) oraz *jedność urojona* ***i*** pozwalająca rozszerzyć ciało liczb rzeczywistych do ciała *liczb zespolonych*, co po raz pierwszy wykazał wielki Gauss. Jaka szkoda, że we wzorze tym zabrakło miejsca na szóstą liczbę, slynną liczbę φ (fi od nazwiska antycznego rzeźbiarza Fidiasza) związaną z *ciągiem Fibonacciego*, ze *złotą proporcją* czy *linią spiralną* pojawiającą się w geometrii i przyrodzie (np. [Rębowski 2009]).

7. Liczba $\boldsymbol{\pi}$ zagościła także w teorii prawdopodobieństwa, co dla wielu było i w dalszym ciągu jest sporym zaskoczeniem. Poniżej przytoczymy dwa klasyczne przykłady, o których szczegółowo napiszemy w kolejnym artykułe. Pierwszy związany jest z geometrią i nie powinien akurat wzbudzać z tego powodu nieufności co do koneksji z liczbą $\boldsymbol{\pi}$ – przecież geometria jest jej rodowodem. Aczkolwiek nie do końca, bowiem sygnalizowany przykład związany jest bezpośrednio z geometrią kwadratu. Dokładniej:

> *załóżmy, że mamy kwadrat jednostkowy, z którego losowo wybieramy punkt o współrzędnych* ***(a, b)****. Pytamy się, jakie jest prawdopodobieństwo, że istnieje trójkąt rozwartokątny o bokach długości odpowiednio* ***a, b,*** **1**.

Można wykazać (zrobimy to w sygnalizowanym kolejnym artykułe), że prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Kolejny przykład jest o wiele bardziej interesujący. Zasadniczym powodem jest to, że nie ma on nic wspólnego z geometrią. Po wtóre dotyczy on trudnej, ale ważnej teorii liczb pierwszych oraz związany jest ze wspomnianą wyżej funkcją *dzeta* Riemanna. Problem ten sprowadza się do pytania *o prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb całkowitych względnie pierwszych*. Jak pokażemy w kolejnym artykułe, prawdopodobieństwo to jest zaskakujące, bowiem równe $\frac{6}{\pi^2}$.

8. Z wcześniejszej uwagi nikogo nie powinno już dziwić, że liczba $\boldsymbol{\pi}$ doczekała się również swojej interpretacji na gruncie *statystyki matematycznej*.

W roku 1773 Georges-Louis Leclerc, hrabia Buffon, sformułował swój słynny problem. Pytał w nim:

> *jakie jest prawdopodobieństwo, że igła o długości **l** rzucona na płaszczyznę, na której naniesione są równolegle i oddalone od siebie o **l** proste, przetnie taką prostą.*

Metodami probabilistycznego modelu geometrycznego można pokazać, że prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{2}{\pi}$ (patrz np. [Rębowski 2006]). Z kolei metodami statystyki matematycznej pozwala to uzyskiwać bardzo dokładne przybliżenie wartości liczby π, bowiem z *mocnego prawa wielkich liczb* wynika, że

$$\pi \cong \frac{2n}{k_n} \text{ z prawdopodobieństwem 1,}$$

gdzie n oznacza liczbę powtórzeń rzutów igłą, k_n liczbę przecięć.

4. Zakończenie

Artykuł ten pomyślany został jako „łagodne" wprowadzenie w świat liczb, bez którego nie byłoby matematyki. Nieprzypadkowo zrobiliśmy to na przykładzie liczby π, której obecność w stworzonej przez człowieka cywilizacji jest uzasadniona i niezastąpiona. Tak rozumiana popularność powoduje jej łatwą dostępność. Z drugiej strony oczekuję, że szanowny Czytelnik zauważy, że jest to tylko iluzja. Liczba ta jest bowiem głęboko „usadowiona" zarówno w zbiorze liczb rzeczywistych jak i samej matematyce. Jej „zobaczenie" wymaga bardzo zaawansowanych pojęć i metod, które wypracowane zostały przez kilkadziesiąt pokoleń badaczy, a w zdecydowanej większości uzyskanych w XIX i XX wieku. Na myśli mam tutaj przede wszystkim teorię zbiorów i ciał liczbowych, w tym teorię liczb niewymiernych, teorię równań algebraicznych, teorię funkcji rzeczywistych i zespolonych, teorię prawdopodobieństwa i statystkę matematyczną. Zgodzimy się, że brzmi to imponująco i od każdego z nas wymaga respektu i odpowiedniego dystansu. W niniejszym artykułe świadomie zrezygnowaliśmy z wielu szczegółów. Ich obecność na tym poziomie zniechęciłaby bowiem Czytelnika, a przecież nie takiego efektu spodziewamy się. Skoro jednak – a takie jest nasze założenie i oczekiwanie – rozbudziliśmy już ciekawość, będziemy musieli postawić *kropkę nad i* i pokazać kawałek solidnej matematyki. Zrobimy to, o czym wcześniej wielokrotnie wspominaliśmy, w kolejnym artykule pomyślanym jako kontynuacja niniejszego. Już teraz zachęcamy do jego lektury.

Artykuł ten dedykuję swoim byłym i obecnym studentom PWSZ w Legnicy. Zajęcia, jakie odbywaliśmy w ramach kursów z matematyki, matematyki dyskretnej i metod probabilistycznych, powinny przybliżyć Państwu poruszoną w tym artykule tematykę. Rozmawialiśmy bowiem o liczbach zespolonych i ich postaci wykładniczej, równaniach algebraicznych, prawdopodobieństwie geometrycznym, prawach wielkich liczb, ciągach rekurencyjnych Fibonacciego i o statystyce matematycznej.

Bibliografia

Boyer C., *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN, Warszawa 1964.

Cajori F., *A history of Mathematic*s, MacMillan and CO, 1994.

Courant R., Robbins H., *Co to jest MATEMATYKA*, wyd. drugie, PWN, Warszawa 1962.

Downing D., *Dictionary of Mathematics Terms*, third edition, Barrons's Educational Series, Inc. 1995.

Merzbach U.C., Boyer C.B., *A history of Mathematics*, third edition, John Wiley & Sons, Inc., 2010.

Rębowski R., *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2009.

Rębowski R., *Podstawy metod probabilistycznych*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2006.

Tanton J., *Encyclopedia of Mathematics*, Facts On File, Inc. 2005.

Weisstein E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, second edition, van Nostrand Reinhold, New York 1989.

SUMMARY

3.14 or the name-day of the number π

The number π has accompanied man since ecer – we must remember that the wheel was one of the biggest invention. Each year, 14th of March scientific world celebrates the name-day of the number π. On that occasion, we have remained the basic facts about geometric origin of the number π and the history of the most important discoveries in mathematics that can help to understand the meaning of the number π in science.

Key words: number π, whell, whell diameter, radian.