Piotr Banasik

Charakterystyka elementów tworzących państwowe układy współrzędnych "1992" i "2000"

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 27, 5-15

2007

Piotr Banasik

CHARAKTERYSTYKA ELEMENTÓW TWORZĄCYCH PAŃSTWOWE UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH „1992" I „2000"

Wprowadzenie

Rozporządzenie RM w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych (Rozporządzenie..., 2000) wprowadziło do praktyki geodezyjnej nowe obowiązujące w naszym kraju układy współrzędnych. Przyjęty został geodezyjny układ odniesienia zgodny z EUREF-89. Jego powierzchnię stanowi elipsoida GRS-80[1] (Moritz, 1984). Realizację współrzędnych elipsoidalnych (B,L) punktów osnów geodezyjnych zapewnia nawiązanie do europejskiego układu odniesienia ETRF. Przykładem osnowy geodezyjnej na obszarze Polski, której współrzędne punktów wyznaczone zostały w układzie EUREF-89, w wyniku bezpośrednich pomiarów techniką GPS jest sieć ponad 350 punktów POLREF. Stanowi ona osnowę geodezyjną klasy Is (satelitarna). Punkty dawnej osnowy poziomej I i II kl. uzyskały współrzędne (B,L) EUREF-89 w wyniku ponownego jej wyrównania, w nawiązaniu do sieci POLREF. Układ EUREF-89 zastąpił tym samym dotychczas obowiązujący w Polsce układ współrzędnych (B,L) Pułkowo-42, związany z lokalną elipsoidą Krasowskiego.

W ww. Rozporządzeniu RM zawarte są także definicje dwóch nowych państwowych układów współrzędnych płaskich oznaczonych symbolem „1992" i „2000". Pierwszy z nich stanowi podstawę do sporządzania map w skalach od 1:10000 i mniejszych, drugi do realizacji mapy zasadniczej kraju, a więc map sporządzanych w skalach bardziej szczegółowych. Ponadto w układzie „2000" wyznaczane są współrzędne punktów osnów geodezyjnych. Oba układy zastępują w pracach geodezyjnych dotychczasowy państwowy układ „1965", oraz kilkadziesiąt układów lokalnych, stosowanych w wielu miastach naszego kraju.

---

[1] Używana często nazwa WGS-84 dotyczy elipsoidy o praktycznie identycznych parametrach jak GRS-80

Okres przejściowy funkcjonowania „starych" i „nowych" układów współrzędnych ma zakończyć się w 2009 r. Wprowadzenie układu „2000" spowodowało konieczność transformacji współrzędnych punktów osnowy geodezyjnej kl. III i niższych klas. Prace te, realizowane przez Ośrodki Dokumentacji Geodezyjno-Kartograficznej dotyczą również przetworzenia treści mapy ewidencyjnej do układu „2000". Cenną informacją ułatwiającą transformację współrzędnych jest charakterystyka elementów tworzących oba nowe układy współrzędnych „1992" i „2000".

Powierzchnia odniesienia w układach współrzędnych płaskich

Każdy z układów współrzędnych płaskich *XOY* stosowanych w geodezji charakteryzują następujące elementy:

- **matematyczna powierzchnia odniesienia** przyjęta dla bryły Ziemi (geoidy), w postaci elipsoidy lub kuli, podlegająca odwzorowaniu kartograficznemu na płaszczyznę,
- **odwzorowanie kartograficzne**, umożliwiające obliczenie współrzędnych (x,y) danego punktu na płaszczyźnie na postawie współrzędnych (B,L) tego punktu na elipsoidzie (lub φ,λ na kuli),
- **początek układu prostokątnego** ***XOY***, definiujący na płaszczyźnie tzw. współrzędne cechowane (X,Y).

