Gustaw Treliński

Edukacja matematyczna w systemie kształcenia studentów kierunku geodezja i kartografia

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 35-36, 89-114

2011

Gustaw Treliński

Edukacja matematyczna w systemie kształcenia studentów kierunku geodezja i kartografia

1. Wprowadzenie

Uczestnicząc w sympozjach (spotkaniach, konferencjach) poświęconych edukacji matematycznej można zauważyć, że dyskutanci, wypowiadając się o matematyce, jej znajomości, trudnościach posługiwania się nią, zakładają milcząco, że wszyscy matematykę rozumieją tak samo. Tymczasem poglądy na jej temat nie są jednolite; różnice te w mniejszym stopniu dotyczą wiedzy o pojęciach i metodach matematyki, niż czynności (aktywności) wiązanych z tą wiedzą.

Na studiach (w życiu codziennym) z matematyką mamy do czynienia w trzech sytuacjach:

a) Rozwiązujemy konkretne zadanie; szukamy wzoru lub schematu postępowania, które umożliwią znalezienie odpowiedzi lub choćby przybliżenie się do niej. Wówczas matematykę traktujemy jako **bibliotekę modeli teoretycznych** oraz **narzędzi** (metod) umożliwiających rozwiązywanie zadań.
b) Badamy nowe zagadnienie; w matematyce szukamy kategorii językowych, które pomogą go opisać, sposobów jego badania i metod uzasadnienia poprawności rozumowania. Posiłkujemy się w tym celu matematycznymi pojęciami, twierdzeniami, metodami oraz językiem. Myślimy wtedy o matematyce jako o „wzorcu wiedzy", o strukturze pojęć, twierdzeń, algorytmów, metod. Matematykę traktujemy jako **dziedzinę wiedzy.**
c) Uczymy się matematyki, tworzymy ją w swojej myśli; wówczas matematyka jest dla nas **obszarem działalności intelektualnej**, której wytworem jest matematyka – teoria oraz matematyka - narzędzie.

W każdej z tych sytuacji używamy tych samych pojęć, twierdzeń, metod matematyki, posługujemy się tym samym językiem (tworzą one tzw. **przedmiot** matematyki), natomiast różny jest system czynności skierowanych na kształtowanie pojęć, rozumowań oraz ich stosowanie (tzw. **treść aktywności matematycznej).** Nie można dyskutować o matematyce, czy wypracowując jej koncepcję w systemie studiów nie dostrzegać jej trojakiej natury.

Przedmiot matematyki, w przypadku studiów kierunku geodezja i kartografia, w pewnej mierze, charakteryzują standardy[7] kształcenia (Dz. Ustaw nr 169, zał. Nr 36). Jedną z konsekwencji narzucanych przez nie jest organizacja studium matematyki,

[7] Standardy, to w miarę jednoznacznie określone poziomy osiągnięć uczących się lub rozwiązań organizacyjnych ustalone dla wybranego aspektu systemu oświaty. Można formułować standardy dotyczące celów, treści, metod, środków lub form organizacyjnych kształcenia. W polskich warunkach funkcjonują standardy dotyczące treści kształcenia oraz wymagań w zakresie wiadomości i umiejętności uczniów.

prowadzonego pod szyldem przedmiotu o nazwie *matematyka.* W jego ramach podział na odrębne dyscypliny, czas realizacji poszczególnych działów oraz wnikliwość i dogłębność ich przedstawienia zależy od wykładowcy i predyspozycji słuchaczy. To zazwyczaj prowadzi do redukowania lub poszerzania wybranych treści, choć zachowuje się sumaryczną zgodność godzin zajęć.

Poglądy osób realizujących przedmiot **Matematyka,** na temat zakresu oraz doboru materiału, są dość zróżnicowane. Nie rzadko zdarza się, że poszerzają one treści, a także wykładają je językiem struktur na znacznie podwyższonym poziomie ogólności. Oto wypowiedź ilustrująca to stwierdzenie. „Część wykładu z matematyki obejmuje fragmenty algebry liniowej. Tę część dobrze rozpocząć od omówienia systemów liczbowych: liczb naturalnych N = {0, 1, ...} w pierwszej kolejności, a następnie liczb całkowitych Z, liczb wymiernych Q, liczb rzeczywistych R oraz liczb zespolonych C. Przy okazji omawiania tych systemów można wprowadzić kilka ważnych struktur matematycznych - wraz z ich nazwami - przewijających się w całym kursie matematyki". I dalej: „Przy okazji (*dot. elementów analizy matematycznej – przypis mój*) można wprowadzić pojęcie przestrzeni topologicznej, przestrzeni metrycznej oraz przestrzeni unormowanej" (A. Smoluk, 2000). Podobne podejście lansują niektóre książki zalecane studentom (zob. T. Jurlewicz, Z. Skoczyłas, 2003).

Możliwe jest również inne stanowisko, którego punktem wyjścia jest pogląd: Nie jest obojętne, jaka matematyka jest realizowana w toku studiów. Student tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań. „Ćwiczenia i stawiane problemy nie powinny, więc nigdy odbiegać zbyt daleko od zastosowań – po to student uczy się matematyki" ... „Matematycy „czyści" myślą czasem, że *dlaczego*, które towarzyszy matematycznej technice, leży w formalnym dowodzie twierdzenia, który upewnia, że metoda zawsze daje właściwą odpowiedź" (A. Ostoja- Ostaszewski, 1996).

Aby kształcenie matematyczne było merytorycznie spójne, użyteczne, przystępne dydaktycznie oraz skoordynowane z edukacją danej specjalności należy znać uwarunkowania, potrzeby oraz oczekiwania wszystkich osób, które mają do czynienia z matematyką w czasie studiów.

Niniejsze opracowanie poświęcam koncepcji edukacji matematycznej studentów kierunku Geodezji i Kartografii WSBiP w Ostrowcu Świętokrzyskim. Ważnym elementem jej charakterystyki są wypowiedzi ankietowe pracowników Katedry Geodezji i Kartografii, obserwacje wynoszone z pracy ze studentami oraz wymogi opisane w standardach kształcenia.

Sondaż ujęty w formę ankiety przeprowadzono w grudniu 2010 r. Jego celem było uzyskanie opinii, sugestii i oczekiwań osób wykładających wiedzę z zakresu przedmiotów podstawowych i kierunkowych na temat programu matematyki, jego treści oraz umiejętności studentów koniecznych dla efektywnego studiowania na studiach licencjackich.

2. Refleksja nad matematyką w ujęciu standardów kształcenia

Przypatrzmy się standardom kształcenia w zakresie matematyki dla kierunku geodezja i kartografia (studia pierwszego stopnia). Czytamy, że absolwent tych studiów powinien posiąść podstawową wiedzę z zakresu matematyki, nauk przyrodniczych i technicznych oraz wiedzę specjalistyczną z obszaru geodezji i kartografii. Powinien umieć posługiwać się metodami matematycznymi w naukach o Ziemi - szczególnie w geodezji i kartografii, rozumieć sens matematycznego opisu zjawisk i procesów oraz być przygotowany do podjęcia studiów drugiego stopnia. Nie trudno zauważyć, że postulowane kompetencje studentów dotyczą obszaru matematyki traktowanej jako dziedzina wiedzy i jednocześnie jako biblioteki teoretycznych modeli oraz narzędzi rozwiązywania problemów.

Treści kształcenia w zakresie **Matematyki,** to kompilacja różnych fragmentów matematyki (w rozumieniu dziedziny wiedzy). W szczególności elementów: nauki o liczbach i strukturach matematycznych, algebry liniowej – rachunek wektorów i macierzy, układy równań liniowych, geometrii analitycznej – układy współrzędnych, opisy językiem współrzędnych prostych, płaszczyzn, krzywych i powierzchni drugiego stopnia, analizy matematycznej - rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej oraz wielu zmiennych, trygonometrii sferycznej, probabilistyki i statystyki matematycznej – zmienne losowe, wnioskowania statystyczne.

Nawet najbardziej przemyślany zestaw materiału czerpanego z tak wielu teorii matematycznych rodzi różnorakie komplikacje wykładu oraz ich studiowania przez osoby o bardzo zróżnicowanym przygotowaniu matematycznym. Dzieje się tak, bowiem każda z tych teorii (algebra, analiza, probabilistyka itd.) ma swoisty system pojęć, metod ich badania oraz język. „Przejście" od jednej do innej teorii, to zmiana rodzaju obiektów, języka, a także metod uzasadniania tez. Ta różnorodność problematyki, przy ograniczonej liczbie godzin zajęć oraz umiejętnościach studentów, jest źródłem trudności rozumienia pojęć i rozumowań.

