

Andrzej Koch

Próba oceny niektórych metod rzutowania stosowanych w geometrii wykreślnej

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 23, 53-63

2006

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Andrzej Koch

PRÓBA OCENY NIEKTÓRYCH METOD RZUTOWANIA STOSOWANYCH W GEOMETRII WYKREŚLNEJ

Większość metod odwzorowania przestrzeni na płaszczyźnie używanych w geometrii wykreslonej należy do dwóch podstawowych grup:

- odwzorowań *jednoobrazowych*,
- odwzorowań *wielobrazowych*, a w szczególności *dwuobrazowych*.

Aparaty projekcyjne tych sposobów rzutowania są tak skonstruowane, że w wyniku ich działania w pierwszym przypadku obiekty geometryczne przestrzeni zapisują się na płaszczyźnie rysunku w postaci pojedynczego obrazu (*rzutu*), natomiast w drugim – w formie dwóch lub większej liczby obrazów (*rzutów*).

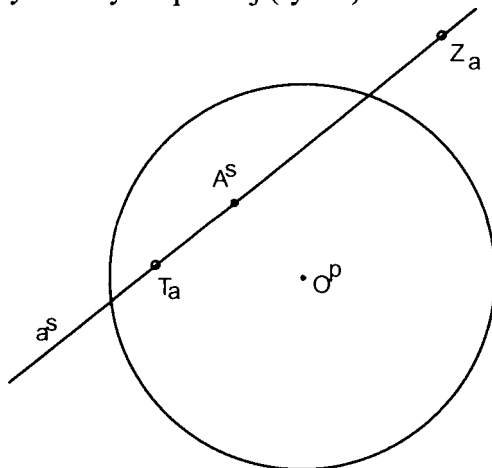
Poniżej podjęta została próba krótkiej charakterystyki kilku, najczęściej występujących w praktyce odwzorowań liniowych, reprezentujących obie wymienione grupy.

Wśród odwzorowań jednoobrazowych najczęściej stosowane są *rzut środkowy (perspektywa środkowa)*, *rzut aksonometryczny (perspektywa równoległa)* i *rzut cechowany*.

Rzut środkowy na ogół zachowuje te własności obiektów geometrycznych, które są niezmiennicze w geometrii rzutowej, a więc incydencję, kolinearność, dwustosunek czwórki elementów. Między układem płaskim o podstawie nierównoległej do rzutni (tła), zawierającym figury geometryczne, a ich rzutem środkowym określona jest kolineacja środkowa (perspektywiczna). Jej środkiem jest *oko* (środek rzutowania), a *osią* krawędź wspomnianego układu płaskiego i rzutni.

W przypadku równoległości tego układu do tła, między tymi elementami ustalona jest kolineacja afiniczna, zachowująca – oprócz własności wyżej wymienionych – także prosty stosunek trójki elementów, równoległość i prostopadłość, a więc podobieństwo figur.

Przy nieustalonym środku rzutowania odwzorowanie podstawowych elementów przestrzeni jest wieloznaczne, tzn. nie jest możliwa ich restytucja. Rezultatem wprowadzenia *okręgu głębokości tłowej*, którego promień posiada długość równą odległości oka od tła, jest jednoznaczność i odwracalność odwzorowania prostej i płaszczyzny, natomiast cechy te uzyskuje punkt tylko wtedy, jeżeli jest traktowany jako element przynależny do prostej (rys. 1).



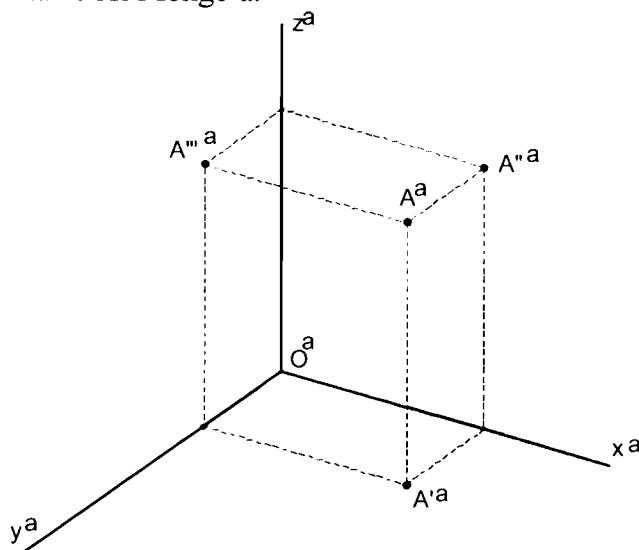
Rys. 1

Położenie punktu A w przestrzeni może być znalezione, jeżeli jest nim punkt przecięcia się prostej a i promienia rzutującego $A^s O$.

