

# Ryszard Rębowski

---

## O liczbie $\pi$ równej 3,1415926535897932384626433... z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko : część druga

---

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w  
Legnicy 7, 53-69

---

2011

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach  
dozwolonego użytku.

**Ryszard Rębowski**

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,  
Wydział Zarządzania i Informatyki

## O liczbie $\pi$ równej

# 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550512032768826761467101760253416166783238414141726605960446887460935940545255585244676649763166049533005182836428477926768376744177724837

## z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko

Część druga

### STRESZCZENIE

Zaprezentowano cztery klasyczne sytuacje pojawiania się liczby  $\pi$  w zagadnieniach probabilistycznych. Szczególną uwagę poświęcono geometrycznemu modelowi probabilistycznemu na przykładzie losowej konstrukcji trójkąta rozwartokątnego i zagadnienia igły Buffona. Pokazano w szczególności rozwiązanie zagadnienia losowania liczb względnie pierwszych, przypominając związek wyniku rozwiązania tego problemu z funkcją dzeta Riemanna.

Słowa kluczowe: liczba  $\pi$ , rozkład Gaussa, igła Buffona, prawdopodobieństwo geometryczne.

Artykuł ten jest kontynuacją rozważań nad liczbą  $\pi$  zapoczątkowanych w [Rębowski, 3.14 – czyli imieniny liczby  $\pi$ ] i dalej rozwijanych w [Rębowski, O liczbie  $\pi$ ]. Z merytorycznego i redakcyjnego punktu widzenia jest on niezależny od zacytowanych wyżej i może być przedmiotem samodzielnej lektury.

### 1. Liczba $\pi$ w teorii prawdopodobieństwa

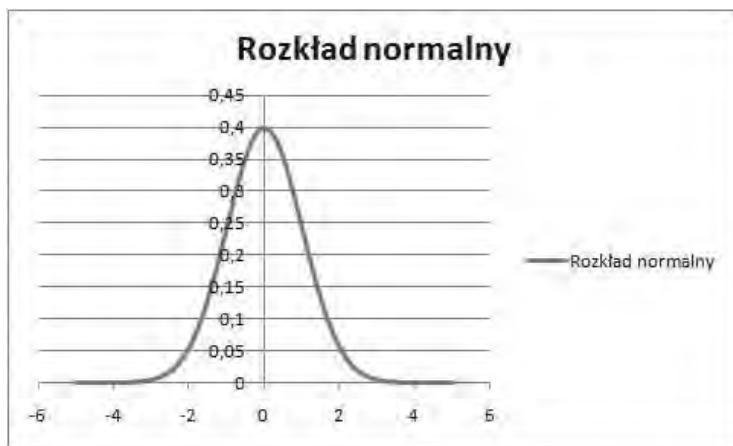
W części pierwszej *explicite* pokazaliśmy koneksje liczby  $\pi$  z geometrią, teorią liczb całkowitych i rzeczywistych, algebrą abstrakcyjną, teorią liczb zespolonych, teorią funkcji rzeczywistych. Należy stwierdzić, że związki te z powodu natury obiektu, którym się interesujemy nie powinny nikogo dziwić – można się było tego spodziewać. Natomiast to, o czym chcemy napisać teraz, jest już o wiele mniej intuicyjne. Okazuje się bowiem, że naturalnym środowiskiem liczby  $\pi$  jest również teoria prawdopodobieństwa. Spróbujemy pokazać ten fenomen na przykładzie czterech zagadnień.

### 1.1. Liczba $\pi$ a krzywa dzwonowa Gaussa

Weźmy następującą funkcję

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ dla } x \in \mathbf{R},$$

której wykres przedstawia rys. 1<sup>1</sup>.



Rys. 1. Funkcja dzwonowa Jouffretta

Okazuje się<sup>2</sup>, że dla tej funkcji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

co oznacza, że funkcja dzwonowa może być traktowana jako *gęstość ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa* (patrz np. [Feller 1969]). Rozkładem tym jako pierwszy posługiwał się de Moivre w 1773 roku. Jego oficjalna nazwa, jako *rozkładu normalnego*, ukuta została w 1875 roku przez CH. S. Peirece'a (1839–1914), F. Galtona (1822–1911) i W. Lexisa (1837–1914). Tymczasem jeśli zajrzemy do dowolnego podręcznika z teorii prawdopodobieństwa, zauważymy, że synonimem nazwy tego rozkładu jest *rozkład Gaussa*. Niektórzy mówią, że zadziało w tym wypadku jedno z *praw Murphy'ego*, tzw. *prawo Stingera*<sup>3</sup>. Myślę, że Czytelnik

<sup>1</sup> W literaturze niesłusznie nazywana funkcją dzwonową Gaussa. Termin ten pochodzi od francuskiego oficera-artyleryzisty E. Jouffretta (1837–?) z 1872 roku.