Mieszanina teorii sprawia, że nie ma ani monografii, ani podręcznika akademickiego, który podane treści ujmuje zgodnie z formalno – logicznymi wymogami metodologii matematyki. Nie ma również książki, w której prezentowano by skoordynowany program matematyki i nauk o Ziemi. Skoordynowany, czyli nie zacierający różnic między aktywnością matematyczną a badaniem przyrodniczym.

W praktyce, dydaktyczna koncepcja wykładu matematyki jest oparta na tzw. lokalnych dedukcjach; wysepki dedukcyjne tworzą fragmenty kolejnych teorii matematycznych. Takie podejście sprzyja pomijaniu rozumowań i uzasadnień faktów oraz eksponowaniu podejścia mechanistycznego[8]. Dodatkowo, skromność bazy matematycznej oraz brak czasu nie pozwala na omawianie bardziej interesujących zastosowań teorii.

Warto jednocześnie podkreślić, że ramowy charakter standardów umożliwia tworzenie zróżnicowanych programów w zakresie treści, form kształcenia oraz kompetencji absolwentów. Jest więc naturalne, że poszczególne uczelnie nadają specyficzne rysy edukacji matematycznej. To zaś stwarza dobry klimat do dyskusji, prezentacji projektów oraz wymiany doświadczeń; taki też jest cel mojego opracowania.

Standardy kształcenia powinny być obudowane (opisanymi) standardami osiągnięć. Nie mam wątpliwości, że absolwent danego kierunku studiów powinien – w przypadku edukacji matematycznej – umieć uczyć się z wykorzystaniem różnych

[8] W mechanistycznym kształceniu matematykę traktuje się jako ustalony i gotowy zbiór faktów, reguł i algorytmów. Uczenie się sprowadza się do pamięciowego opanowania tych reguł oraz ich stosowania w typowych sytuacjach matematycznych.

źródeł informacji używających języka matematyki, posiąść wgląd w zastosowania matematyki głównie w studiowanej dziedzinie. W szczególności rozumieć sens matematycznego opisu zjawisk i procesów, umieć wykorzystywać modele matematyczne do odkrywania nowych rezultatów, ich interpretowania a także umieć wyznaczyć stopień niepewności efektu eksperymentu, czy wyniku pomiaru.

Negatywne skutki powoduje *polityka oszczędnościowa* - realizowana przez uczelnie - polegająca na utrzymaniu liczby godzin przewidzianych w standardach nauczania (w przypadku matematyki na kierunku geodezja i kartografia jest to 120 godzin). To wymusza realizowanie znacznej części zajęć w formie wykładów. Natomiast praktyka przekonuje, że uczenie się matematyki wymaga małych grup audytoryjnych umożliwiających wgląd w ten proces oraz monitorowania na bieżąco postępów osób uczących się. Ten postulat wzmacnia potrzeba uzupełniania zajęć o materiał umożliwiający im skuteczne studia. Mam na myśli nie tylko wiedzę o pojęciach[9], ale kształtowanie rozumienia metod oraz procedur stosowania matematyki.

3. Matematyka w świetle wypowiedzi wykładowców przedmiotów kierunkowych

Program studiów kierunku geodezja i kartografia obejmuje przedmioty podstawowe (fizykę, grafikę inżynierską oraz informatykę), kierunkowe (m.in. geodetykę, rachunek wyrównawczy, geodezji podstawową, satelitarną, inżynieryjną, kartografię), które wykorzystują matematykę w znaczącym stopniu, ale także przedmioty, które odwołują się do niej w stopniu minimalnym (np. podstawy prawa, BHP). Prowadzący zajęcia z matematyki nie mogą ignorować tych faktów. Muszą być świadomi, które treści programu matematyki są konieczne i przydatne we wspomnianych dziedzinach studiów a które można opracowywać w sposób poglądowy bądź podawać informacyjnie. Byłoby nieracjonalne, aby nie zasięgać w tych kwestiach zdania adresatów matematyki. Ich opinie muszą być ważnym elementem przy konstruowaniu optymalnego kursu matematyki.

Ten fragment opracowania poświęcam analizie wypowiedzi nauczycieli akademickich prowadzących zajęcia na kierunku geodezja i kartografia. Celem przeprowadzonego sondażu (w okresie listopad - grudzień 2010 roku) było poznanie ich opinii na temat:

a) *przydatności* materiału objętego standardami kształcenia w zakresie matematyki, w szczególności wskazania zagadnień, bez których nie można efektywnie realizować programu (nazywam je koniecznymi), bądź do których się odwołują (treści przydatne),
b) sposobu *opracowywania* treści, w szczególności wskazania, czy z ich punktu widzenia, jest wystarczające ujęcie: *formalno - logiczne* (skupione na analizie systemu pojęć wraz z ich definicjami, twierdzeń wraz z ich uzasadnieniami),

[9] W licznej grupie osób, które podjęły studia w roku 2009 oraz w roku 2010 na kierunku geodezja i kartografia w WSBiP jest tylko kilka osób, które w szkole średniej uczyły się matematyki wg programów na poziomie rozszerzonym. Wiadomo zaś, że kształcenie w zakresie podstawowym nie obejmuje nie tylko wielu treści dotyczących działań na liczbach (np. logarytmów) czy wiedzy o funkcjach, ale także podstawowych elementów metody matematycznej.

algorytmiczne, ze zwracaniem uwagi na algorytmy postępowań tworzone na podstawie definicji lub twierdzeń, bądź *aplikacyjne* eksponujące metody stosowania teorii oraz przykłady modelowania różnych sytuacji z użyciem modeli algebry liniowej, analizy matematycznej, probabilistyki itp.,

c) pożądanych *osiągnięć* studentów, czy wystarczy, aby studenci znali dane treści *informacyjnie, intuicyjnie i poglądowo* (potrafili pojęcia ilustrować przykładami, opisywać je odpowiednim językiem, schematycznie reprezentować je oraz ich własności za pomocą figur, wykresów, diagramów i formuł symbolicznych, korzystać z literatury), *rozumieli*[10] oraz potrafili je *stosować* bądź *sprawnie* operować pojęciami oraz *sprawnie* posługiwać się poznanymi systemami symbolicznymi (dla przykładu wymienimy rachunek algebraiczny, rachunek macierzowy, pochodnych),

d) semestru (pierwszy, drugi), w jakim te treści są potrzebne.

Odpowiedzi udzieliło jedenastu respondentów wykładających różne przedmioty, w tym podstawowe i kierunkowe. Tekst ankiety zawiera Załącznik 1.

A. Analiza ilościowa

W ankiecie, w każdym z wydzielonych fragmentów matematyki wyszczególniono listę zagadnień. Ankietowany określał, czy dane zagadnienie, z punktu widzenia wykładanej przez siebie dziedziny wiedzy, zawiera treści matematyczne przydatne, wskazywał pożądany sposób ujmowania tych treści oraz oczekiwane umiejętności studentów.

Matematyka jako przedmiot studiów jest realizowana na pierwszym roku studiów w obu semestrach. Taki układ zajęć jest w pełni aprobowany przez respondentów.

Dla liczbowej oceny przydatności treści wprowadzam *współczynnik przydatności treści* (wpt). Definiuję go jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie n jest liczbą wskazań treści jako przydatnych, zaś n – liczbą wszystkich możliwych wskazań tych treści przez osoby pytane. Współczynnik ten jest liczbą z przedziału [0, 1], którą wyrażam w procentach.

Nie jest zaskakujące, że w opinii respondentów matematyka jest potrzebna do efektywnego studiowania wykładanych przez nich przedmiotów. Dane liczbowe (Tabela 1) wskazują, że żadnego z obszarów matematyki (wymienionych w standardach) nie można pomijać, ale nawet program matematyki należy wzbogacić o treści, której standardy nie ujmują (elementy geometrii różniczkowej).

---

[10] Można wyróżnić następujące poziomy rozumienia: **receptywny** – dana osoba jest w stanie śledzić czyjeś wyjaśnienia, **reproduktywny** – gdy potrafi odtworzyć dane treści w sposób dosłowny bądź w nieco zmienionej formie (np. opowiedzieć własnymi słowami), **aplikacyjny** – gdy potrafi treści stosować w znanej mu, w nieco zmienionej bądź całkiem nowej sytuacji, **inspiracyjny** – gdy potrafi wykorzystywać materiał jako źródło inspiracji.

Tabela 1.Działy matematyki przydatne i konieczne przy studiowaniu przedmiotów wykładanych na kierunku geodezja i kartografia.

