Andrzej Koch

Obrazy inwersyjne niektórych figur na płaszczyźnie

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 35-36, 21-31

2011

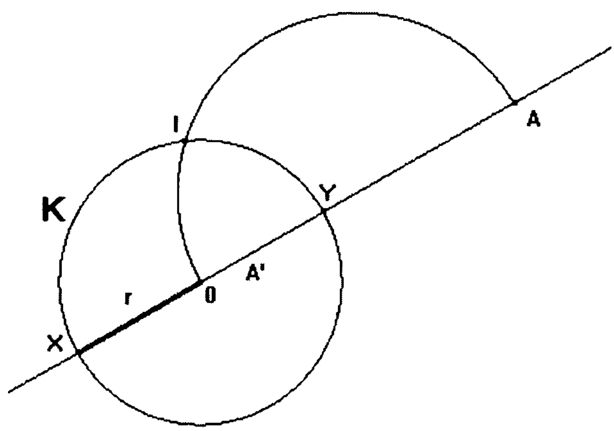
Andrzej Koch

Obrazy inwersyjne niektórych figur na płaszczyźnie

Inwersja definiowana jest jako przekształcenie spełniające następującą relację (rys.1):

$$OA \cdot OA' = r^2 \quad (1)$$

Punkty A płaszczyzny π okręgu $\boldsymbol{K}$ o środku O i zewnętrzne względem niego przekształcone zostają w swoje *obrazy A'* leżące wewnątrz tego okręgu.



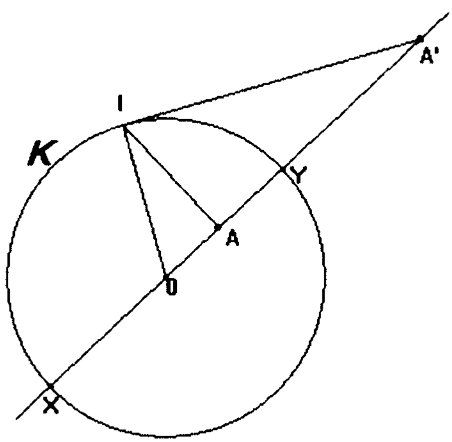
Rys.1

Rys. 1. Obraz A' punktu A zewnętrznego względem okręgu $\boldsymbol{K}$

Przekształcenie inwersyjne (bez środka *0*) *jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym (odwracalnym)*, co oznacza, że punkt A jest jednocześnie obrazem punktu A' leżącego wewnątrz okręgu $\boldsymbol{K}$. Oznacza to także, że podstawa π układu płaskiego *{A}* przekształcona zostaje względem okręgu $\boldsymbol{K}$ w samą siebie. *Kwadrat inwersji jest przekształceniem tożsamościowym.*

Znanych jest kilka sposobów wyznaczania obrazów *A'* punktów *A*. Jeden z nich pokazany jest na rysunku 1. Przez A oraz środek O okręgu ***K*** prowadzimy prostą, która przecina ten okrąg w punktach *X* i *Y*. Z relacji (1) wynika, że punkty A i *A'* dzielą harmonicznie średnicę *XY*. Łuk okręgu o średnicy *OA* przecina okrąg ***K*** w punkcie I, a z kolei łuk *IA* wyznacza punkt *A'* na prostej *OA*. Punkty A i *A'* stanowią parę elementów harmonicznie sprzężonych względem punktów *X* i *Y*.

Rysunek 2 przedstawia jeden ze sposobów wyznaczania obrazu *A'* punktu A przy założeniu, że ten ostatni jest punktem wewnętrznym okręgu ***K***.



Rys.2.

Rys. 2. Obraz *A'* punktu A leżącego wewnątrz okręgu ***K***.

Przez A kreślimy prostą *AI* prostopadłą do *XY*, a następnie w punkcie I prostopadłą do *OI*. Ta ostatnia przecina prostą *XY* w punkcie *A'*.