Rzut środkowy posiada szerokie zastosowanie w projektowaniu architektonicznym, budownictwie, sztukach pięknych (perspektywa malarska), geodezji (fotogrametria). Posiada on cechy, które czynią go atrakcyjnym, takie jak na przykład duże walory poznawcze (przekształcenia typowe dla geometrii rzutowej) czy pogładowość odwzorowywanych obiektów przestrzennych (naturalna perspektywa).

Rzut aksonometryczny jest rzutem równoległym na jedną płaszczyznę (rzutnię) i nie jest odwzorowaniem jednoznacznym i odwracalnym. Aby uczynić go „bardziej odwracalnym”, prostokątny układ osi rzutowany jest na rzutnię aksonometryczną. Układ ten utożsamiany jest z osiami x , y i z trzech prostopadłych rzutni Monge’a. Przedmioty przedstawione w metodzie Monge’a są najczęściej odwzorowywane w aksonometrii.

Na rysunku 2 pokazane są osie aksonometryczne x^a , y^a i z^a na rzutni aksonometrycznej, którą identyfikuje się z płaszczyzną tego rysunku. Osie te są rzutami osi Monge'a.



Rys. 2

Przyjmijmy dowolnie aksonometrię A^a punktu A i znajdziemy jego położenie w przestrzeni względem osi i rzutni Monge'a. Można tego dokonać tylko przez przyjęcie – również dowolne – aksonometrii jednego z rzutów: poziomego, pionowego lub bocznego. Przy założeniu, że przyjęliśmy na przykład A''^a , z łatwością możemy wyznaczyć pozostałe aksonometrie A'''^a i $A' ^a$. Dysponując tymi rzutami można określić położenie punktu A w przestrzeni względem układu prostokątnego.

Jeżeli znane są wartości tzw. *współczynników deformacji liniowej* dla każdej osi układu oraz rzuty aksonometryczne dwóch punktów, wówczas można wyznaczyć ich odległość na przykład w metodzie Monge'a, z którą aksonometria jest „sprzężona” poprzez ten właśnie prostokątny układ.

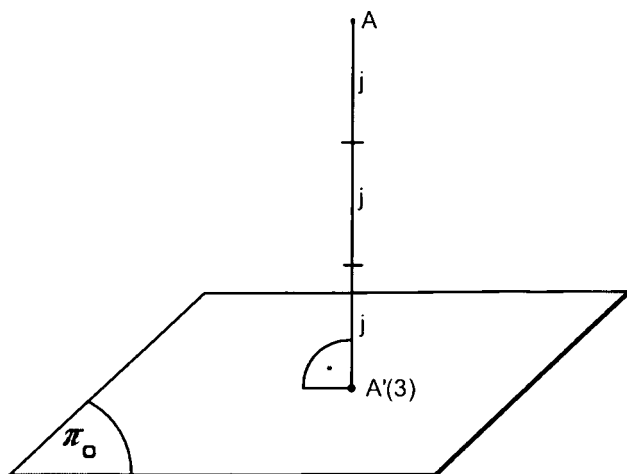
Przedmioty obrazowane w perspektywie równoległej charakteryzują się pewną poglądową sztucznością, która wynika z własności rzutu równoległego (niezmiennikiem jest tu – między innymi – równoległość). Taka wizualizacja jest jednak w zupełności wystarczająca dla ukazania budowy i kształtu przedmiotu w celu jego wykonania lub lepszego

wytłumaczenia relacji przestrzennych między obiektami geometrycznymi.

Aksonometria jest zatem odwzorowaniem przede wszystkim wspomagającym inne, mniej pogładowe metody przedstawiania figur przestrzennych. Z metody tej chętnie korzysta się, ponieważ już przy niewielkich uproszczeniach zarówno w odniesieniu do pewnych typów aksonometrii ukośnej, jak i prostokątnej (*izometria techniczna*, *dimetria techniczna*, *dimetria pozioma* i *czołowa*) jest ona bardzo łatwa w użyciu.