<sup>2</sup> Co wcale nie jest takie oczywiste, bowiem funkcja pierwotna funkcji  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  nie jest funkcją elementarną. Oznacza to, że przy liczeniu tej całki nie można korzystać ze standardowego twierdzenia Riemanna–Newtona–Leibniza (patrz np. [Feller 1969]).

<sup>3</sup> Brzmi ono; „Włączone do kontaktu lepiej działa”.

wybaczy, jeśli wstrzymamy się od skomentowania tego przypadku. Z drugiej strony powinniśmy mieć świadomość, że co jak co, ale Gauss na to sobie zasłużył!

Znaczenie liczby  $\pi$  w omawianej sytuacji sprowadza się do roli *czynnika normującego* dla funkcji  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ , bez którego funkcja ta nie może być funkcją gęstości żadnego rozkładu prawdopodobieństwa. Z drugiej strony, jak zauważyli to już de Moivre i P. S. Laplace (1749–1827), w przypadku rozkładów dyskretnych, a uogólnione zostało to na klasę dowolnych rozkładów posiadających *drugi moment*<sup>4</sup>, rozkład ten jest rozkładem granicznym dla ciągu uśrednionych niezależnych kopii danego rozkładu. Jest to fundamentalne twierdzenie klasycznej teorii prawdopodobieństwa tłumaczące konsekwencje *stochastycznego* (czyli losowego) opisu zjawisk. Wbrew obawom wynikającym z intuicyjnego pojmowania zjawiska losowego, natura losowa wykazuje jednak różne przejawy regularności. Jedną z nich właśnie opisuje słynne CTG.

## 1.2. Problem geometryczny jako zjawisko losowe

Przypuśćmy, że z odcinka  $[0, 1]$  losowo wybieramy dwie liczby  $a, b$ <sup>5</sup>. Należy rozstrzygnąć, jakie jest prawdopodobieństwo, że można zbudować trójkąt rozwartokątny, którego odpowiednie boki mają długości równe  $a, b, 1$ .

Tak jak zawsze w takim przypadku, analizę problemu zaczniemy od skonstruowania przestrzeni probabilistycznej, która pozwoli nam opisać zjawisko *stricte* natury geometrycznej językiem teorii prawdopodobieństwa. Z punktu widzenia obserwacji przedstawionego eksperymentu<sup>6</sup> wynikiem powinny być obie liczby. Ponieważ dopuszczamy sytuację, że wylosowane liczby mogą być jednakowe, nie możemy do tego celu użyć opisu mnogościowego. Dlatego aby je od siebie odróżnić, musimy ustawić je w ciąg, np.  $(a, b)$ . To z kolei nie powinno oznaczać, że w takiej kolejności liczby te były wylosowane. Po wylosowaniu obu i zapamiętaniu wyniku losowania, na pierwszym miejscu odnotowujemy liczbę, która ma nazwę  $a$ . Para ta będzie zdarzeniem elementarnym konstruowanej przestrzeni probabilistycznej, czyli

$$\omega = (a, b).$$

W takim razie przestrzeń wszystkich zdarzeń elementarnych  $\Omega$  będzie miała postać

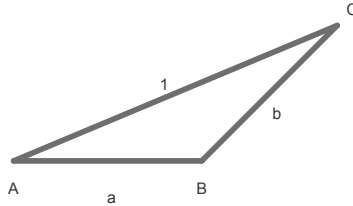
$$\Omega = \{\omega = (a, b) : a, b \in (0, 1)\}.$$

<sup>4</sup> Mowa tutaj jest o twierdzeniu Lindenberga–Lévy’ego, zwanym *centralnym twierdzeniem granicznym* (CTG) (patrz np. [Feller 1969]).

<sup>5</sup> Losowo oznacza, że ich wybór nie jest konsekwencją żadnego planu. Ważne natomiast jest to, czy wybieramy je w kolejności jedną po drugiej, czy obie naraz, bowiem to drugie oznacza, że *implicite* zakładamy, że wybrane liczby są różne. Umówimy się, że obowiązuje pierwszy wariant wyboru, ale nie jest ważna kolejność tak wylosowanych liczb.