Dziedzina matematyki	Treści wskazywane, jako przydatne i konieczne	Treści wskazywane, jako konieczne
	Współczynnik przydatności treści (wpt) w procentach	
Algebra i geometria analityczna	67%	33%
Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej	57%	25%
Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych, teoria pola, równania różniczkowe	51%	14%
Probabilistyka i statystyka	45%	25%
Liczby i struktury algebraiczne	47%	17%
Geometria różniczkowa	**48%**	**35%**

Z praktyki wiadomo, że niektóre pojęcia i metody matematyki są niemal powszechnie wykorzystywane, zaś do innych jej użytkownicy odwołują się sporadycznie. Inny jest także oczekiwany poziom ich opanowania. Szczegółowych informacji na ten temat dostarcza Załącznik 2. Tabela wskazuje treści konieczne i przydatne przy studiowaniu przedmiotów kierunkowych z uwzględnieniem sposobu ich ujęcia oraz oczekiwanego poziomu opanowania.

Kierując się wartością współczynnika przydatności treści zagadnienia programowe dzielę na trzy poziomy. Pierwszy tworzą treści, które są niemal „powszechnie" przydatne, zaś najniższy – treści o ograniczonym zakresie przydatności. Ich zestawienie podają tabele 2 i 3. Między wskazanymi poziomami mieści się pozostały materiał.

Tabela 2. Zagadnienia wskazane przez respondentów, dla których współczynnik przydatności treści jest większy niż 60%.

Lp	Zagadnienie	wpt w %
1	Wyznaczniki	90
2	Układy współrzędnych	90
3	Rachunek pochodnych funkcji jednej zmiennej	88
4	Rozwiązywanie układów równań liniowych	81
5	Algebra macierzy	77
6	Twierdzenie Gaussa	75
7	Zastosowania pochodnych funkcji jednej zmiennej	63
8	Szereg Taylora	63
9	Zastosowania całek pojedynczych i krzywoliniowych	63
10	Elementy teorii pola	63

Tabela 3. Zagadnienia wskazane przez respondentów, dla których współczynnik przydatności treści jest nie większy niż 35%.

Lp	Zagadnienie	wpt w %
1	Funkcje uwikłane	20
2	Zastosowania rachunku pochodnych funkcji wielu	24
3	Struktury algebraiczne	25
4	Trygonometria sferyczna	30
5	Operacje na szeregach potęgowych	30
6	Przestrzeń probabilistyczna, prawdopodobieństwo	30
7	Rachunek granic ciągów	33
8	Równania różniczkowe I i II rzędu	34

B. Interpretacja wyników

1. Zgodnie z opinią nauczycieli - wykładowców, w toku zajęć z matematyki, należy eksponować elementy algebry liniowej, rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej, teorii pola, szereg Taylora oraz twierdzenie Gaussa wraz z przykładami zastosowań tych treści.

Wiedza z tego zakresu jest nieodzowna do prawidłowego organizowania, na bieżąco, kształcenia na kierunku geodezja i kartografia. Określam ją jako przydatną „doraźnie i aktualnie". Można jednak myśleć o rozwijaniu aktywności specyficznych dla posługiwania się matematyką[11]. Chodzi o umiejętności formalizowania informacji z użyciem języka matematyki, ich interpretowania, opisywania i badania sytuacji z użyciem metod matematyki. Te umiejętności – jako postulowane osiągnięcia studentów, powinny być elementem programu matematyki. Nie wystarczy zapoznać studentów z typowymi systemami symbolicznymi (przykładowo rachunkiem macierzy, pochodnych, czy całek), z regułami przekształcania wyrażeń, ale trzeba uczyć myśleć o wyrażonych nimi pojęciach abstrakcyjnych. Trzeba im uświadamiać, że choć pojęcia matematyczne (np. pochodna, wektor, macierz) są precyzyjne, to jednak w różnych dziedzinach matematyki – a tym bardziej w jej zastosowaniach – ich znaczenie może być nieco inne. Trzeba im pokazywać, że tak jest i z jakiego powodu tak się dzieje.

2. Dane liczbowe potwierdzają obserwacje wynoszone z zajęć z matematyki: przyswajanie przez studentów treści, które są konieczne i przydatne dla efektywnego studiowania przedmiotów kierunkowych jest bardzo kłopotliwe. Jednym z czynników mających w tej sferze istotne znaczenie ma fakt nie radzenia sobie z materiałem objętym programem szkoły średniej. Obserwowaliśmy systematyczne narastanie trudności uczenia się matematyki. Często ich źródłem – poza wiedzą merytoryczną – były braki w zakresie

[11] Analiza aktywności matematycznej oraz związki matematyki ze światem realnym pozwala myśleć o: **matematyce praktycznej**, potrzebnej do życia ogółu ludzi w cywilizowanym społeczeństwie, **matematyce stosowanej**, jako o bibliotece modeli i narzędzi formułowania oraz rozwiązywania problemów, **badaniach matematycznych**, związanych z badaniem pojęć, metod i problemów w różnych obszarach matematyki, **matematyce uniwersalnym wzorcu wiedzy,** wyrażającym ją w określonej, specyficznej formie.

umiejętności uczenia się, czytania tekstów typu matematycznego, a nawet technik organizowania rachunku oraz jego kontroli. Ich efektem było niejednokrotnie negatywne nastawienie do matematyki.

By eliminować braki oraz łagodzić nastawienia: a) wzbogacaliśmy zajęcia programowe (ćwiczenia i sporadycznie wykład) o wybrane zagadnienia szkolne; to w praktyce prowadziło do stałego pośpiechu przy opracowywaniu materiału kursowego oraz jego uszczuplania, b) zlecaliśmy do samodzielnego opracowania wybrane treści, wskazywaliśmy umiejętności, które studenci powinni nabyć oraz systematycznie je kontrolowaliśmy w toku ćwiczeń; jako pomoc studenci otrzymali zestaw materiałów dydaktycznych typu elektronicznego[12]. Niepełna skuteczność tych zabiegów nie oznacza, że nie należy poszukiwać dróg eliminowania braków w wiedzy, w umiejętnościach studentów oraz skutków edukacji matematycznej w szkole średniej.

3. Specjalną uwagę należy zwrócić na elementy geometrii różniczkowej. Są one bardzo przydatne, choć nie są objęte standardami kształcenia.
4. Wśród treści o względnej, dość znacznej „nieprzydatności" (wyraża je różnica 100% – wpt) mamy, m.in. rachunek granic ciągów, struktury algebraiczne (grupa, pierścień, ciało), równania różniczkowe oraz elementy prawdopodobieństwa. Ten fakt powinien znajdować odbicie w strukturze materiału programowego matematyki.
5. Pytanie o sugerowany sposób ujmowania treści matematyki przynosi – z pozoru – niespodziewane rezultaty. Żadne z podejść (to naturalne): *formalno - logiczne* (z akcentem na strukturę pojęć wraz z ich definicjami, twierdzeniami oraz uzasadnieniami), *algorytmiczne*, ze zwracaniem uwagi na algorytmy postępowań bądź *aplikacyjne*, eksponujące metody stosowania teorii (np. modele algebry liniowej, analizy matematycznej, probabilistyki) nie jest eliminowane przez wykładających przedmioty kierunkowe. Rozkład 471 wypowiedzi opowiadających się za ujęciem algorytmicznym, aplikacyjnym oraz formalno – logicznym wynosi 1 : 2 : 3,6. Wyraźny nacisk na formalne pojęcia i związki między nimi, a nieco słabiej odczuwana potrzeba teoretycznych zastosowań matematyki ma swoje racjonalne źródła. Każdy praktyk wie, że rozwiązanie teoretyczne zadania zastosowania matematyki [13], ogólne i ścisłe, musi spełniać dodatkowe wymagania, które są drugorzędne w rozważaniach czysto matematycznych. M.in. musi być ono rozwiązane nie tylko poprawnie, ale i współcześnie, ekonomicznie, w sposób dostępny dla obecnych technik obliczeniowych. Konstrukcję oraz dyskusję takiego eleganckiego matematycznie rozwiązania może sensownie przeprowadzić

[12] Materiały te obejmują następujące zagadnienia: zbiory, przekształcanie wyrażeń, równania i nierówności, potęgi i logarytmy, funkcje elementarne - argumenty, wartości, własności, odwracanie i składanie funkcji

[13] Zadanie zastosowanie matematyki, to problem (sytuacja zadaniowa), który pojawił się w sytuacji pozamatematycznej i którego tok rozwiązywania wymaga matematyzacji rozważanej sytuacji (ze względu na wybrane jej aspekty), prowadzącej do konstrukcji modelu teoretycznego tej sytuacji , dalej wnioskowania z tego opisu uważanego za hipotezę i kończącego się na interpretacji tych teoretycznych konkluzji w sytuacji wyjściowej.

specjalista znający problem. Od matematyka oczekuje on narzędzi (pojęć, metod), które mu to umożliwią.