Aksonometria znajduje rozległe zastosowanie w wielu dziedzinach, takich jak części maszyn, górnictwo, geodezja, geologia (blokdigramy) itd.

Rzut cechowany posiada prosty i najbardziej „zmetryzowany” aparat projekcyjny wśród odwzorowań jednoobrazowych. Jest to rzut prostokątny na jedną rzutnię, wykorzystujący tzw. *cechę*, czyli liczbę jednostek przypisaną każdemu rzutowi punktu i wyrażającą jego oddalenie od rzutni (rys. 3).



Rys.3

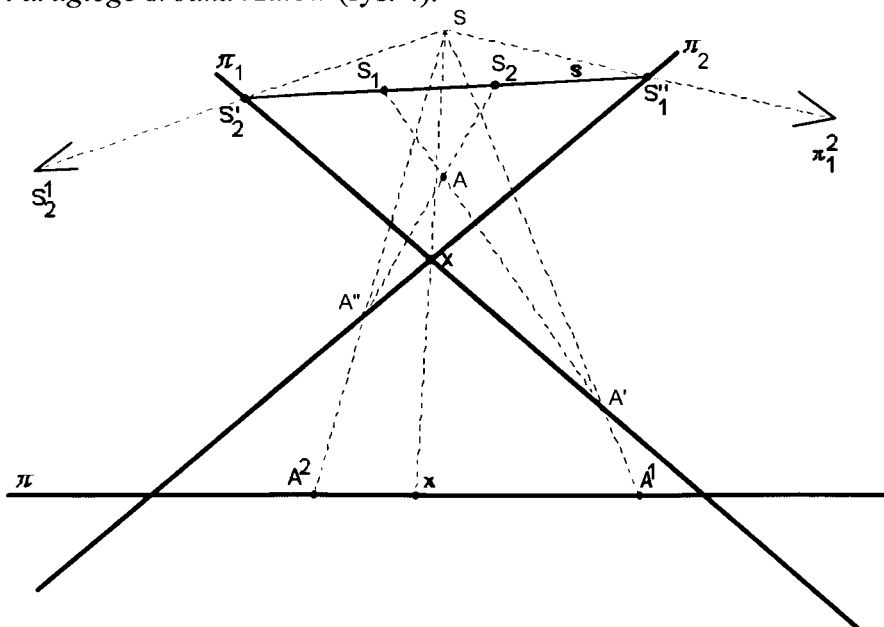
W tej metodzie możliwa jest restytucja, jak również wyznaczenie odległości dwóch różnych punktów, a zatem realizacja wszystkich problemów miarowych.

Struktura aparatu projekcyjnego oraz stosunkowo prosty zapis na rzutni czynią z rzutu cechowanego narzędzie powszechnie stosowane przede

wszystkim w naukach zajmujących się opisem powierzchni Ziemi, a więc w kartografii, topografii, geografii, a także w geologii i górnictwie oraz w projektowaniu budownictwa ziemnego (drogi, boiska, parkingi itp.).

Większość odwzorowań wieloobrazowych generujących więcej aniżeli dwa rzuty, nie posiada większego praktycznego znaczenia ze względu na znaczną komplikację graficzną. Natomiast duże znaczenie posiada odwzorowane dwuobrazowe znane jako *rzuty Monge'a*. W tej metodzie stosuje się także większą liczbę rzutów, jeżeli wymaga tego jednoznaczność odwzorowania obiektu, rozwiązanie problemu jest łatwiejsze lub w dwóch rzutach niemożliwe.

Istnieje *ogólny model dwuobrazowego odwzorowania* wyczerpująco opisany przez E. Mullera [6]. Aparat projekcyjny tego odwzorowania polega na przyjęciu dwóch dowolnych i różnych płaszczyzn π_1 i π_2 przecinających się w prostej x i zwanych odpowiednio *pierwszą* i *drugą rzutnią* oraz dwóch różnych punktów właściwych S_1 i S_2 – *pierwszego* i *drugiego środka rzutów* (rys. 4).