<sup>6</sup> Tak nazwaliśmy losowanie dwóch liczb z odcinka.

Zobaczmy, jak będzie wyglądało zdarzenie opisujące w języku teorii prawdopodobieństwa powstanie figury płaskiej – trójkąta rozwartokątnego. Ponieważ w każdym trójkącie suma długości dwóch dowolnych jego boków jest większa od długości boku pozostałego, trójkąt ten (jako rozwartokątny) musi wyglądać tak jak to przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Trójkąt rozwartokątny o bokach  $a, b, 1$

Z powyższej uwagi wynika, że wylosowane liczby  $a, b \in (0, 1)$  muszą być takie, że  $a + b > 1$ . Niech  $A$  oznacza zdarzenie, że w wyniku wylosowania liczb powstał trójkąt rozwartokątny. Wtedy

$$\omega \in A \Rightarrow \omega = (a, b) \in \Omega: b > 1 - a.$$

Z drugiej strony, jeśli z liczb  $a, b, 1$  ma powstać trójkąt jak na rys. 2, to ich długości muszą być takie, że  $a + b > 1$  oraz

$$1 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta),$$

gdzie  $\beta$  jest miarą kąta rozwartego w tym trójkącie<sup>7</sup>. Ale wtedy  $\cos(\beta) < 0$  i dlatego

$$a^2 + b^2 < 1.$$

Pokazaliśmy tym samym, że

$$A = \{\omega \in \Omega: b > 1 - a \text{ i } a^2 + b^2 < 1\}.$$

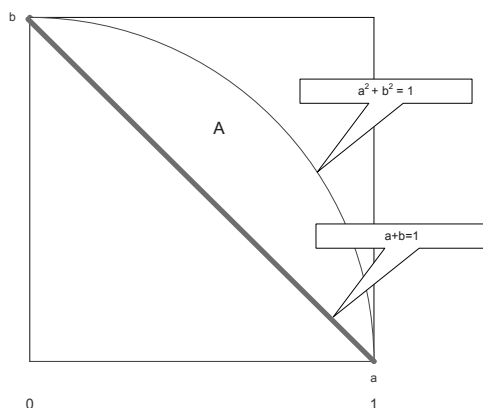
Oznacza to, że zdarzenie  $A$  jest podzbiorem borelowskim iloczynu kartezjańskiego  $(0, 1) \times (0, 1)$  i dlatego  $\sigma$ -ciało wszystkich zdarzeń jest rodziną wszystkich podzbiorów borelowskich kwadratu  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Mamy więc do czynienia z modelem geometrycznym płaskim przestrzeni probabilistycznej. W szczególności oznacza to, że  $P(A)$  – prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  liczymy według reguły

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

<sup>7</sup> Jest to znane twierdzenie cosinusów.

gdzie symbolem  $|A|$  oznaczyliśmy pole odpowiedniej figury płaskiej. Z rys. 3 można zauważyć, że  $|A| = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$  i dlatego  $P(A) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ .

To, że liczba  $\pi$  pojawiła się akurat w rozwiązaniu tego problemu, nie powinno być zaskoczeniem – przecież był to problem związany z geometrią płaszczyzny. Jak zobaczymy, kolejny problem będzie już mniej intuicyjny i wymaga większej uwagi.



Rys. 3. Interpretacja geometryczna zdarzenia dla problemu trójkąta

### 1.3. Igła Buffona też potrzebuje liczby $\pi$

Wyobraźmy sobie, że mamy do dyspozycji płaszczyznę, na której usytuowano poziomo w odległości  $d$  proste równoległe. Eksperyment polega na tym, że opuszczamy na tę płaszczyznę igłę tej samej długości co  $d$ . Doświadczenie przebiega prawidłowo, jeśli igła na skutek upadku będzie leżała na powierzchni płaszczyzny.