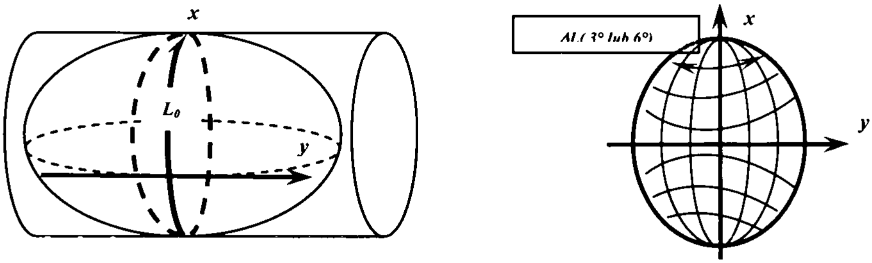
Podstawową powierzchnią odniesienia w państwowych układach współrzędnych jest elipsoida obrotowa. W dawniej opracowywanych układach współrzędnych były nimi elipsoidy lokalne, swoimi rozmiarami najlepiej dopasowane do kształtu geoidy na danym, ograniczonym obszarze. W przeciągu minionego XX w. na obszarze Polski stosowanych było kilka lokalnych elipsoid, związanych z układami obowiązującymi na części lub całości kraju. Na obszarze zaboru rosyjskiego stosowane były elipsoidy Walbecka-1819, „Wyrównująca"-1885 i Bessela-1841, na obszarach zaborów pruskiego i austriackiego – elipsoida Bessela-1841 (Michałowski i in., 1932). Elipsoidy te stanowiły również powierzchnie odniesienia w opracowaniu pomiarów geodezyjnych, w sieciach triangulacyjnych. W okresie międzywojennym i krótko po II wojnie światowej powierzchnią odniesienia w państwowym układzie współrzędnych była elipsoida Bessela (układ „Borowa Góra" w wersjach z 1928 r., 1947 r. i 1949 r.) (Szpunar, 1982).

Powierzchnia ta funkcjonuje również obecnie, w lokalnych układach współrzędnych, czego przykładem jest Układ Lokalny miasta Krakowa (Banasik, 2001). W 1952 r. wprowadzono nowy układ współrzędnych oznaczony symbolem „1942", którego powierzchnię odniesienia stanowiła elipsoida lokalna Krasowskiego-1940. Elipsoidę tę zastosowano również w kolejnych państwowych układach współrzędnych: „1965" i „GUGiK-80". W odróżnieniu od poprzednich, przyjęta obecnie powierzchnia odniesienia GRS-80 jest elipsoidą ziemską, geocentryczną, dopasowaną do geoidy na całym jej obszarze. Elipsoidę tę wykorzystano do opracowania państwowych układów współrzędnych prostokątnych „1992" i „2000". Parametry przeliczenia współrzędnych *(B,L,h)* między elipsoidami Bessela, Krasowskiego i GRS-80 nie są ścisłe. Zostały one wyznaczone na podstawie współrzędnych punktów podstawowej osnowy geodezyjnej. Odpowiednie wzory i wartości parametrów transformacji współrzędnych *(B,L,h)* lub *(X,Y,Z)* między elipsoidami Krasowskiego i GRS-80 podane zostały w (*Instrukcja G-2*, 2001).

Charakterystyka zniekształceń w odwzorowaniu Gaussa-Krügera przyjętym w układzie „1992" i „2000"

Odwzorowanie Gaussa-Krügera jest jednym z najmłodszych a jednocześnie najczęściej stosowanym w geodezji odwzorowaniem kartograficznym[2]. Od czasu odzyskania niepodległości w 1918 r., na obszarze Polski zastosowano go w 5 spośród 7 państwowych układów współrzędnych. Odwzorowanie Gaussa-Krügera dotyczy powierzchni elipsoidy obrotowej (tzw. oryginału), która wyniku zastosowania odpowiedniej funkcji odwzorowawczej $(x,y)=F(B,L)$ przechodzi na płaszczyznę (powierzchnię obrazu). Odwzorowanie to realizowane jest w wąskim pasie południkowym o rozpiętości ΔL, na pobocznicę walca, którego oś jest prostopadła do osi elipsoidy (rys. 1). Takie położenie powierzchni oryginału i obrazu nosi nazwę położenia poprzecznego.

[2] Podstawy tego odwzorowania zostały opracowane w latach 1820-1830 przez C.F.Gaussa, opublikował je w 1866 r. O.Schreiber. Odwzorowanie Gaussa zostało zmodyfikowane przez L.Krügera i opublikowane w 1912 r. a następnie w 1919 r. (Różycki, 1973).