Dość rzadko w wypowiedziach respondentów akcentuje się ujmowanie materiału w postaci schematów działania. Prawdopodobnie jest to konsekwencją wieloznacznego rozumienia terminu ujęcie algorytmiczne. Potocznie utożsamia się je z mechanicznym i pamięciowym opanowaniem typowych, gotowych algorytmów (np. rachunku całek). A chodzi o systemy operacji, które wystarczy wykonywać, aby skonstruować pojęcie lub posłużyć się nim.

6. Rozkład 474 wypowiedzi na temat oczekiwanego poziomu osiągnięć studentów (znać materiał informacyjnie i poglądowo, rozumieć go bądź w jego zakresie sprawnie działać) charakteryzuje proporcja 3,18 : 5,3 : 1. Sprawne operowanie wiedzą jest zatem najmniej pożądane (tylko 50 wskazań). Znajomość materiału, w konfrontacji z akcentowanym formalno – logicznym ujmowaniem treści sugeruje, że często ankietowani myślą o znajomości określeń oraz własności pojęć. Respondenci oczekują, że studenci będą rozumieli opracowywany materiał - przynajmniej - na poziomie reproduktywnym; potrafią pojęcia ilustrować przykładami, trafnie je opisywać oraz dostrzegać możliwości ich stosowania.

Z przeprowadzonego sondażu wynika jednoznaczny wniosek: kształcenie matematyczne będzie ułomne, gdy ustalając hierarchię materiału programowego matematyki, wybierając sposoby dydaktyczne jego ujmowania oraz kształtując systemy strategii heurystycznych rozwiązywania zadań będziemy pomijać opinie nauczycieli akademickich, realizujących przedmioty podstawowe i kierunkowe. Postulat ten wydaje się trywialnie oczywisty, jednak analiza programów przedmiotu matematyka oraz podręczników akademickich z matematyki dla .... pokazuje, że zazwyczaj kurs matematyki (we wspomnianych zakresach) nie uwzględniania specyfiki kierunku studiów.

4. Koncepcja edukacji matematycznej dla geodetów

Wypracowując koncepcję edukacji matematycznej wygodnie kierować się schematem, opisującym główne składowe procesu nauczania. Szukamy odpowiedzi na pytania:

- Czego uczyć ? Należy ustalić system celów kształcenia oraz treści nauczania w zestawieniu ze standardami kształcenia oraz charakterystyką sylwetki absolwenta.
- Kogo uczyć? Konfrontujemy rzeczywiste umiejętności studentów z tymi, które powinni nabyć.
- Jak uczyć? Dobieramy takie postępowanie dydaktyczne wraz z obudową metodyczną, które jest najbardziej korzystne dla wyzwalania pożądanych aktywności matematycznych (wypracowujemy tzw. dydaktyczną filozofię matematyki dla geodetów).
- Jakie zakładamy efekty? Należy zakreślić konieczne efekty nauczania, osiągnięcia studentów oraz sposoby diagnozowania rezultatów kształcenia.

4.1. Dobór celów, dobór treści

W literaturze dydaktycznej spotyka się wiele konstrukcji układów celów nauczania matematyki; zazwyczaj ujmuje się je w sposób hierarchiczny. Na poziomie najwyższym mamy cele ogólne; są to umiejętności i postawy potrzebne współczesnemu człowiekowi, niezależnie od dziedziny jego działalności; na poziomie drugim - umiejętności i postawy specyficzne dla działalności matematycznej, i wreszcie na najniższym - wiadomości i umiejętności określone wprost programem nauczania.

Analiza specyfiki studiów geodezyjnych, miejsca matematyki w ich systemie oraz matematyki (jako dziedziny wiedzy, użytecznego narzędzia, bądź dziedziny działalności ludzi) pokazuje, że kształcenie matematyczne powinno być ukierunkowywane na (cele ogólne):

- doskonalenie umiejętności uczenia się z wykorzystaniem źródeł używających języka matematyki (książek, programów komputerowych itp.),
- rozwijanie umiejętności matematyzowania problemów typu przyrodniczego,
- kształtowanie aktywnej postawy wobec zadań sformułowanych z użyciem pojęć i języka matematyki.

Kształcenie matematyczne powinno prowadzić do nabywania umiejętności (cele aktywności matematycznej): **analizowania** informacji (wyszukiwania informacji istotnych, pobocznych, dotyczących określonego tematu itp.), **algorytmicznego** jej ujmowania oraz **pozyskiwania** potrzebnej informacji szczególnej z ogólnych reguł (np. z definicji); **formalizowania** informacji z użyciem języka matematyki oraz **odtwarzania** w języku wybranej dziedziny sformalizowanej informacji; **schematyzowania** sytuacji realnych oraz **doboru i doskonalenia** modelu teoretycznego; **posługiwania** się podstawowymi technikami heurystycznymi przy rozwiązywaniu zadań. Rozwijanie tych umiejętności powinno się „odbywać" na bazie treści określonych standardami nauczania w zakresie matematyki z uwzględnieniem wniosków wynikających z sondażu ankietowego. Dopełniając tę strukturę materiału oczekiwanymi umiejętnościami studentów otrzymamy system celów najniższego poziomu.

Zazwyczaj akademickie programy nauczania przedmiotów, w tym matematyki (co potwierdza internetowa kwerenda) utożsamia się z zestawem tematów zajęć. Nawet najlepiej ułożone treści przedmiotu, które są nauczane formalnie, dogmatycznie, na zbyt abstrakcyjnym poziomie nie będą „działać" zgodnie z celami, ani nie będą kształcące. Stąd waga wskazanych kierunków działań ważnych dla edukacji matematycznej geodetów.

Standardy kształcenia narzucają dobór treści nauczania; obszerność „obowiązkowej" tematyki przy ograniczonej liczbie zajęć wymusza potrzebę racjonalnej redukcji jej zakresu. Biorąc pod uwagę wnioski z badania ankietowego, możemy wyróżnić materiał o „krańcowo" różnej wadze dla kształcenia geodetów. Bardziej poglądowo, informacyjnie opracowujemy zagadnienia dotyczące struktur algebraicznych, rachunku granic ciągów, operacji na szeregach potęgowych, zastosowań rachunku pochodnych funkcji wielu zmiennych (ekstrema), równań różniczkowych I i II rzędu, elementów probabilistyki oraz trygonometrii sferycznej. Znacząco większe znaczenie nadajemy elementom algebry wyższej, rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej, geometrii różniczkowej oraz teorii pola.

Wszystkie hasła programowe, łącznie ze wskazanymi wyżej, ukierunkowujemy na rozwijanie umiejętności posługiwania się wiedzą, modelowania stosunków wielkościowych oraz ujmowania pojęć i ich własności w sposób czynnościowy (cele specyficzne aktywności matematycznej). W ten sposób ułatwimy studentom studiowanie oraz przygotujemy ich do dobrego funkcjonowania na rynku pracy.

4.2. Kompetencje studentów

Ważnym elementem, który należy brać pod uwagę przy wypracowywaniu koncepcji edukacji matematycznej jest realna wiedza i umiejętności studentów nabyte w szkole średniej. Jak już pisałem, osoby (z nielicznymi wyjątkami) podejmujące studia na kierunku geodezja i kartografia kończyły szkoły, z programem matematyki w zakresie podstawowym. Można spodziewać się (i tak jest), że dla nich są obce zagadnienia dotyczące potęg o wykładniku rzeczywistym, logarytmów, badania i sporządzania oraz interpretacji wykresów funkcji elementarnych, funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej (wykresy, równania), granic ciągów i funkcji, pochodnych, prawdopodobieństw (warunkowego, całkowitego, schematu Bernoullego).

Zajęcia kursowe pokazują, że wielu z nich nie potrafi (w stopniu umożliwiającym niekłopotliwe studiowanie): samodzielnie uczyć się z wykorzystaniem monografii matematycznej, przetwarzać informacje zapisane symbolicznie, wyrażać je w języku naturalnym, analizować gotowe rozwiązania (rozumowania) przykładów i przenosić metodę postępowania na sytuacje analogiczne, posługiwać się definicjami i twierdzeniami. Te braki utrudniają także realizację przedmiotów kierunkowych.

4.3. Koncepcja dydaktyczna przedmiotu

Matematykę można rozumieć, uprawiać, a nawet - do pewnego stopnia - stosować w dwu istotnie różnych płaszczyznach, struktur głębokich lub powierzchniowych (Skemp 1982). Działać w płaszczyźnie struktur powierzchniowych - znaczy używać symboli matematycznych (cyfr, liter, wykresów itp.) w celu wyprodukowania pewnych zapisów (równań, wykresów) jako odpowiedzi na dany problem. Działać w płaszczyźnie struktur głębokich - znaczy posługiwać się pojęciami matematycznymi i związkami między nimi w celu znalezienia odpowiedzi na pytania dotyczące tych pojęć lub badania sytuacji realnych. Na krótką metę dla uzyskiwania przyzwoitych wyników na egzaminach (na zajęciach) mniejszego wysiłku wymaga opanowanie podejścia w strukturach powierzchniowych.