Problem *igły Buffona*<sup>8</sup> sprowadza się do następującego pytania:

*z jakim prawdopodobieństwem igła po upadku przecięnie prosta na tej płaszczyźnie?*

Zanim przejdziemy do opisu modelu probabilistycznego tego doświadczenia, zwrócimy uwagę na jeszcze kilka szczegółów:

1. Termin „przecięnie” wyklucza zjawisko *dotknięcie*, zatem igła może przeciąć co najwyżej jedną taką linię.
2. Umówimy się, że eksperymentator wykonujący rzuty igłą i odczytujący jej położenie po upadku zajmuje stałą orientację względem linii na płaszczyźnie.
3. Jeśli igła upadnie, to w przypadku kiedy nie jest prostopadła do linii, będziemy wyróżniali jej *lewy koniec*, w przeciwnym razie jej *dolny koniec*.

<sup>8</sup> Właściwie George-Louis Leclerc, hrabia Buffon. Problem ten Leclerc sformułował po raz pierwszy w 1773 roku, rozwiązał dopiero cztery lata później.

Możemy teraz określić układ odniesienia, który pozwoli nam na opis leżącej po upadku igły na płaszczyźnie.

Układem tym będzie ta (jedyna) prosta, która znajduje się poniżej wyróżnionego końca naszej igły. Sam opis położenia igły będzie polegał na podaniu wartości dwóch liczb  $(x, \alpha)$ , gdzie:

- $x$  oznacza odległość końca igły od tej prostej,
- $\alpha$  jest miarą kąta skierowanego liczonego od tej prostej, w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara, do prostej wyznaczonej przez igłę.

Taki opis położenia igły, czyli opis wyniku doświadczenia, będzie zdarzeniem elementarnym. Zatem

$$\Omega = \{\omega = (x, \alpha) : x \in (0, d), \alpha \in [0, \pi)\}.$$

Niech  $A$  opisuje sytuację, kiedy w wyniku poprawnie przeprowadzonego eksperymentu igła przetnie jedną z linii.

Zauważmy, że

$$\omega \in A \Leftrightarrow x + d \sin \alpha > d, \text{ dla } \alpha \in (0, \pi),$$

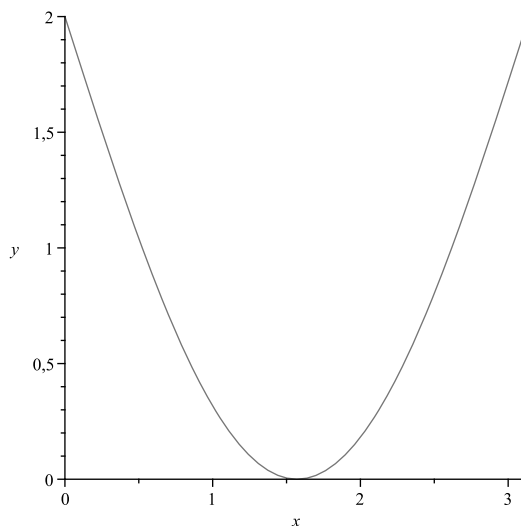
czyli

$$A = \{(x, \alpha) : \alpha \in (0, \pi), x = x(\alpha) \in (d(1 - \sin \alpha), d)\}.$$

Zbiór ten jest podzbiorem borelowskim płaszczyzny i mamy do czynienia, jak w poprzednim podrozdziale, z dwuwymiarowym modelem geometrycznym.

Z drugiej strony z teorii całki dobrze wiadomo, że jest to tzw. trapez krzywoliniowy (rys. 4), a jego wielkość, czyli pole powierzchni, można obliczyć za pomocą całki, dlatego

$$P(A) = \frac{1}{\pi d} \int_0^\pi (d - d(1 - \sin \alpha)) d\alpha = \frac{d}{\pi d} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$



Rys. 4. Interpretacja geometryczna zdarzenia dla problemu Buffona dla  $d = 2$

Teraz wszystko jest jasne i nikogo nie powinno dziwić, że liczba  $\pi$  pojawia się w rozwiązaniu problemu Buffona. Opis probabilistyczny podkreśla związek rzutu igłą z geometrią – obrotem igły zauważanym z punktu widzenia linii poziomych pokrywających płaszczyznę.