Jednym z *niezmienników przekształcenia inwersyjnego jest okrąg* ***K***, co oznacza, że jeżeli punkty A przynależą do ***K***, to w wyniku tego przekształcenia zachodzi A =*A'*.

Znane własności inwersji skłaniają do wykorzystania tego przekształcenia jako aparatu projekcyjnego odwzorowującego figury ***F*** układu płaskiego π *w figury* ***F'*** układu płaskiego π'.

Poniżej przedstawimy obrazy inwersyjne niektórych utworów geometrycznych przynależnych do płaszczyzny π.

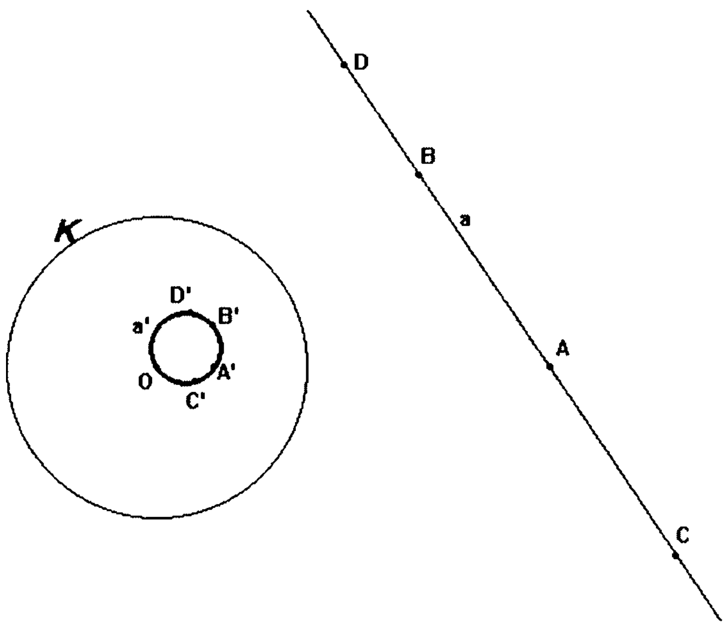
1. Obraz prostej

1. Prosta zewnętrzna względem okręgu *K*

Na płaszczyźnie π przyjmijmy okrąg ***K*** *o* środku O oraz prostą a zewnętrzną względem ***K***. Weźmy pod uwagę punkt N^{∞} prostej a oraz punkty X i Y przecięcia się prostej ON^{∞} z okręgiem ***K***. Z relacji

$$(XYON^{\infty}) = -1 \quad (2)$$

wynika, że obrazem inwersyjnym punktu N^{∞} jest punkt 0. Ponieważ relacja ta zachodzi dla każdego punktu N^{∞} prostych a płaszczyzny π, zatem *obrazy inwersyjne a' tych prostych muszą zawierać punkt O będący środkiem odcinka XY* (rys.3).



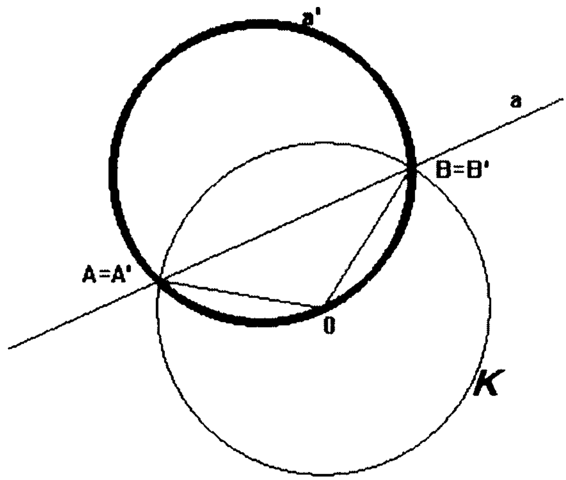
Rys. 3.