4.3.1. Kształtowanie obrazów pojęć

Działania w płaszczyźnie głębokiej wymagają solidnego opracowywania pojęć. Nie tyle ważne jest określenie pojęcia, znajomość i rozumienie jego własności, co wytworzenie w myśli studenta obrazu danego pojęcia.

Terminem *obraz (koncepcja) pojęcia posiadany przez osobę* określamy strukturę poznawczą[14] zawierającą skojarzenia i wyobrażenia myślowe, intuicje[15] wiążące się z danym pojęciem, elementy formalne, w tym jego własności, związki z innymi pojęciami, schematy i techniki operowania nim, elementy języka (graficznego, symbolicznego, słownego) związane z pojęciem oraz sytuacje zadaniowe, w których ono wykorzystujemy. Pewne elementy obrazu mogą być nieuświadomione, a nawet pozostawać w sprzeczności ze sobą. Możemy przyjąć, z wystarczającym dla naszych rozważań uproszczeniem, że u danej osoby wytworzył się obraz pojęcia matematycznego, gdy osoba ta rozumie je tak dobrze, że potrafi je sensownie wykorzystywać w rozmaitych sytuacjach zadaniowych oraz w rozumowaniach.

Dobre funkcjonowanie w zakresie matematyki wymaga umiejętnego odwołania się do obrazu pojęcia, a nie operowania jego formalnym określeniem. Klasycznym przykładem jest pojęcie wyznacznika; posługując się nim nie odwołujemy się do jego definicji z użyciem, np. pojęcia permutacji, inwersji (zob. T. Trajdos, 1993, s. 35), ale jego własności i sposobów doprowadzania do postaci „trójkątnej". Zwykle w podręcznikach akademickich eksponuje się definicje, twierdzenia oraz związki wyznacznika z innymi pojęciami. Działania te nie prowadzą do wytworzenia jego obrazu, ale tylko sieci pojęciowej teorii.

Również w praktyce nauczania nie przywiązuje się wagi do zabiegów dydaktycznych sprzyjających kształtowaniu obrazów pojęć. Przechodzi się do porządku dziennego nad tak istotnymi, z tego punktu widzenia, kwestiami, jak specyfika dobieranych przykładów poprzedzających, konkretyzujących bądź wzbogacających omawiane zagadnienie (ważna jest ich liczba, stopień trudności i uszczegółowienia, poziom elementaryzacji i formalizacji), wyznaczane im miejsce i funkcje w procesie konstrukcji pojęcia (np. rola ilustracyjna, motywacyjna, aplikacyjna, ekspozycja genezy pojęcia i metody), tworzone reguły postępowania (formalne, czynnościowe, typu algorytmicznego itp.), rozwiązywane zadania (np. czysto matematyczne czy osadzone w rzeczywistości), drogi dochodzenia do ich rozwiązań, formy zapisu rozumowań itp.

Nie ma wątpliwości, że kształtujemy w myśli studenta zupełnie inne pojęcie pochodnej funkcji (zrozumienie, czym jest pochodna), gdy wybieramy serie przykładów ukierunkowanych wprost na jej definicję (zaczynamy od przyrostów funkcji, potem tworzymy ilorazy różnicowe i wyznaczamy ich granice), aniżeli gdy wychodzimy od możliwych zastosowań pojęcia (rozpatrujemy chwilowe zmiany - prędkość, wzrost), od wyznaczania przeciętnego współczynnika skali (The School ... 1967), bądź od interpretacji geometrycznych (styczna, liniowe przybliżanie funkcji w otoczeniu punktu), a także inne, gdy punktem wyjścia jest badanie własności specjalnego rodzaju operatora liniowego. I choć, w kolejnym etapie, dążymy do wiązania wszystkich interpretacji, to jednak pierwotnie wybrany kontekst oraz narzucone skojarzenia mają niebagatelny wpływ na ukształtowanie się obrazu pojęcia oraz posługiwanie się nim.

[14] Struktura poznawcza, to mówiąc skrótowo system informacji wewnętrznych zakodowanych w pamięci człowieka; informacje te obejmują indywidualne doświadczenie osoby wraz z wytworzoną samodzielnie wiedzą, dzięki twórczemu myśleniu oraz wiedzę o środowisku zewnętrznym.

[15] Intuicje, to formy wiedzy zrozumiałe same przez się, których głównymi cechami są oczywistość oraz całościowe postrzeganie.

4.3.2. Orientacja na zastosowania

W toku studiów uczący spotykają się wielokrotnie z różnymi aspektami stosowania matematyki, teoriami, przykładami zastosowań, z zadaniami na zastosowanie. Obserwacja praktyki pokazuje, że to nie wystarcza, aby opanować umiejętność wykorzystywania zdobytej wiedzy matematycznej do prawidłowego rozumienia zjawisk i procesów przyrodniczych. Istota kształcenia nie leży w zaznajamianiu się z przykładami „gotowych" teorii, w stadium już po matematyzacji, ale w zamierzonym wprowadzaniu studentów w aktywności matematyczne zespolone z procesem stosowania matematyki.

Matematyka jest stosowana w sytuacjach pozamatematycznych w specyficzny sposób. Jest to kompilacja różnego typu rozumowań, specyficznych heurystyk, podejść; niektóre z nich mają - jak mówimy - charakter racjonalny, inne zaś formalny. Popatrzmy:

Przypuśćmy, że Z jest pewnym problemem osadzonym w sytuacji realnej S (np. dotyczącym mierzenia powierzchni, prognozy przebiegu pewnego zjawiska). Przy jego rozpatrywaniu chcemy posłużyć się matematyką. W tym celu przeprowadzamy specyficzne rozumowanie, które obejmuje badanie sytuacji S i zagadnienia Z (**faza eksploracji**), by wydzielić obiekty, wielkości, parametry, układy relacji, które mogą być ważne, dostępne, mierzalne i wreszcie, by postawić serie pytań, zadań, na które faktycznie zamierzamy szukać odpowiedzi.

Z kolei opisujemy językiem matematyki wydzielone wielkości i relacje (etap **matematyzacji**); ten opis, tzw. **model matematyczny** problemu Z osadzonego w sytuacji S, może mieć postać wzoru, układu równań, aksjomatyki sytuacji itp., a przy tym uwzględnia jedynie te atrybuty sytuacji, które wiążą się z wydzielonym pytaniem (zadaniem).

Następnie wnioskując z tego opisu (**etap badania modelu**) jako hipotezy otrzymujemy formalny **rezultat** wyrażony językiem matematyki. Wynik ten, po jego interpretacji w języku sytuacji S daje **rozwiązanie** R_0 wyjściowego problemu. A priori nie wiemy, czy rozwiązanie R_0 jest praktycznie realne, spełniające nasze oczekiwania, zatem niezbędna jest jego **weryfikacja** w sytuacji S. Jeśli spełni ona warunki, jakie stawialiśmy, wówczas otrzymamy ostateczne rozwiązanie R, które finalizuje badanie zagadnienia Z środkami matematyki.

Opisane rozumowanie wskazuje na różne funkcje, jakie pełni matematyka w procesie jej stosowania. Z punktu widzenia tego, który ją stosuje, w fazie matematyzacji pierwszoplanową rolę odgrywa język matematyki - użyteczne narzędzie umożliwiające opis zmiennych, atrybutów i relacji w sposób nadający się do teoretycznych badań a także jest ona biblioteką „gotowych" modeli abstrakcyjnych (pojęć, metod), które mogą charakteryzować analizowaną sytuację. W etapie dedukcji wykorzystuje on matematykę jako dziedzinę wiedzy o specyficznej metodologii, która dostarcza środków operowania obiektami abstrakcyjnymi, algorytmami itp. Wynik badania modelu jest warunkiem zdaniowym sformułowanym w języku matematyki, zatem w fazie konkretyzacji niezbędny jest jego przekład na język wyjściowej sytuacji. Zatem, ponownie matematyka występuje w roli języka.

4.3.3. Matematyka a kształcenie zawodowe

Zarówno wymogi kształtowania pojęć jak i specyfika modelowania matematycznego wskazują, że wypracowując koncepcję edukacji matematycznej należy poszukiwać innych niż tradycyjny sposób realizowania zajęć z matematyki. Nie chodzi tu o znajomość twierdzeń i wzorów, lecz tego, co kryje się pod pojęciem kultury matematycznej – czym matematyka, jak ją stosować i dlaczego bez matematyki nie można uprawiać nauki i funkcjonować zawodowo. „Upraktycznianie" teoretycznych metod algebry liniowej czy analizy matematycznej podejmowane przez matematyków jako niespecjalistów w danych zakresach jest skazane na niepowodzenie; rozważane przykłady zastosowań są z reguły sztuczne, ułomne.