#### 1.4. Losowanie liczb względnie pierwszych a liczba $\pi$

Zacniemy od definicji. Powiemy, że dwie liczby całkowite  $p, q$  są *względnie pierwsze*, jeśli ich największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1. Na przykład 4 i 8 nie są względnie pierwsze, natomiast 7 i 9 są względnie pierwsze. Wprost z definicji każde dwie liczby pierwsze muszą być względnie pierwsze. Ponadto łatwo uzasadnić<sup>9</sup>, że dwie kolejne liczby naturalne też są względnie pierwsze. Mimo że nie każde dwie liczby naturalne  $p, q$  są względnie pierwsze, to zawsze dzieląc obie przez ich największy wspólny dzielnik, dostaniemy dwie liczby  $p', q'$ , które już są względnie pierwsze. Ponadto, jeśli każda z liczb nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą, to sama jest liczbą pierwszą. Dalej skorzystamy z tej praktycznej uwagi. Umówimy się, że ograniczymy się tylko do zbioru liczb naturalnych.

Załóżmy, że wybór pary liczb będziemy traktowali jako zdarzenie elementarne. Ponieważ interesują nas tylko różne wylosowane liczby oraz nie ma powodów, aby spośród wylosowanych wyróżnić jedną z nich, przyjmiemy, że  $\omega = \{a, b\}$ . Niech  $A$  oznacza zdarzenie, że wylosowana para liczb jest względnie pierwsza. Postawmy formalne pytanie:

*Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ ?*

Jeśli chcemy odnieść się do tego pytania, to musimy ustalić model probabilistyczny opisujący omawiane zjawisko. Wiemy już, że  $\Omega$  jest zbiorem wszystkich dwuelementowych podzbiorów  $\{n, m\}$ , rodzina wszystkich możliwych zdarzeń jest rodziną wszystkich podzbiorów  $\Omega$ . Pozostaje problem funkcji prawdopodobieństwa  $P$ . Ponieważ nie ma powodu, aby jakaś wylosowana para była wyróżniona, należy przyjąć, że w tym modelu dla każdej  $\omega \in \Omega$ ,  $P(\{\omega\})$  jest jednakowe<sup>10</sup>.

Z drugiej strony  $\Omega$  nie jest zbiorem skończonym, więc gdyby  $P(\{\omega\}) > 0$ , to byłoby  $P(\Omega) > 1$ , co – jak dobrze wiemy – jest niemożliwe. Oznacza to, że nie mamy żadnych teoretycznych podstaw twierdzić *a priori*, że wybór pary liczb można opisać modelem probabilistycznym i na tej podstawie odpowiedzieć na postawione pytanie. Jak wykazaliśmy wyżej, takiego modelu po prostu nie ma, bowiem nie istnieje nieskończony model jednorodny.

Można jednak pozostać przy opisie probabilistycznym dyskutowanego zjawiska, o ile założymy, że wybór pary liczb będzie odbywał się ze skończonego podzbioru zbioru liczb naturalnych. Z formalnego punktu widzenia będziemy mieli wtedy do czynienia z ciągiem przestrzeni probabilistycznych  $(\Omega_n, \Sigma_n, P_n)$  oraz ciągiem zdarzeń  $A_n \in \Sigma_n$ , gdzie  $A_n = A \cap \Omega_n$ ,

<sup>9</sup> Wystarczy skorzystać z zasady podzielności.

<sup>10</sup> Taki model probabilistyczny nazywamy dyskretnym, jednorodnym (patrz np. [Rębowski 2006]).



$\bigcup A_n = A$  i ciąg  $P_n(A_n) \rightarrow \mathbf{p}$  dla pewnej liczby  $\mathbf{p} \in (0, 1)$ . Wtedy liczbę  $\mathbf{p}$  tak skonstruowaną możemy nazwać *asymptotycznym prawdopodobieństwem* zdarzenia  $A$ . Powinniśmy jednak pamiętać, że liczba ta nie jest prawdopodobieństwem w rozumieniu teorii prawdopodobieństwa. Tak też będziemy rozumieli postawiony na wstępie problem. Poniżej w szczegółach podamy sposób wyliczenia wyrazów ciągu  $P_n(A_n)$  i jego granicy  $\mathbf{p}$ , która, jak domyślamy się, związana jest z liczbą  $\pi$ .

Ustalmy w tym celu liczbę naturalną  $n \geq 2$  i weźmy pod uwagę ciąg zbiorów

$$\Omega_n - \text{rodzina wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru } \{1, 2, \dots, n\}$$

z  $\sigma$ -ciałem zdarzeń  $\Sigma_n$  złożonym ze wszystkich podzbiorów  $\Omega_n$  i prawdopodobieństwem klasycznym  $P_n$ . Przez  $P_n$  oznaczymy zbiór wszystkich liczb pierwszych mniejszych od  $n$ . Dla ustalonej liczby pierwszej  $p \in P_n$ , niech  $A_{p,n}$  oznacza zdarzenie w  $\Sigma_n$  złożone z takich zdarzeń elementarnych  $\omega = \{m, k\} \in \Omega_n$ , że liczba  $p$  nie dzieli  $m$  i  $k$ . Dalej celem uproszczenia obliczeń założymy, że

$$n \in \{p_1 p_2, p_1 p_2 p_3, \dots\},$$

gdzie przez  $p_j$  oznaczyliśmy kolejne liczby pierwsze.