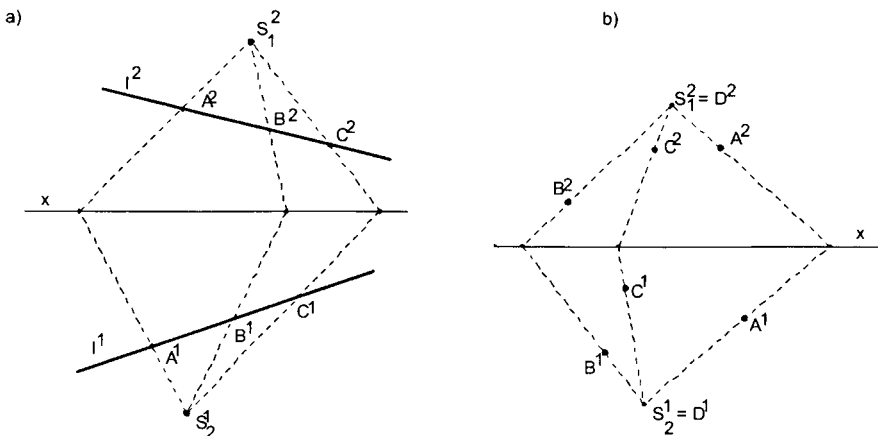


Rys. 4

Obiekty przestrzeni rzutuje się z tych środków na π_1 i π_2 , a następnie z dowolnie obranego punktu właściwego S nazwanego *środkiem głównym*, rzutuje się obrazy leżące na wspomnianych rzutniach na tzw. *rzutnię główną* π , także przyjętą dowolnie, otrzymując w ten sposób *pierwsze i drugie obrazy* obiektów geometrycznych.

W celu uniknięcia zbędnej komplikacji graficznych płaszczyzna rysunku 4 jest prostopadła do wszystkich trzech rzutni.

Prosta l odwzorowuje się na rzutni głównej (rys. 5a) w postaci dwóch rzutowych szeregów punktów (l^1) i (l^2) natomiast płaszczyzna α jako dwa kolineacyjne układy płaskie (α^1) i (α^2) o zjednoczonych podstawach (rys. 5b).



Rys. 5

Z ogólnego modelu można wyprowadzić bardziej szczególne modele odwzorowań dwuobrazowych wykorzystując twierdzenia geometrii rzutowej, afinicznej i euklidesowej, na przykład opisany w artykule [4].

W ogólnym modelu, przy nieustalonych położeniach środków rzutów i rzutni, możliwe jest tylko odwzorowanie położenia obiektów, incydencji czy też elementów wspólnych. Natomiast nie jest możliwa restytucja, jak również rozwiązywanie zagadnień miarowych. Aby jednak i ten ważny w każdej metodzie rzutowania, głównie ze względów praktycznych, dział geometrii mógł być i tu reprezentowany, należy model ogólny w znacznym stopniu „zmetryzować”, na przykład poprzez

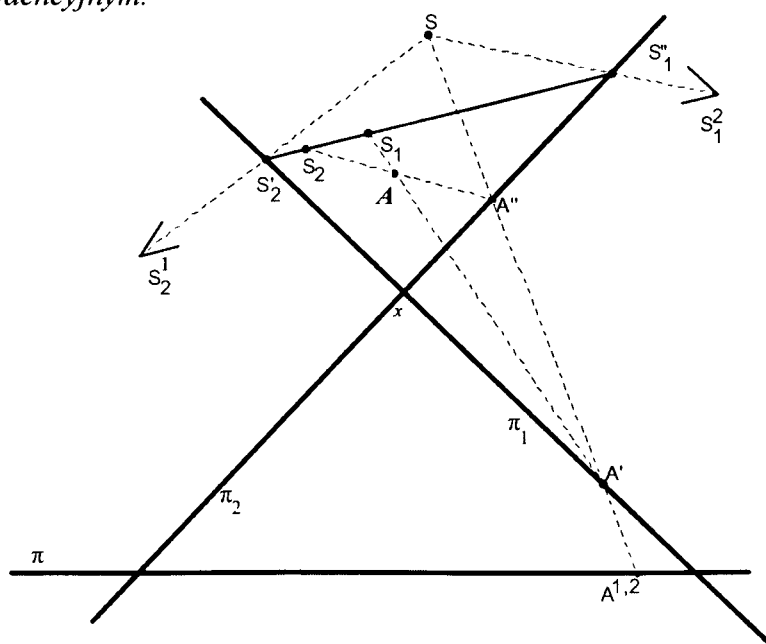
przyjęcie *okręgów głębokości tłowej* dla środków rzutów oraz inne założenia dotyczące wzajemnego położenia rzutni.