Rys. 3. Obraz *a'* prostej a zewnętrznej względem okręgu *K*

Na prostej a obierzmy dowolne dalsze punkty A, B, C, D i w sposób pokazany na rysunku 1 znajdźmy ich obrazy A', B', C', D'. Obrazy te wraz z obrazami pozostałych punktów prostej a utworzą *okrąg a', który jest obrazem prostej a zewnętrznej względem okręgu* ***K*** (i na odwrót).

2. Prosta przecinająca okrąg ***K***

*Punkty A i B przecięcia się prostej a z okręgiem **K** są niezmiennikami przekształcenia inwersyjnego, a zatem wraz z punktem O wyznaczają one okrąg a' będący obrazem prostej a* (rys.4).

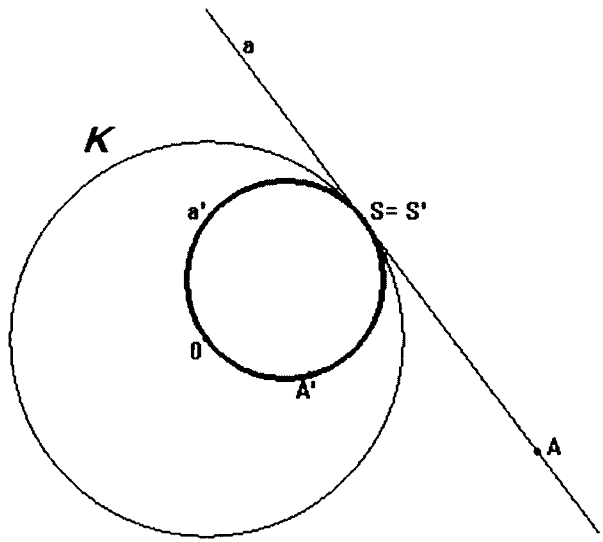


Rys.4.

Rys. 4. Obraz *a'* prostej a przecinającej okrąg ***K***

3. Prosta styczna do okręgu ***K***

Ponieważ punkt *S* styczności prostej a do okręgu ***K*** jest także swoim obrazem *S' wystarczy znaleźć obraz A' dowolnego punktu A prostej a, aby wyznaczyć okrąg a', który jest obrazem prostej a* (rys.5).



Rys.5.

Rys. 5. Obraz *a'* prostej a stycznej do okręgu *K*

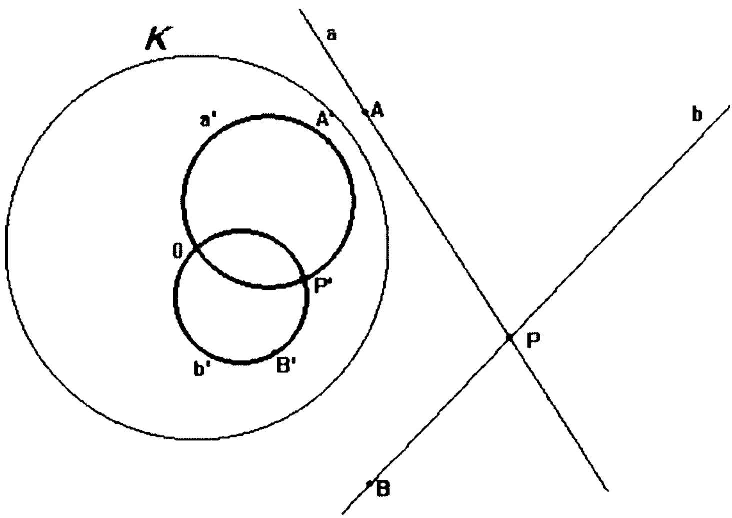
4. Wnioski

Na koniec rozważań dotyczących obrazów prostej w wyniku zastosowania przekształcenia inwersyjnego należy przypomnieć, *że prosta przechodząca przez środek 0 okręgu **K** i traktowana jako podstawa szeregu punktów jest niezmiennikiem tego przekształcenia, natomiast elementy tego szeregu zamieniają się swymi miejscami.* Nasuwa się również oczywisty następujący wniosek: *obrazem prostej niewłaściwej płaszczyzny π jest środek O okręgu **K**.* Wreszcie, z *opisanych przypadków 1, 2 i 3 odwzorowania prostej wynika, że w tych przypadkach przekształcenie inwersyjne ma charakter kwadratowy.*