Widzę dwie możliwości dostosowywania nauczania matematyki do specyfiki studiów i współczesnych realiów.

1. „Zbliżenie" wykładu matematyki do innego, uznawanego za ważny, przedmiotu studiów. Oba kursy planujemy tak, aby tworzyły spójną całość; matematyk czerpie od przyrodnika przykłady, problemy z zarysowanymi kierunkami ich analizy, bada je z wykorzystaniem teorii, przyrodnik interpretuje teoretyczne rozwiązanie (model) w sytuacji realnej. Korzystne warunki zbliżenia stwarza kształcenie on-line w oparciu o odpowiednio przygotowane materiały dydaktyczne.
2. Szerokie zastosowanie komputera. Powszechne wykorzystywanie technologii informacyjnej w praktyce geodezyjnej powinno rodzić zmiany w kształceniu matematycznym. Należy sobie odpowiedzieć „jak" uczyć z wykorzystaniem matematycznych programów edukacyjnych, „jaką" koncepcję przedmiotu wybrać, aby dostosować nauczanie matematyki do potrzeb i celów, które uważamy za najważniejsze.

W toku zajęć należałoby eksponować te fragmenty matematyki, które czynią z niej język opisu rzeczywistości, jako biblioteki modeli i metod ich analizy pozostawiając obliczenia komputerowi i wysokiej klasy specjalistom. Lektura podręczników akademickich i zbiorów zadań pokazuje, że wiele czasu poświęca się (niemal mechanicznemu) opanowaniu algorytmów obliczania wyznaczników, wyznaczaniu macierzy odwrotnej do danej, poszukiwaniu rozwiązań układów równań liniowych, konstruowaniu wykresów funkcji, rachunkowi pochodnych, całek nieoznaczonych itd. Sensowne wydaje się wykorzystywanie komputera do wykonywania tych rachunków w podobny sposób jak posługujemy się arkuszem kalkulacyjnym.

Widzę w tym przypadku trójmodułowy tok pracy. Zajęcia zaczynamy w sali wykładowej (ćwiczeniowej), gdzie zarysowujemy teoretyczne podstawy wiedzy, eksponujemy elementy obrazów pojęć oraz możliwości ich zastosowań. Dalsza część pracy jest w laboratorium komputerowym. Zajęcia projektujemy tak, by sprzyjały analizie przykładów zastosowań teorii oraz wykonywaniu obliczeń wg wypracowanych algorytmów rachunkowych. Po pracy w laboratorium spotykamy się w sali, gdzie poddajemy krytycznej ocenie wyniki weryfikacji modelu oraz dalej rozwijamy teorię.

4.3.4. Materiały dydaktyczne on-line

Pakiet dydaktyczny z matematyki dla kierunku geodezja i kartografia obejmuje wykłady (60 godzin), ćwiczenia (90 godzin) oraz materiały do nauczania on-line. Materiały te nie tylko dopełniają i wzbogacają tematykę wykładów i ćwiczeń, ale przede wszystkim umożliwiają nabywanie określonych umiejętności studentów.

Rozważmy przykładowo fragment kursu poświęconego elementom algebry liniowej. Każde zagadnienie programowe (patrz punkt 4.3.1) jest ujmowane na trzech poziomach: poglądowym, formalnym i zastosowań..

Ujęcie poglądowe zaczyna się od prezentacji zadań typu paradygmatycznego (objaśniającego ogólną metodę postępowania w konkretnej sytuacji), prowadzących do układu dwóch (trzech) równań liniowych o dwóch (trzech) niewiadomych:

Można kupić zestaw MINI, który zawiera trzy torebki herbat zapachowych i dwie czarnych liściastych w cenie 14 *zł albo zestaw MAKSI zawierający* 10 *torebek herbat zapachowych i* 6 *czarnych liściastych w cenie* 36 *zł. Reklama informuje, że w zestawie MAKSI każda torebka herbaty jest tańsza o* 0,5zł *niż w zestawie MINI. Czy rzeczywiście tak jest? Jakie założenia przyjęto, skoro sytuację z zadania opisuje układ równań:* $3x + 2y = 14$ i $10x + 6y = 44$?

Wieloaspektowa analiza tego zadania oraz układu równań (metodami znanymi studentom ze szkoły średniej) prowadzi do:

a) zapisu macierzowego układu z użyciem wektora cen, wektora towarów, ich mnożenia,
b) charakterystyki macierzy współczynników oraz jej wyznacznika,
c) poszukiwania rozwiązań układu ukierunkowanego na metodą eliminacji Gaussa,
d) wyróżnienia niektórych własności wyznaczników; one - po uogólnieniu - dadzą układ aksjomatów definicji aksjomatycznej wyznacznika,
e) poszukiwania macierzy odwrotnej do danej i wykorzystania jej przy rozwiązywaniu danego układu równań.

Celem tych zabiegów jest wytworzenie bazy intuicyjnej dla kluczowych pojęć algebry oraz ich zastosowań. W tak prezentowanej koncepcji matematyki, wstępnie zarysowane pojęcia nie są „gotowym" obiektami statycznymi, ale są zespolone z procesem ich tworzenia, z procedurami posługiwania się nimi w konkretnych sytuacjach.

Można oczywiście patrzeć na ujęcie poglądowe materiału jako na stratę czasu. Bardzo ważne jest pokazać studentom jak można analizować daną konkretnie sytuację (wyszukiwać informacje istotne, poboczne, jakie stawiać pytania, jak uogólniać metodę itp.), jak formułować ogólne reguły na tle przykładów, tworzyć język nowej dziedziny, dobierać i doskonalić model teoretyczny, czy posługiwać się heurystykami przy rozwiązywaniu zadań. Nie bez znaczenia jest postrzeganie nowych pojęć poprzez pryzmat wiedzy szkolnej uczących się.

Zupełnie inne funkcje dydaktyczne pełni **teoretyczne ujęcie** materiału (poziom formalny). Tym razem ważne są definicje, miejsce pojęcia w układzie innych pojęć i twierdzeń oraz uzasadnienia wyrażane językiem teorii. W szczególności zajmujemy się podstawami rachunku macierzowego, aksjomatyczną definicją wyznacznika, rozwiązywaniem układów równań liniowych z wykorzystaniem wzorów Cramera, „metodą" macierzy odwrotnej oraz eliminacji Gaussa. Tworzymy język teorii.

I wreszcie część poświęcona **zastosowaniom teorii**. Są tu zadania typowe zastosowania teorii, przykłady służące nabywaniu sprawności posługiwania się nią, formułowaniu schematów działania prowadzących do rozwiązywania konkretnych zadań, służące wywodzeniu informacji z ogólnych reguł (określeń, twierdzeń), posługiwaniu się narzędziami technologii informacyjnej.

Tak projektowane materiały są nakierowane na wyzwalanie aktywności matematycznej studentów. To rodzaje aktywności określają koncepcję wykładanej matematyki, takie a nie inne podejście do niej.

5. Zakończenie

Tematyka związana z poszukiwaniem najbardziej efektywnych form kształcenia matematycznego na studiach zawodowych (doboru treści, sposobów ich ujmowania, efektów studiów) jest zaliczana do podstawowych problemów dydaktyki matematyki. Zajmowanie się tą problematyką wymusza również - z jednej strony - mocno zróżnicowane przygotowanie matematyczne osób studiujących wynoszone ze szkoły średniej, a z drugiej, możliwości wykorzystywania technologii informacyjnych w edukacji.

Tradycyjne podejście do nauczania matematyki (klasyczny wykład, typowe ćwiczenia) wymaga od studenta dużego wysiłku intelektualnego, nie oferując mu w zamian żadnych praktycznie korzyści. W efekcie postrzega on matematykę jako przedmiot, który jest mało przydatny, a w dodatku trudny. Jak to zmienić?

Studenci powinni korzystać z laboratoriów komputerowych, bo tylko w ten sposób jesteśmy w stanie pokazywać im rzeczywiste, a nie tylko stricte teoretyczne - matematyczne, łatwe do analizy problemy. Należy dostarczać studentom materiały dydaktyczne, dostosowane do studiowanej przez nich dziedziny, sprzyjające wiązaniu edukacji matematycznej z edukacją zawodową, umożliwiające rozwijanie tych umiejętności, które uważamy za najważniejsze.

Jak przekonuje przeprowadzony sondaż oraz obserwacje wynoszone z zajęć, nie jest obojętne dla wykładowców oraz studentów kierunku geodezja i kartografia jaka koncepcja matematyki jest realizowana w toku studiów. Chcą oni widzieć matematykę, jako bibliotekę modeli oraz użyteczne narzędzie rozwiązywania problemów.