Jeżeli jednak chcemy nadal zachować dowolność i niezdefiniowane położenia elementów aparatu projekcyjnego ogólnego modelu, musimy określić *absolut przestrzeni*, czyli wyróżnić płaszczyznę niewłaściwą i przyjąć na niej *absolutną odpowiedniość biegunową*. Przykłady zadań miarowych zostały pokazane – między innymi – w artykule [4], gdzie układ biegunowy płaszczyzny rysunku (rzutni głównej) został określony trójkątem biegunowym, prostą niewłaściwą i środkiem tego układu.

W ogólnym modelu dwuobrazowego odwzorowania istnieje ciekawy i charakterystyczny obiekt geometryczny zwany *figurą koincydencyjną (dwoistą)* tego modelu [6].

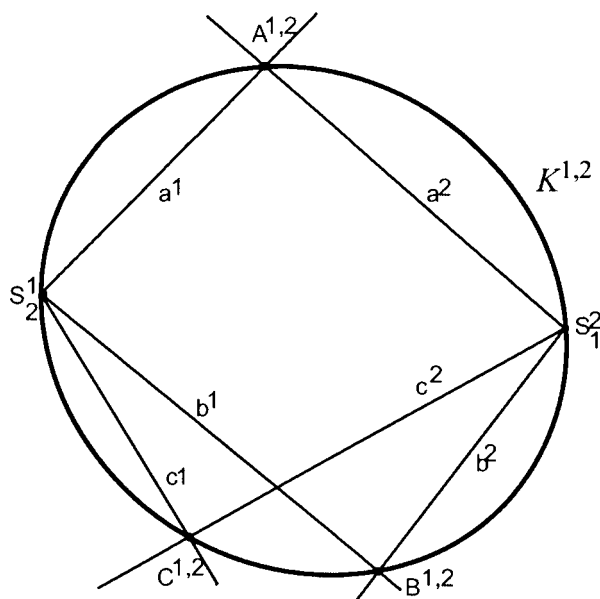
Figura koincydencyjna jest miejscem geometrycznym punktów w przestrzeni posiadających podwójne (zjednoczone) obrazy.

Rysunek 6 przedstawia uproszczony – podobnie jak rys. 4 – wizerunek aparatu projekcyjnego omawianego modelu oraz punkt A , który posiada podwójny obraz $A^{1,2}$ na rzutni głównej π . Punkt taki nazywamy *punktem koincydencyjnym*.



Rys. 6

Obrazy punktów na rzutni głównej położone są na odpowiadających sobie prostych (rys. 5) perspektywicznych pęków (S_2^1) i (S_1^2). W omawianym ogólnym modelu odwzorowania dwuobrazowego można przyjąć, że pęki te są rzutowe, ale nie perspektywiczne. Wówczas podwójne obrazy $A^{1,2}$, $B^{1,2}$, $C^{1,2}$, ... punktów koincydencyjnych A , B , C , ... są punktami przecięcia się odpowiadających sobie prostych tych pęków (rys. 7), których zbiór określa stożkową $K^{1,2}$. Stożkowa ta jest zatem podwójnym obrazem figury koincydencyjnej.



Rys. 7

Figura koincydencyjna K jest krzywą przestrzenną rzędu 3-go, będącą tworem kolineacyjnych wiązek prostych (S_2^1) i (S_1^2) [6].

Własności odwzorowania dwuobrazowego, a w szczególności przekształcenia kolineacyjne układów płaskich, posiadają szerokie zastosowanie w fotogrametrii lotniczej. Stanowią one podstawę dla geometrycznych metod opracowywania planów sytuacyjno-wysokościowych dwóch fotogramów lotniczych [8]. Płaszczyzna kliszy fotograficznej jest rzutnią (tłem), na którą dokonuje się rzutu środkowego (zdjęcia) wycinka terenu. Z kolei obraz leżący na tle rzutowany jest prostokątnie na przyjętą rzutnię poziomą, w wyniku czego otrzymuje się

(w odpowiedniej skali) plan sytuacyjno-wysokościowy terenu. Jeżeli teren jest płaski, to między płaskimi układami kliszy i terenu określona jest kolineacja perspektywiczna, której środkiem jest środek obiektywu aparatu fotograficznego. Z kolei między układami płaskimi terenu i rzutni wyznaczone jest powinowactwo prostokątne. Oznacza to, że układy płaskie kliszy i rzutni są rzutowe. Rzutowość ta określona jest – jak wiadomo – dwiema czwórkami odpowiadających sobie punktów. Przekształcenia rzutowe, w wyniku których układy płaskie obrazu terenu i tła stają się równoległe, nazywamy *przetwarzaniem*.