2. Para prostych

1. Proste przecinające się

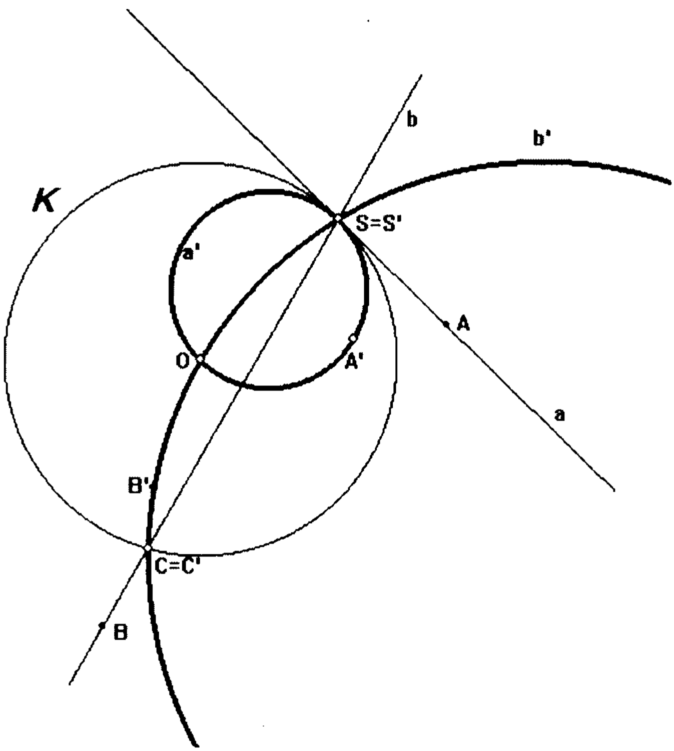
Rysunek 6 przedstawia obrazy a' i *b'* prostych a i *b* przecinających się w punkcie *P* i zewnętrznych względem okręgu ***K*** . Ponieważ okręgi *a'* i *b'* muszą przechodzić przez punkty O i *P'*, zatem wystarczy znaleźć obrazy *A'* i *B'* dowolnych punktów A i *B* leżących odpowiednio na prostych a i *b,* aby wyznaczyć te okręgi.



Rys.6.

Rys.6. Obrazy a' i b' prostych a i b przecinających się w punkcie P i zewnętrznych względem okręgu $\boldsymbol{K}$

Dla omawianej pary prostych możliwe są liczne przypadki szczególnych położeń. Jednym z nich może być przypadek pokazany na rysunku 7. Punkt $S=S'$ leży na okręgu $\boldsymbol{K}$ i jest punktem przecięcia się prostych a i b przy czym prosta a jest styczna w tym punkcie do $\boldsymbol{K}$, natomiast prosta b przecina ten okrąg w jeszcze jednym punkcie $C=C'$.

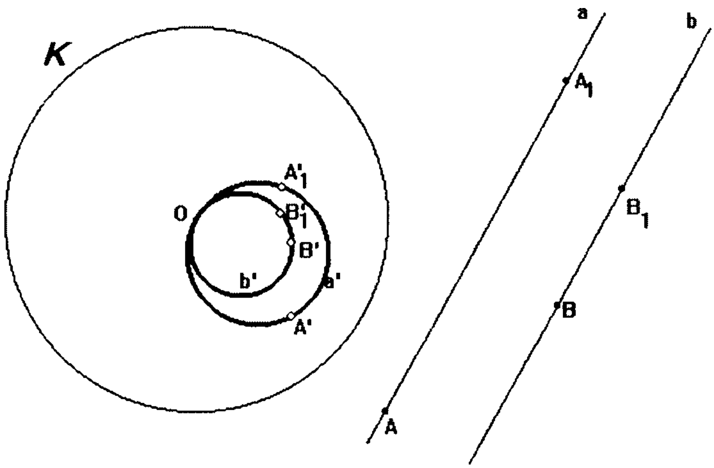


Rys.7.