Rys. 1 Odwzorowanie Gaussa-Krügera powierzchni elipsoidy obrotowej na pobocznicę walca

Jak w każdym odwzorowaniu elipsoidy lub kuli na płaszczyznę tak i w przypadku tego odwzorowania występują zniekształcenia odwzorowawcze. Ilustrują one popularne stwierdzenie, że *„nie można bez pęknięć rozprostować powierzchni kuli lub elipsoidy na płaszczyznę"*. W wyniku odwzorowania Gaussa-Krügera zniekształceniu ulegają długości oraz pole powierzchni, wiernie natomiast odwzorowują się kąty (odwzorowanie wiernokątne). Większość odwzorowań stosowanych w geodezji to odwzorowania wiernokątne. Zniekształcenia odwzorowawcze długości i pola wyraża się najczęściej w jednostkach odpowiednio [cm/km] i [m^2/km^2]. Wielkości te charakteryzują na ile długość czy pole z powierzchni elipsoidy zmieni się w wyniku odwzorowania na płaszczyznę. Zniekształcenia długości i pola odpowiadają tzw. elementarnym skalom odwzorowaczym: skali długości lub skali pola. Ze względu na zmienność elementarnej skali i tym samym zniekształcenia, ich wartości podaje się w konkretnym punkcie, o danych współrzędnych. Zniekształcenie długości i pola niezależnie od rodzaju odwzorowania przedstawiają następujące równania:

$$z_d = m - 1 \tag{1}$$

$$z_f = f - 1 \tag{2}$$

gdzie: z_d, z_f - zniekształcenie długości i pola,

m, f - elementarna skala długości i pola (wartość zmienna zależna od położenia:

$m = m(B,L), f = f(B,L)$ lub $m = m(x,y), f = f(x,y)$;

Aby je wyrazić w odpowiednich jednostkach należy zniekształcenie długości z_d pomnożyć przez 10^5 cm/km a pola z_f przez 10^6 m^2/km^2. Za pomocą zależności (1) i (2) można obliczyć odpowiadające sobie długości i pola między powierzchniami elipsoidy i płaszczyzny. W przypadku odwzorowań równokątnych przydatny jest wzór przedstawiający zniekształcenie pola w funkcji zniekształcenia długości:

$$z_f = z_d(z_d + 2) \tag{3}$$

w którym z_d, z_f występują jako wartości niemianowane. W przypadku niewielkich zniekształceń wzór ten można uprościć do postaci:

$$z_f \approx 2z_d \tag{4}$$

ułatwiającej szybkie oszacowanie zmiany pola powierzchni.

Wartość zniekształcenia długości i pola wzrasta proporcjonalnie do odległości danego punktu od miejsca stykania się elipsoidy z płaszczyzną. W klasycznym odwzorowaniu Gaussa-Krügera pobocznica walca styka się z powierzchnią elipsoidy wzdłuż południka środkowego (odwzorowanie styczne) (rys. 1). Punkty z południka środkowego przechodzą bezpośrednio w punkty jego obrazu na płaszczyźnie. Konsekwencją tego są zerowe zniekształcenia długości i pola wzdłuż południka środkowego i dodatnie zniekształcenia poza południkiem środkowym. Izolinie jednakowych zniekształceń na odwzorowywanym obszarze mają przebieg południkowy. Wartości zniekształceń długości i pola w danym punkcie dla stycznego odwzorowania Gaussa-Krügera oblicza się z następujących zależności[3]:

$$z_d = \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} \dots \tag{5}$$

$$z_f = \frac{y^2}{R^2} + \frac{y^4}{3R^4} \dots \tag{6}$$

gdzie: y – współrzędna na płaszczyźnie Gaussa-Krügera będąca odległością od południka środkowego pasa odwzorowawczego,

[3] Wartości zniekształceń długości w odwzorowaniach stosowanych w niektórych państwowych układach współrzędnych prostokątnych obliczane są w programach komputerowych z tego zakresu np. TRANSPOL

R – średnim promieniem krzywizny elipsoidy w rejonie Polski ($R \approx 6383$ km)

Powyższe wzory funkcjonują także w postaci $z=z(B,L)$ (Szpunar, 1982). Porównanie pierwszych, dominujących składników równań (5) i (6) prowadzi do przybliżonej zależności w postaci (4).

Dla obszaru Polski ($L_{min} = 14°$, $L_{max} = 24°$) maksymalne zniekształcenie długości w jednostrefowym, stycznym odwzorowaniu Gaussa-Krügera (dla południka środkowego przebiegającego przez środek Polski $L_0 = 19°$) wystąpi na wschodnich i zachodnich jej krańcach i wyniesie ponad +140 cm/km. Tempo zmiany zniekształcenia można obliczyć po zróżniczkowaniu równania (5). Maksymalnie wyniesie ono 0.0025 cm/km na każdy kilometr odległości od południka środkowego.