Uprzednio wspomniano, że z ogólnego modelu dwuobrazowego można – przez coraz szerzej wprowadzaną metryzację – konstruować kolejne, szczególnie dwuobrazowe aparaty projekcyjne. Motywacją do takich działań może być kryterium czysto poznawcze lub zastosowania praktyczne.

Metodą, która łączy w sobie obydwa te kryteria, są **rzuty Monge'a**. Polega ona na rzutowaniu prostokątnym na dwie podstawowe, prostopadłe do siebie rzutnie, następnie ich zjednoczeniu za pomocą obrotu, czyli doprowadzeniu do jednej płaszczyzny identyfikowanej z płaszczyzną rysunku. Jest to zatem odwzorowanie „wysoko zmetryzowane”, funkcjonujące w środowisku geometrii euklidesowej, jednoznaczne i odwracalne, w którym możliwe jest wyznaczenie długości odcinka, a zatem rozwiązanie całej problematyki miarowej. Z tych powodów posiada wiele zastosowań w technice (np. rysunek techniczny).

Figurą koincydencyjną odwzorowania Monge'a jest płaszczyzna dwusieczna kąta prostego ćwiartek II i IV przestrzeni.

Powyższy krótki opis czterech, najczęściej reprezentowanych metod rzutowania w geometrii wykreślnej oparto na kryterium zdolności jednoznacznego odwzorowania maksymalnej liczby relacji geometrycznych, czyli stopniu metryzacji aparatów projekcyjnych, a także na liczbie obrazów (rzutów), niezmiennikach rzutowania, prostocie zapisu, poglądowości. Należy podkreślić, że w zależności od charakteru dyscypliny, w której pożądane jest odwzorowanie obiektów przestrzennych na płaszczyźnie, powinno się stosować możliwie najlepiej dobrane metody takiego odwzorowania. Właściwy dobór tych

metod jest ważnym elementem wzbogacającym wiedzę w danej dziedzinie.

LITERATURA

1. Glazer Z., Wysociński L., *Geometria wykreślna dla geologów*, Wyd. Geol., Warszawa 1983
2. Grochowski B., *Elementy geometrii wykreślnej*, PWN Warszawa 2002
3. Koch A., *Figura koincydencyjne dwuobrazowego modelu odwzorowania liniowego*, Zesz. Nauk. AGH Mat. Fiz. Chem. z.13, Warszawa – Kraków 1973
4. Koch A., *Zagadnienia miarowe w dwuobrazowym modelu odwzorowania liniowego*, Zesz. Nauk. AGH Mat. Fiz. Chem. z. 13, Warszawa – Kraków 1973
5. Koch A., Sulima Samujłło T., *Coincidental Figures in Selected Double – Image Projections*, Proceedings of Symposium on Computational Geometry SCG'2002, Slovak University of Technology in Bratislava, Kocovce, SR, Sept. 2002.
6. Muller E., *Vorlesungen uber Darstellende Geometrie*, Leipzig – Wien 1923
7. Otto E., Otto F., *Podręcznik geometrii wykreślnej*, PWN Warszawa 1975
8. Ślusarczyk B., *Geometria rzutowa I wykreślna*, PWN, Warszawa 1976
9. Waligórski J., *Zasady zastosowania rzutu cechowanego*, WNT, Warszawa 1961

SUMMARY**A Valuation Attempt of Some Projection Methods Used in Descriptive Geometry**

In the article four most commonly represented in Descriptive Geometry projection methods have been briefly described and evaluated as far as their usability in various sciences and technique is concerned. The projections, namely *Central*, *Axonometric*, *Mapping* and *Monge*, belong to one of the two main groups: *one (single) view projections* (central, axonometric and mapping) and *multi (particularly double) view projections*. General model of *double view projections*, from which other more particular models can be derived, has also been mentioned as well as its so called *Coincidental Figure*.