Ustalmy takie  $n$  i liczbę pierwszą  $p_j < n$ . Z definicji liczb względnie pierwszych (pisaliśmy o tym na wstępie) wynika, że

$$\bigcap_{p_j \in P_n} A_{n,p_j} = \{\omega \in \Omega_n : \omega = \{m, k\} \text{ oraz } p_j \text{ nie dzieli żadnej z nich}\}$$

Dlatego

$$A \cap \Omega_n = A_n = \bigcap_{p_j \in P_n} A_{n,p_j}.$$

Obliczymy najpierw  $P_n(A_{p,n})$ . W tym celu obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne mamy

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{|A_{n,p_j}^c|}{|\Omega_n|}.$$

Z opisu zdarzeń elementarnych wynika, że  $\Omega_n$  jest zbiorem wszystkich dwuelementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego, dlatego  $|\Omega_n| = \binom{n}{2}$ . Zliczymy elementy zbioru  $A_{n,p_j}^c$ . Z definicji elementy te są postaci

$$\omega = \{m, k\}, \text{ gdzie } p_j \text{ dzieli obie liczby } m, k.$$

Dla wygody założmy, że  $m > k$  (wiemy, że zawsze są różne). Oznacza to, że jeśli

$$m \in \{p_j, 2p_j, \dots, sp_j\} \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

gdzie z założenia o wyborze  $n$ ,  $n = sp_j$  dla pewnej liczby  $s$ . Jeśli teraz wybierzemy  $m = lp_j$  ( $l = 1, 2, \dots, s$ ), to takiemu wyborowi odpowiada wybór liczby  $k$  też podzielnej przez  $p_j$  na  $l - 1$  sposobów. Oznacza to, że

$$|A_{n,p_j}^c| = 0 + 1 + 2 + \dots + s - 1 = \frac{s}{2}(s - 1).$$

Stąd

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{\frac{s}{2}(s - 1)}{\binom{n}{2}},$$

co po uproszczeniu daje

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{s(s - 1)}{n(n - 1)}, \text{ skąd } P_n(A_{n,p_j}) = 1 - \frac{s(s - 1)}{n(n - 1)}, \text{ gdzie } s = \frac{n}{p_j}.$$

Porównamy teraz wyliczone prawdopodobieństwo zdarzenia  $A_{n,p_j}$  z iloczynem  $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right)$ . Nietrudno pokazać<sup>11</sup>, że istnieje ciąg  $\gamma_n(p_j)$ , że dla każdego  $j$

$$1 - \frac{1}{p_j^2} \leq P_n(A_{n,p_j}) \leq \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \gamma_n(p_j),$$

oraz ciąg  $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \gamma_n(p_j)$  jest zbieżny do jedności. Mnożąc dla kolejnych liczb pierwszych  $p_j \in \mathcal{P}_n$  ostatnią nierówność stronami, otrzymamy

$$\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \leq \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} P_n(A_{n,p_j}) \leq \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \gamma_n(p_j),$$

Można udowodnić, że<sup>12</sup>

$$P_n(A \cap \Omega_n) = P_n(A_n) = P_n\left(\bigcap_{p_j \in \mathcal{P}_n} A_{n,p_j}\right) = \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} P_n(A_{n,p_j}^c).$$

Ostatecznie pozwala to nam napisać następujące przybliżenie

$$P_n(A \cap \Omega_n) \approx \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right).$$

Musimy sobie teraz przypomnieć wynik z podrozdziału 2.3 pierwszej części pracy [Rębowski 2012b], stwierdzający, że iloczyn  $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right)$  zbieżny jest do  $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$ . W takim razie dostaniemy

$$P_n(A \cap \Omega_n) \approx \mathbf{p} = \frac{6}{\pi^2}$$

albo precyzyjniej

$$P_n(A \cap \Omega_n) \longrightarrow \mathbf{p} = \frac{6}{\pi^2}.$$

<sup>11</sup> Szczegóły tego elementarnego rachunku pominieliśmy. Czytelnika zachęcamy mimo wszystko do jego powtórzenia.