Aby zmniejszyć wartości zniekształceń długości i pola należy zastąpić odwzorowanie styczne odwzorowaniem siecznym. W takim położeniu oryginału i obrazu pobocznica walca przecina się z powierzchnią elipsoidy. Odwzorowywany obszar podzielony zostaje dwiema południkowymi liniami sieczności (rys. 2). Zerowe zniekształcenia wystąpią wzdłuż linii sieczności, dodatnie zniekształcenia wystąpią na zewnątrz obu linii a ujemne zniekształcenia wystąpią na obszarze między liniami sieczności. Zamianę odwzorowania stycznego na sieczne realizuje tzw. skala sieczności, oznaczana przez m_0 ($m_0 < 1$). Zaletą odwzorowania siecznego w stosunku do stycznego jest zmniejszenie bezwzględnej wartości zniekształcenia długości i pola. Duże wartości dodatnich zniekształceń zamienione zostają w tym przypadku na mniejsze, lecz o różnych znakach. Odwzorowywany obszar doznaje zatem zarówno powiększenia jak i skurczenia. Skala długości w odwzorowaniu siecznym jest równa:

$$m_{sieczne} = m_0 m_{styczne} \tag{7}$$

gdzie: $m_{styczne}$ – oznacza skalę z odwzorowania stycznego.
W podobny sposób obliczane są współrzędne (x,y):

$$\begin{cases} x_{sieczne} = m_0 x_{styczne}, \\ y_{sieczne} = m_0 y_{styczne} \end{cases} \tag{8}$$

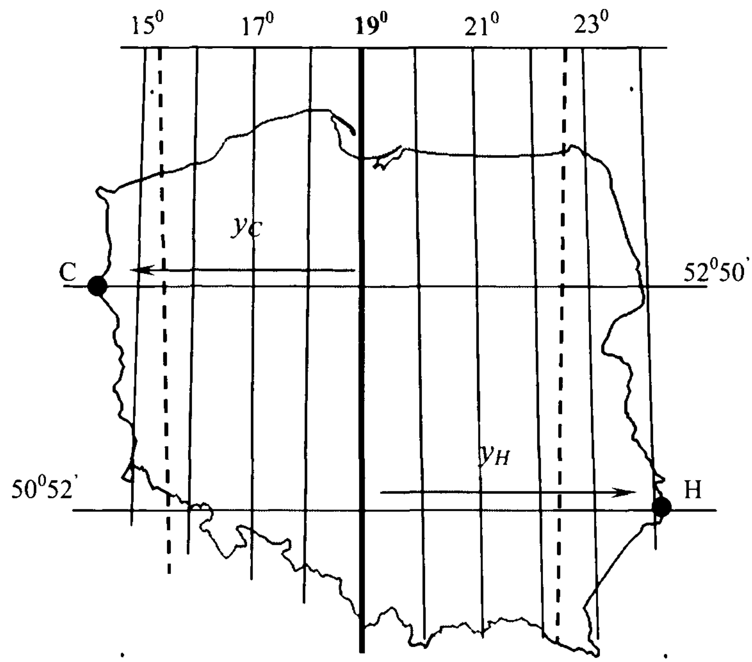
gdzie: $(x,y)_{styczne}$ – oznacza współrzędne w odwzorowaniu stycznym.

Kompilacja równań (1) i (7) prowadzi do wzoru na zniekształcenie długości w odwzorowaniu siecznym:

$$z_{d-sieczne} = m_0 z_{d-styczne} + z_{d-0} \tag{9}$$

gdzie: $z_{d\text{-}styczne}$ – zniekształcenie długości w odwzorowaniu stycznym,
$z_{d\text{-}0}$ –zniekształcenie długości wynikające ze skali m_0 ($z_{d\text{-}0} = m_0 - 1$)

Odpowiednio dobierając wartość skali sieczności m_0 można dla danego obszaru znacznie zmniejszyć zniekształcenia odwzorowawcze długości i pola. Dla obszaru Polski odwzorowanego w jednym pasie południka $L_0 = 19°$, po ustaleniu skali $m_0 = 0.9993$ otrzymamy zniekształcenie długości na południku środkowym równe –70 cm/km, na zachodnich krańcach Polski punkt C (okolice Cedyni $B_C = 52°50'$,$L_C = 14°08'$) ok. +60cm/km a na wschodnich punkt H (okolice Hrubieszowa $B_H = 50°52'$, $L_H = 24°08'$) ok. +90 cm/km ($y_C < y_H$) (rys. 2).