Rys.7. Obrazy *a'* i *b'* prostych a i *b* przecinających się w punkcie *S*=*S'* na okręgu ***K***

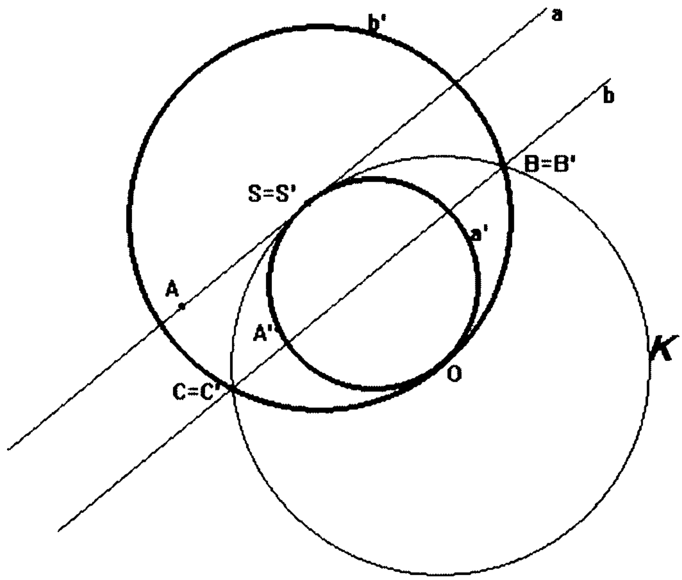
2. Proste równoległe

Obrazy *a'* i *b'* prostych równoległych zewnętrznych względem okręgu ***K*** pokazane są na rysunku 8. Okręgi *a'* i *b'* posiadają jeden punkt wspólny, a mianowicie *O*, który jest obrazem punktu niewłaściwego tych prostych. Podobnie jak w przypadku poprzednim dla omawianej pary prostych możliwe są różne położenia szczególne.



Rys.8. Obrazy *a'* i *b* ' prostych a i *b* równoległych i zewnętrznych względem okręgu ***K***

Na przykład rysunek 9 przedstawia obraz prostych równoległych a i *b* w przypadku, gdy jedna z nich jest styczna do okręgu ***K*** w punkcie *S*.

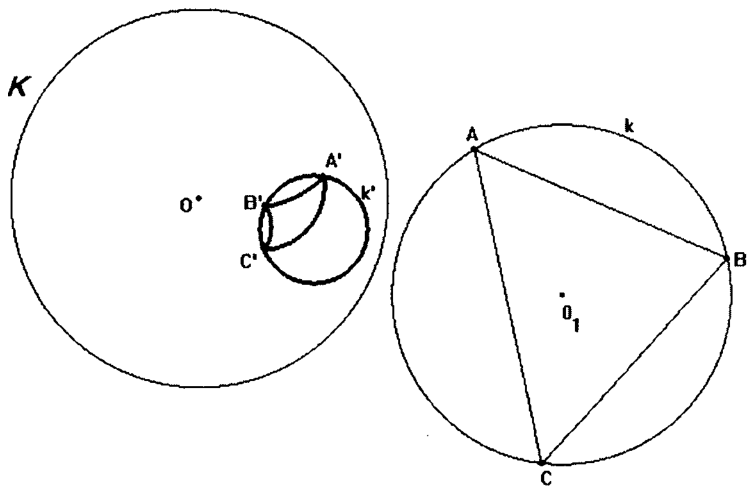


Rys. 9.