<sup>12</sup> Wzór ten ma swoją interpretację probabilistyczną. Równość ta oznacza, że występujące w niej zdarzenia są *stochastycznie niezależne* (patrz [Weaver 1970]).

Przyznać trzeba, że wyniki ten jest zdumiewający z punktu widzenia obecności liczby  $\pi$ . Z drugiej strony należy też stwierdzić, że droga, jaka do niego prowadzi, wcale nie jest łatwa. Pominęliśmy przecież sporo szczegółów w przedstawionym rozumowaniu oraz skorzystaliśmy z wielu faktów. Taka jest właśnie matematyka!

## 2. Zakończenie

Zamiarem naszym było pokazanie w miarę w przystępny sposób podstawowych faktów związanych z liczbą  $\pi$ . Zależało nam na tym, aby zrobić to wszechstronnie, zarówno uwzględniając stronę merytoryczną zagadnienia, jak i nie mniej ważny aspekt historyczny. Zdajemy sobie doskonale sprawę, że o wielu problemach nie napisaliśmy, że pominęliśmy inne ważne<sup>13</sup> czy wkład innych nie wymienionych tutaj uczonych. Jasne jest, że na kilkudziesięciu stronach jest to niemożliwe. Artykuł z powodów technicznych podzielony został na dwie części. Pierwsza zawiera aspekty analityczne zagadnienia, druga probabilistyczne. Oczywiście literatura przedmiotu poświęcona omawianej tematyce jest bardzo obszerna. Czytelnika bardzo zachęcamy do dalszego studiowania. Mamy nadzieję, że artykuł ten spełni swoją rolę – po jego lekturze Czytelnik zauważy piękno matematyki oraz jej moc. Zrozumie, że jej studiowanie wymaga, owszem, sporego zaangażowania i wysiłku intelektualnego, ale warto to robić. Zauważy też fenomen, który dobrze jest widoczny z perspektywy historii matematyki i nie tylko, polegający na tym, że byty kilkunastu ludzkich pokoleń potrafi połączyć produkt ludzkiego rozumu. Ta, nazwijmy ją, zasada ciągłości jest kluczowa dla człowieka. Jest gwarancją, że wkład jednostki ma charakter ponadczasowy i z tego punktu widzenia jest uniwersalny.

Dlatego uznaliśmy, że tym największym winni jesteśmy pamięć, zamieszczając w ostatnim rozdziale coś w rodzaju galerii ich portretów. Czytelnika zachęcamy do lektury pozycji o charakterze historycznym cytowanych w tym artykule celem wzbogacenia wiedzy o naszych bohaterach.

<sup>13</sup> Chociażby słynną *zasadę nieoznaczoności* Heisenberga, czy też równanie pola grawitacyjnego ogólnej teorii względności Einsteina (patrz np. [Stein 2011]).

### 3. Galeria matematyków związanych z liczbą $\pi$



Rys. 5. Euklides (365–300 p.n.e.)



Rys. 6. Archimedes (287–212 p.n.e.)



Rys. 7. G. Cardano (1501–1576)



Rys. 8. L. van Ceulen (1540–1610)



Rys. 9. P. Fermat (1601–1665)



Rys. 10. J. Wallis (1616–1703)



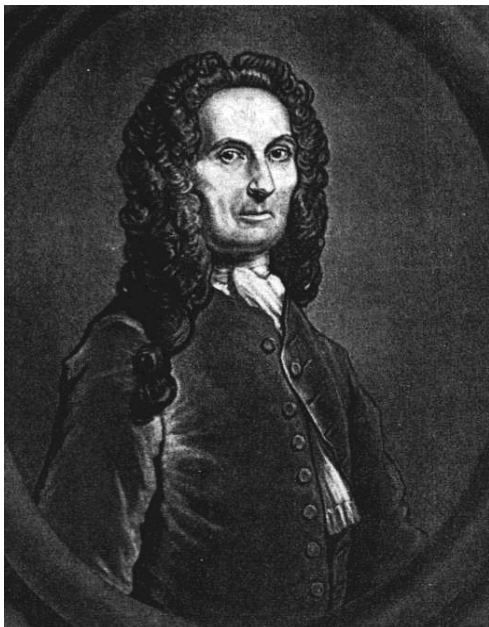
Rys. 11. I. Newton (1643–1727)