Rys. 2 Zniekształcenia długości w odwzorowaniu Gaussa-Krügera ($L_0 = 19°$, $m_0 = 0.9993$ – układ „1992") (przerywaną linią zaznaczono miejsce przecięcia powierzchni elipsoidy z pobocznicą walca)

Większość obszaru Polski znajdująca się w przybliżeniu między długościami 15.5° i 22.5° będzie miała ujemne zniekształcenia długości i pola powierzchni. Takie parametry odwzorowania Gaussa-Krügera przyjęto w układzie współrzędnych prostokątnych „1992".

Chcąc jeszcze bardziej zrównoważyć zniekształcenia należałoby przyjąć nieco mniej wygodne parametry: południk pasa odwzorowawczego $L_0 = 19°14'30''$, skala sieczności $m_0 = 0.999277$. Wtedy na obszarze całego kraju (również w punktach C i H) maksymalne zniekształcenia długości nie przekroczyłyby ±73 cm/km. W wyborze L_0 dla danego obszaru należy brać pod uwagę również kształt południków (rys. 1). Punkty leżące na tym samym południku mają większe zniekształcenia jeśli znajdują się bliżej równika (rys. 2).

Dalsze zmniejszenie zniekształceń długości i pola w odwzorowaniu Gaussa-Krügera realizowane jest przez podział obszaru na kilka wąskich, stykających się ze sobą pasów południkowych, z osobnymi południkami środkowymi. W praktyce stosuje się najczęściej pasy o szerokości 3°. Na obszarze Polski są nimi pasy południka środkowego 15°, 18°, 21°, 24°. W niektórych układach współrzędnych[4] stosowano także pasy 2° i 6° z południkami: 15°, 17°, 19°, 21°, 23° i 25° lub 15°, 21°, 27°. W przypadku podziału na 3° pasy, maksymalne zniekształcenia długości w odwzorowaniu stycznym będą na obszarze Polski rzędu +11cm/km w północnej części i +15 cm/km w południowej części pasa odwzorowawczego. Zastosowanie skali sieczności $m_0 = 0.999923$ spowoduje, że na południku środkowym pasa zniekształcenie długości wyniesie −7.7 cm/km. Na północnym skraju pasa zniekształcenie to osiągnie wartość +3.5 cm/km zaś na południowym +7 cm/km. Analizowane wcześniej punkty C i H (rys. 2) znajdą się w pasie południka 15° i 24°, w obszarze zniekształceń ujemnych. W punkcie C zniekształcenie długości wyniesie –3.5 cm/km, a w punkcie H –7.6 cm/km.

---

[4] Pasy 2° stosowano w układzie „Borowa Góra" od 1928 r, a 6° od 1955 r. w jednym z wariantów układu „1942" przeznaczonym do sporządzania map w skalach 1:50000 i mniejszych.

Wstawiając równanie (5) do (9) i pomijając wyrazy wyższych potęg otrzymamy wzór, dzięki któremu można oszacować położenie linii sieczności w stosunku do południka środkowego pasa odwzorowawczego:

$$y_{linii\_siecz.} \approx \pm R\sqrt{\frac{2(1-m_0)}{m_0}} \tag{10}$$

Dla pasów 3° i $m_0 = 0.999923$ linia sieczności znajduje się w odległości ok. 79 km na wschód i zachód od południka środkowego każdego pasa. Biorąc pod uwagę szerokość 3° pasa na obszarze naszego kraju wynoszącą średnio 206 km, można zauważyć, strefa zniekształceń ujemnych zajmie 2/3 obszaru całego pasa. Odwzorowanie Gausa-Krügera w pasach 3° ze skalą $m_0 = 0.999923$ przyjęto w państwowym układzie współrzędnych prostokątnych „2000".