Rys. 9. Obrazy *a' i b'* prostych równoległych a i *b*, z których a jest styczna do okręgu ***K***.

3. Okrąg opisany na trójkącie

Niech kolejną figurą płaszczyzny π okręgu ***K*** będzie okrąg *k* opisany na trójkącie *ABC* (rys.10). Jak wiadomo, obrazem okręgu nieprzechodzącego przez środek *0* jest okrąg również niezawierający tego punktu. Boki trójkąta odwzorowują się w łuki okręgów, z których każdy oczywiście przechodzi przez *0*.

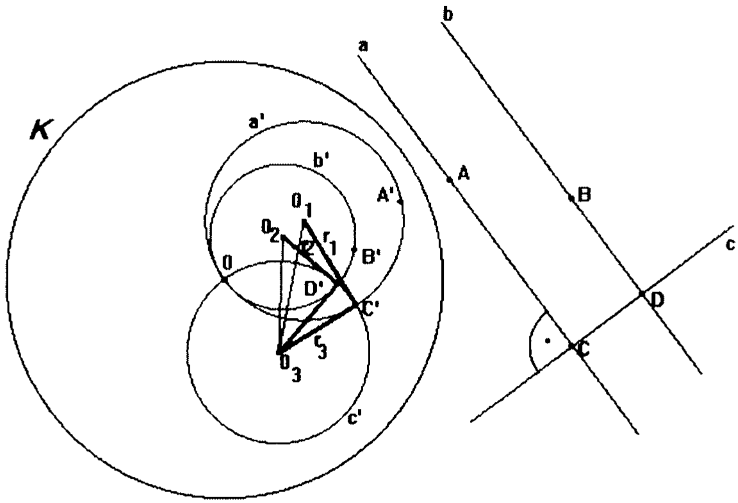


Rys.10.

Rys. 10. Obrazy k' i $A'B'C'$ okręgu k opisanego na trójkącie ABC

4. Konfiguracja dwóch prostych równoległych i prostej do nich prostopadłej

Na płaszczyźnie π okręgu K przyjmijmy dwie dowolne proste a i b oraz prostopadłą do nich prostą c (rys.11). Niech prosta c przecina prostą a w punkcie C, a prostą b w punkcie D.



Rys. 11

Rys. 11. Obrazy *a'* i *b'* prostych równoległych a i *b* oraz *c'* prostej *c* prostopadłej do a i *b*.

Przyjęte proste odwzorowują się w okręgi *a'*, *b'* i *c'* o wspólnym punkcie *0*, które są dodatkowo określone: punktami A i *C* dla okręgu *a'* , *B'* i *D'* dla okręgu *b'* oraz *C'* i *D'* dla okręgu *c'*. Zauważmy, że w punktach *C'* i *D'* przecięcia się okręgu *c'* z okręgami *a'* i *b'* promienie $r_1 = 0_1C'$ i $r_3 = 0_3C'$ oraz $r_2 = 0_2D'$ i r_3 są do siebie prostopadłe i styczne do *c'* i *a'* oraz *c'* *i b'* odpowiednio. Ponadto trójkąty $0_1C'0_3$ i $0_2D'0_3$ są prostokątne, a zatem dwukrotnie znajduje tu zastosowanie twierdzenia Pitagorasa: $r_1^2 + r_3^2 = (0_10_3)^2$ i $r_2^2 + r_3^2 = (0_10_3)^2$.
Oznacza to, że okręgi *a' i c'* oraz *b'* i *c'* są względem siebie *ortogonalne.*

Literatura

1. Filon L. N. G., *An Introduction to Projective Geometry,* London 1947.
2. Ogilvy C.S., *Excursions in Geometry*, New York 1969.
3. Stark M., *Geometria analityczna*, Warszawa-Wrocław 1951.