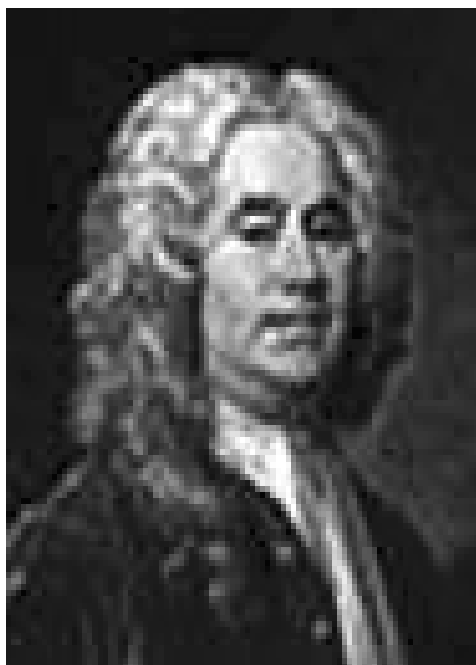
Rys. 12. G. W. Leibniz (1646–1716)



Rys. 13. J. Bernoulli (1667–1748)



Rys. 14. A. de Moivre (1667–1754)



Rys. 15. W. Jones (1675–1749)



Rys. 16. B. Taylor (1685–1731)



Rys. 17. L. Euler (1707–1783)



Rys. 18. J.H. Lambert (1728–1777)



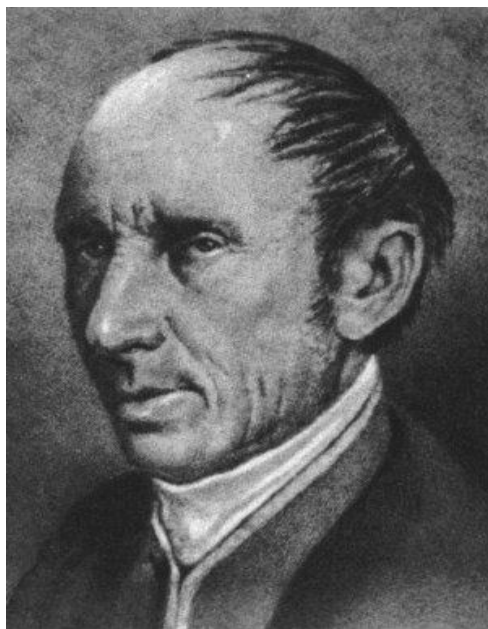
Rys. 19. P. Laplace (1749–1827)



Rys. 20. J.B.J. Fourier (1768–1830)



Rys. 21. C. F. Gauss (1777–1855)



Rys. 22. A. L. Cauchy (1789–1857)



Rys. 23. W. R. Hamilton (1805–1865)



Rys. 24. Ch. Hermite (1822–1901)





Rys. 25. B. Riemann (1826–1866)



Rys. 26. F. von Lindemann (1852–1939)



Rys. 27. J. Hadamard (1865–1963)



Rys. 28. S. Ramanujan (1887–1920)

## Bibliografia

- Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1969.
- Rębowski R., *3,14 – czyli imieniny liczby  $\pi$* , „Zeszyty Naukowe” PWSZ im. Witelona w Legnicy, w przygotowaniu.
- Rębowski R., *O liczbie  $\pi$  równej 3, 141592653... z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko. Część pierwsza*, „Zeszyty Naukowe” PWSZ im. Witelona w Legnicy 2011, nr 7.
- Rębowski R., *Podstawy metod probabilistycznych*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2006.
- Stein J.D., *Cosmic Numbers, The Numbers That Define Our UNIVERSE*, Basic Books, New York 2011.
- Weaver W., *Elementarz rachunku prawdopodobieństwa*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1970.

## SUMMARY

### **On the number $\pi$ equal to 3.141592653589793 . . . from the perspective of probability theory and not only.**

#### **Part two**

The publication presents four classic situations concerning the appearance of the number  $\pi$  in probabilistic issues. Particular attention is given to geometric probabilistic model showing the example of the random structure of obtuse triangle and Buffon's needle problem. The solution of drawing co-prime numbers is shown in details with the special recall of the connection with the Riemann zeta function.

KEY WORDS: number  $\pi$ , Gaussian distribution, Buffon's needle, geometric probability.