Współrzędne cechowane w układach współrzędnych „1992" i „2000"

Kolejnym elementem układu współrzędnych prostokątnych jest początek obu jego osi, od którego liczone są współrzędne *(x,y)* punktów. W przypadku „klasycznego" odwzorowania Gaussa-Krügera współrzędną x liczy się od obrazu równika, zaś y od obrazu południka środkowego pasa odwzorowawczego. Dla punktów na obszarze Polski mielibyśmy zatem dla współrzędnej x zakres wartości od 5430 km do 6090 km. Dla współrzędnej y i 3° pasów wartości te zawierałyby się w granicach od ±95 km na północy kraju do ±110 km na południu naszego kraju. Ze względu jednolitość współrzędnych na odwzorowywanym obszarze, oraz wygodę ich stosowania, przesuwa się początek układów *xOy* poszczególnych pasów, uzyskując tzw. współrzędne cechowane:

$$\begin{aligned} Y &= y + y_0 \\ X &= x + x_0 \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie: X, Y – współrzędne po przesunięciu początku *xOy* (cechowane),
x_0, y_0 – wartości przesunięcia dla obu osi układu

W układzie „1992" przesunięcie to wynosi: $x_0 = -5300000\ m$ i $y_0 = +500000\ m$. Konsekwencją tego są 6-cyfrowe (w metrach), dodatnie wartości *(X,Y)* na obszarze całego kraju.

W przypadku układu „2000" przesunięciu podlega jedynie początek osi y. Wartości y_0 dla poszczególnych pasów wynoszą: +5500000 m (15°), +6500000 m (18°), +7500000 m (21°), +8500000 m (24°). Współrzędna x pozostaje bez zmian i liczona jest od obrazu równika elipsoidy. W związku z tym w układzie „2000" obie współrzędne (X,Y) są dodatnie i mają po 7 cyfr (w metrach). Wzory, na podstawie których oblicza się współrzędne (X,Y) w obu ww. układach uzyskują zatem końcową postać:

$$\begin{aligned} X &= x \cdot m_0 + x_0 \\ Y &= y \cdot m_0 + y_0 \end{aligned} \qquad (12)$$

gdzie: x,y – są współrzędnymi stycznym odwzorowaniu Gausa-Krügera.

Na zakończenie warto jeszcze wspomnieć o jednym z układów współrzędnych prostokątnych dość powszechnie stosowanym w innych krajach Europy, a w naszym kraju wykorzystywanym najczęściej w nawigacji wojskowej (w postaci tzw. siatki meldunkowej). Układ ten oznaczony został skrótem UTM (*Universal Transverse Mercator projection*) na cześć Mercatora[5], pioniera w zastosowaniu odwzorowań wiernokątnych. Sporządził on w XVI w. niezwykle przydatną w żegludze mapę, w równokątnym, walcowym odwzorowaniu kuli na płaszczyznę. W przypadku UTM elementami układu są: elipsoida GRS-80, odwzorowanie Gaussa-Krügera w 6° pasach, ze skalą na południku środkowym $m_0 = 0.9996$, oraz przesunięciem początku osi (x_0, y_0) podobnym jak w układzie „2000".

[5] Gerhard Cremer znany również jako Gerardus Mercator de Rupelmonde (1512–1594), holenderski geograf i kartograf, wytwórca map, globusów, instrumentów astronomicznych i zegarów słonecznych.

Literatura:

1. Banasik P. 2001: *Analiza Krakowskiego Układu Lokalnego pod kątem jego transformacji do państwowych układów współrzędnych „1992" i „2000"*, Materiały X Sesji Naukowo-Technicznej nt. Aktualne problemy naukowe i techniczne prac geodezyjnych, Piwniczna 10-12.05.2001.
2. Instrukcja G-2, 2001: *Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna i przeliczenia współrzędnych miedzy układami*, GUGiK, Warszawa.
3. Michałowski J, Sikorski T., 1932: *Katalog punktów trygonometrycznych*, Biblioteka Służby Geograficznej, T.8, Warszawa
4. Moritz H, 1984: *Geodetic Reference System 1980*, "Bulletin Geodesique", Vol. 58, No. 3
5. *Rozporządzenie Rady ministrów z dn. 8.08.2000 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych*, Warszawa, 2000.
6. Różycki J, 1973: *Kartografia matematyczna*, PWN, Warszawa
7. Szpunar W., 1982: *Podstawy geodezji wyższej*, PPWK, Warszawa