Warto pytać, czy i w jakim zakresie zarysowane w artykule podejście do edukacji matematycznej, odmienne w swym charakterze od nauczania ukształtowanego przez tradycję, styl podręczników akademickich oraz system typowych umiejętności nie prowadzi do zatracenia tego, co istotne dla matematyki (w jej klasycznym rozumieniu). Odpowiadam, opisana koncepcja edukacji w swym założeniu nie jest konkurencyjna dla „tradycyjnej" matematyki, lecz ma ją wzbogacić po to, aby pełniej odpowiadała współczesnym poglądom na matematykę.

Streszczenie

Celem opracowania jest charakterystyka koncepcji edukacji matematycznej na kierunku geodezja i kartografia, na przykładzie kształcenia WSBiP w Ostrowcu Świętokrzyskim.

W grudniu 2010r. przeprowadzono badania sondażowe; ich celem było zebranie opinii, sugestii i oczekiwań osób wykładających przedmioty podstawowe i kierunkowe na temat programu matematyki, jego treści oraz umiejętności studentów koniecznych dla efektywnego studiowania.

Analizę jakościową i ilościową wypowiedzi respondentów prowadzono w zakresie przydatności materiału z zakresu matematyki, oczekiwanego sposobu jego opracowania (formalno – logiczny , aplikacyjny, algorytmiczny), pożądanych osiągnięć studentów (rozumienie i sprawne operowanie pojęciami, umiejętnościami ich stosowania w sytuacjach spoza matematyki, sprawne posługiwanie się systemami symbolicznymi – rachunek algebraiczny, macierzowy, pochodny).

W efekcie badań wydzielono te zagadnienia, dla których współczynnik przydatności jest większy niż 60%, oraz mniejszy niż 35%. Uzasadniono, że podejście aplikacyjne nakierowane na kształtowanie obrazów pojęć spełnia potrzeby oraz oczekiwania studentów i wykładowców. Wnioski z badań wykorzystano przy konstrukcji kursu matematyki typu on – line.

Słowa kluczowe:
Geodezja i kartografia; edukacja matematyczna; standardy kształcenia matematycznego; Treści przydatne; koncepcja dydaktyczna.

Abstract:

The purpose of this paper is characteristic of the concept of mathematical education in geodesy and cartography on the example of training in WSBiP in Ostrowiec Świętokrzyski.

In December 2010 surveys were carried out; their aim was to gather opinions, suggestions and expectations of people teaching foundational and directional core subject on the program of mathematics, its content as well as students' skills necessary for effective studying.

Qualitative and quantitative analysis of expression of the respondents was conducted in the usability of the material in the field of mathematics, the expected pattern of its development (formal – logical, application, algorithmic), the desired students' achievement (understanding an efficient handling of concepts, skills, their use in situations outside mathematics, efficient use of symbolic systems – matrix algebra, differential calculus tc).

As a result, the studies allowed to separate these issues, for which the ratio of usefulness is greater than 60% and less than 35%. It was justified that the application approach oriented t image concepts meet the needs and expectations of students and faculty educators. The conclusions of the studies used in the construction of an on – line math course.

Keywords:

Geodesy and cartography, mathematical education, mathematical education standards, the useful contents, the concept of teaching.

Literatura

1. Jurlewicz T., Skoczyłas Z.: 2003, *Algebra liniowa 1*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.
2. Łoś J.: 1965, *Matematyka stosowana, czy zastosowania matematyki.* Wiadomości Matematyczne VIII/1965.
3. Misiek J.: 2004, *Genetyczna koncepcja matematyki.* Dydaktyka Matematyki nr 27/2004.
4. Ostoja – Ostaszewski A.: 1996, *Matematyce w ekonomii, cz. 1. Algebra elementarna.* PWN, Warszawa.
5. Skemp R.: 1982, *Communicating Mathematics: Surface Structures and Deep Structures*. Visible Language, no 16/1982.
6. Smoluk A.:2000, *Dwa programy i jedna uwaga.* Dydaktyka Matematyki nr 1/ 2000.
7. *Standardy kształcenia dla kierunku studiów: geodezja i kartografia.* Dziennik Ustaw nr 169, zał. Nr 36.
8. *The School Mathematics Project* : 1967, Cambridge University Press.
9. Trajdos T.: 1993, *Matematyka.* cz. III, WNT, Warszawa.
10. Treffers A.: 1986, *Three dimensions.* Reidel, Dordrecht.
11. Treliński G.: 1982, *Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki.* Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Załącznik 1.

Ankieta

Kształcenie matematyczne

studentów kierunku *Geodezja i Kartografia* (studia I stopnia)

Dziś wiemy, że znacząca większość osób podejmujących studia na kierunku geodezja i kartografia w WSBiP kończy szkołę średnią o mocno okrojonym programie nauczania matematyki (nauczanie w zakresie podstawowym). Program ten pomija zagadnienia związane z:

- pojęciem wartości bezwzględnej (własności, równania i nierówności),
- potęgami o wykładniku rzeczywistym (własności, funkcje wykładnicze, równania),
- logarytmami (własności, funkcje logarytmiczne, równania),
- funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej (wykresy, równania),
- nauką o granicach ciągów i funkcji,
- nauką o pochodnej funkcji,
- prawdopodobieństwem (warunkowe, całkowite, schemat Bernoullego),
- elementami statystyki, wnioskowaniami statystycznymi,
- badaniem i sporządzaniem oraz interpretacją wykresów funkcji typu $y = f(x+a) + b$; $y = a + b\, f(kx)$, gdy mamy dany wykres funkcji $y = f(x)$.

Oznacza to, iż wielu studentów (rozpoczynając studia) nie zna tych treści, a ich opracowywanie następuje dopiero w toku zajęć z matematyki.

Pracując ze studentami przekonuję się, że wielu z nich nie potrafi (w stopniu umożliwiającym niekłopotliwe studiowanie):

- samodzielnie uczyć się z wykorzystaniem różnych źródeł informacji (szczególnie książek używających języka matematyki),
- analizować, formalizować informacje z użyciem języka symbolicznego oraz odtwarzać w języku naturalnym informacje zapisane symbolicznie, uzyskiwać potrzebne informacje z ogólnych reguł,
- wykonywać obliczenia numeryczne oraz przekształcać wyrażenia,
- logicznie argumentować, oceniać argumenty, formułować wnioski na podstawie przykładów, posługiwać się definicjami i twierdzeniami.

Braki w zakresie tych umiejętności rodzą poważne trudności przy realizacji programu matematyki; konieczność dopełniania bieżących zajęć treściami służącymi uzupełnianiu luk (kształceniu potrzebnych umiejętności) prowadzi do stałego pośpiechu przy wprowadzaniu nowego materiału tym bardziej, że zlecanie ich do samodzielnego opracowania nie przynosi oczekiwanych skutków.

Zwracam się do Pana(i) z prośbą o wypełnienie zamieszczonej ankiety. Proszę o wskazanie w każdym wierszu tabeli tej kategorii, które zdaniem Pana(i) najlepiej odpowiada potrzebom dziedziny/ przedmiotu, którą Pan(i) wykłada.

Zapisy programowe wydrukowane w kolumnie 1 pogrubioną czcionka zostały zaczerpnięte wprost z obowiązujących standardów kształcenia (tzw. minimum programowego) dla kierunku geodezja i kartografia (studia I stopnia).

Zebrane opinie i propozycje ułatwią konstrukcję programu edukacji matematycznej w sposób zachowujący specyfikę metodologiczną matematyki, w odpowiednim układzie oraz uwzględniający właściwą hierarchię treści, skoordynowanych z kształceniem kierunkowym.

Dziękuję za życzliwe potraktowanie prośby, przepraszam za kłopot związany z wypełnianiem tak obszernej ankiety.

Zagadnienia programowe (pojęcia, metody, algorytmy, umiejętności)	**Treści**			**Ujęcie**			**Semestr**			**Wystarczający stopień opanowania**			
	konieczne	**przydatne**	**nieprzydatne**	**aplikacyjne**	**ogólne -formalne**	**algorytmiczne**	**pierwszy**	**drugi**		**poglądowy**	**wie, rozumie**	**umie stosować**	**sprawnie działa**
Struktury algebraiczne													
grupa													
ciało													
liczby zespolone, działania													
postać trygonometryczna liczby													
Przestrzenie wektorowe													
algebra wektorów													
niezależność wektorów													
baza i wymiar przestrzeni													
zastosowania rachunku wektorowego													
Przekształcenia liniowe													
macierz przekształcenia liniowego													
algebra macierzy													
wyznaczniki, własności													
przekształcenia elementarne macierzy													
rząd macierzy													
odwracanie macierzy													
równania macierzowe													
Układy równań liniowych													

rozwiązywanie układów. cramerowskich													
rozwiązywanie układów dowolnych													
Elementy geometrii analitycznej													
układy współrzędnych - kartezjański, walcowy, sferyczny													
iloczyn skalarny													
iloczyn wektorowy, mieszany													
proste													
płaszczyzny													
stożkowe – krzywe stopnia II													
kwadryki powierzchnie stopnia II													
elementy trygonometrii sferycznej.													
Liczby rzeczywiste													
potęgi o wykładniku rzeczywistym													
pierwiastki													
logarytmy													
logarytmy naturalne													
obliczenia z użyciem logarytmów													
Funkcje													
własności, składanie, odwracanie													
funkcje kwadratowe													
funkcje wykładnicze													
funkcje logarytmiczne													
funkcje trygonometryczne													
funkcje cyklometryczne													
konstruowanie wykresów funkcji													
odczytywanie własności z wykresów													
Ciągi liczbowe													
podstawowe własności													
granica ciągu													
granice niewłaściwe													

rachunek granic ciągów													
Granica i ciągłość funkcji													
granica funkcji w punkcie													
granica funkcji w nieskończoności													
granice niewłaściwe													
rachunek granic													
asymptoty													
ciągłość funkcji													
własności funkcji ciągłych													
przybliżone rozwiązywanie równań													
Pochodne funkcji jednej zmiennej													
rachunek pochodnych													
pochodne wyższych rzędów													
wzór Taylora, Maclaurina													
badanie zachowania f. danej wzorem													
zastosowania geometryczne poch.													
konstruowanie wykresów funkcji													
Pochodne funkcji dwóch zmiennych													
pochodne cząstkowe													
pochodne kierunkowe													
rachunek pochodnych													
gradient funkcji													
różniczka													
wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych													
ekstrema funkcji dwóch zmiennych													
zastosowania pochodnych funkcji 2 zmiennych													
funkcja uwikłana													
pochodna funkcji uwikłanej													
Szeregi													
szereg liczbowy													

kryteria zbieżności													
szereg potęgowy													
szereg Taylora													
Całka funkcji jednej zmiennej													
całka nieoznaczona													
rachunek całek													
całka oznaczona Riemanna													
zastosowania całki oznaczonej													
różniczkowanie szeregu potęgowego													
całkowanie szeregu potęgowego													

Całki													
całki niewłaściwe													
całki wielokrotne													
całki krzywoliniowe													
zastosowania całek													
Elementy teorii pola													
elementy teorii pola													
twierdzenie Greena													
całki powierzchniowe													
rotacja i jej zastosowania													
twierdzenie Stokesa													
twierdzenie Gaussa													
Równania różniczkowe zwyczajne													
sytuacje prowadzące do równań. różn.													
równania rzędu pierwszego – rozw. ogólne													
zagadnienie Cauchy'ego.													
równania. różn. rzędu II (stałe współ.)													

Prawdopodobieństwo													
przestrzeń probabilistyczna,													
prawdopodobieństwo warunkowe													
niezależność zdarzeń													
prawdopodobieństwo całkowite													
Zmienne losowe													
zmienne losowe jednowymiarowe													
typowe rozkłady zmiennych losowych													
parametry zmiennych losowych													
wektory losowe													
macierz kowariancji													
Wnioskowania statystyczne													
estymatory - ich własności i metody uzyskiwania													
estymacja punktowa													
estymacja przedziałowa													
Materiał wykraczający poza standardy kształcenia													
Geometria różniczkowa													
krzywe, łuki													
krzywizna krzywej													
trójścian Freneta													
geodetyki													
odwzorowania geodezyjne													
Dodatkowe zagadnienia													

Załącznik 2.

Treści matematyczne konieczne lub przydatne przy studiowaniu przedmiotów kierunkowych z uwzględnieniem sposobu ich ujęcia oraz oczekiwanego poziomu ich opanowania.

Objaśnienia: a-a ujęcie aplikacyjno – algorytmiczne, f – ujęcie formalne, poziom opanowania: p – poglądowy, w-r - wie i rozumie, s – sprawnie działa, treści konieczne lub przydatne k- p.

Dział matematyki	**Zagadnienie**	**Treści k-p**	**Ujęcie treści**		**Oczekiwany poziom opanowania treści**		
		wpt	**a-a**	**f**	**p**	**w-r**	**s**
			Liczba wskazań[16]				
	Liczby rzeczywiste i działania	47%	17/55	11/55	10/55	15/55	2/55
Algebra	Wyznaczniki	90%	6/10	1/10	1/10	6/10	2/10
	Rozwiązywanie równań liniowych	81%	8/16	3/16	3/16	8/16	2/16
	Algebra macierzy	77%	22/48	5/48	5/48	22/48	5/48
	Iloczyny: skalarny, mieszany, wektorowy	56%	6/16	4/16	2/16	4/16	4/16
	Rachunek wektorów	47	6/32	13/32	9/32	7/32	3/32
	Struktury algebraiczne	25	7/32	3/32	5/32	5/32	0
Geometria	Układy współrzędnych	90	3/10	4/10	2/10	6/10	2/10
	Proste, płaszczyzny	50	5/22	6/22	2/22	7/22	2/22
	Stożkowe, kwadryki	38	5/16	3/16	3/16	3/16	2/16
	Trygonometria sferyczna	30	2/10	1/10	0	1/10	1/10
Funkcje elementarne	Trygonometryczne, cyklometryczne	59	10/22	2/22	6/22	6/22	3/22
	liniowe, kwadratowe	60	4/10	2/10	2/10	5/10	0
	wykładnicze, logarytmiczne	55	7/20	4/20	4/20	7/20	0
	Własności ogólne	50	2/10	3/10	1/10	4/10	0
	Wykresy funkcji	45	5/22	3/22	2/22	6/22	0
Ciągi liczbowe	Własności ogólne	38	0	4/16	2/16	2/16	0
	Granice, rachunek granic ciągów	33	3/24	8/24	4/24	7/24	0
Ciągłe granica funkcji	Granica funkcji, rachunek granic	50	4/32	16/32	9/32	11/32	0
	Własności ciągłości	50	0	10/32	6/32	4/32	0
	Przybliżone rozwiązywanie równań	50	1/8	3/8	3/8	2/8	0
Pochodne funkcji jednej	Rachunek pochodnych	88	7/16	4/16	2/16	9/16	3/16
	Wzór Taylora	63	3/8	1/8	1/8	3/8	1/8
	Zastosowania pochodnych	63	9/24	2/24	3/24	10/24	2/24
Pochodne funkcji wielu zmiennych	Rachunek pochodnych	50	12/40	11/40	9/40	9/40	5/40
	Różniczki	50	3/8	1/8	1/8	2/8	1/8
	Wzór Taylora	25	3/8	0	1/8	1/8	1/8
	Zastosowania rach. pochodnych	24	4/16	2/16	2/16	2/16	2/16
	Funkcje uwikłane	20	2/20	4/20	2/20	4/20	0
Szeregi	Taylora	63	2/8	3/8	3/8	1/8	1/8
	Potęgowe	40	1/10	4/10	3/10	1/10	1/10
	Liczbowe	35	0	9/20	5/20	4/20	0
	Operacje na szeregach potęgowych	30	2/20	6/20	5/20	3/20	0
Całki	Zastosowania całki pojedynczej	63	4/8	1/8	2/8	2/8	1/8
	Zastosowania całek krzywoliniowych	63	1/8	4/8	3/8	2/8	0
	Rachunek całek pojedynczych	56	7/16	3/16	4/16	4/16	2/16

[16] Liczba wskazań (symbol m/n), to para, której n - informuje o ilości wskazań danego zagadnienia, zań m o ilości opinii, które mogły być wyrażone.

	Całka Riemanna	50	2/8	3/8	2/8	2/8	1/8
	Wielokrotne, krzywoliniowe	40	2/20	8/20	6/20	4/20	0
Teoria pola	Tw. Gaussa	75	2/8	4/8	2/8	3/8	1/8
	Elementy teorii pola	63	0	5/8	2/8	3/8	0
	Tw. Stoksa	50	0	4/8	3/8	1/8	0
	Tw. Greena	38	0	3/8	2/8	1/8	0
	Równania różniczkowe I i II rzędu	34	0	15/40	11/40	4/40	0
Probabilistyka i statystyka	Wnioskowania statystyczne	50	6/24	3/24	0	12/24	0
	Zmienne losowe, rozkłady, parametry, macierz kowariancji	45	5/40	10/40	0	17/40	0
	Przestrzeń probabilistyczna, prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite	30	4/40	9/40	1/40	12/40	0
Geometria różniczkowe	Odwzorowania geodezyjne	63	2/8	3/8	1/8	3/8	0
	Krzywe, łuki, krzywizna	50	4/16	4/16	2/16	4/16	0
	Trójścian Freneta, geodetyki	38	4/16	3/16	0	4/16	0