Lubiszewski, Dawid

Złożoność wokół nas : część pierwsza : gra w chaos = Complexity is around us : part one : the chaos game

Avant 1/1, 257-271

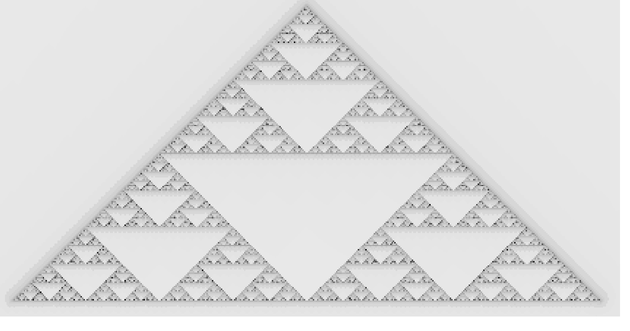
2010

Złożoność wokół nas. Część pierwsza: gra w chaos

Dawid Lubiszewski

Złożone zjawiska – takie jak struktury czy procesy – interesują naukowców na całym świecie. Z wielu powodów, dla których złożoność jest tak bardzo popularnym przedmiotem badań, pozwolę sobie wymienić zaledwie trzy. Pierwszym jest fakt, z pozoru banalny, że żyjemy w złożonym świecie. Lecz złożoność nie ogranicza się jedynie do naszego otoczenia: my sami możemy nazwać siebie prawdopodobnie najbardziej złożonymi jednostkami istniejącymi w świecie; zawdzięczamy to oczywiście naszemu mózgowi, który składa się z miliardów neuronów tworzących jeszcze więcej połączeń między sobą. Zatem zrozumienie złożonych zjawisk może ułatwić nam lepsze poznanie nas samych. Z drugiej strony złożoność jest ciekawym przedmiotem badań, ponieważ zaskakuje naukowców i to przynajmniej na dwa sposoby. Pierwszy jest związany z samym momentem odkrycia czegoś nowego, jak na przykład struktur przypominających swoim zachowaniem proste organizmy żywe w słynnym automacie komórkowym Johna Hortona Conwaya nazwanym gra w życie (Gardner 1970). W tym przypadku pojawienie się złożonych struktur zaskoczyło badaczy, o czym świadczy okrzyk wydany przez jednego z naukowców: *Podejdźcie tutaj! Tu coś się rusza!* (tłum. własne (Berkelamp i inni 1982), za: (Ilachinski 2001)). Jednakże zaskoczenie nie ogranicza się do nieprzewidzenia przez naukowca czegoś, co może nastąpić w wyniku danego eksperymentu. Z drugiej bowiem strony złożoność zaskakuje, gdyż nieprzewidywalność jakiegoś zjawiska stanowi jego cechę.

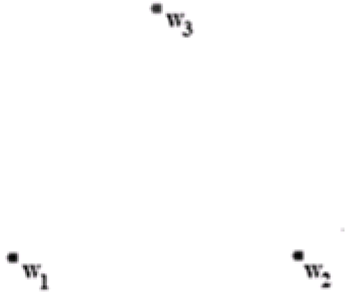
Ma to miejsce w niektórych układach złożonych i znane jest pod nazwą efektu motyla, oznaczającego wysoką podatność na gwałtowne zmiany w układzie w wyniku niewielkich zmian warunków początkowych (Smith 2007). Oznacza to, że jeśli nie dysponujemy pełnymi danymi na temat układu, nasze przewidywania na temat jego zachowania będą się różnić, a w niektórych przypadkach różnica ta będzie tak drastyczna, że przewidywania nasze nie będą nic warte. Ostatni, ale nie mniej ważny powód, dla którego warto zainteresować się złożonością, to fakt, że naukowcy w drodze doskonalenia swoich dociekań nad tymi zjawiskami musieli stworzyć nowy język. Mówią nam oni o fraktalach, stygmergii, samoorganizacji, emergencji i wielu innych zjawiskach. Ów nowy język pozwala czasami w dość prosty sposób opisać coś bardzo złożonego – co również jest zaskakujące. Mając na uwadze powyższe, chciałbym przedstawić w tym wprowadzającym artykule jeden z przykładów złożoności strukturalnej, gdzie złożone wzorce geometryczne wyłaniają się na skutek stosowania prostych reguł algorytmu, znanego jako gra w chaos. Niniejszy tekst ma stanowić jedynie zachętę do dalszego i bardziej zaawansowanego badania złożonych zjawisk i problemów, jakie są z nimi związane.



Rysunek 1: Trójkąt Sierpińskiego otrzymany za pomocą programu Fractal Explorer 2.02.

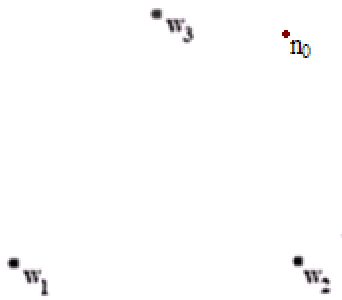
Swoją nazwę gra w chaos otrzymała od brytyjskiego matematyka Michaela Barnsleya (1988) w latach osiemdziesiątych, który użył jej na określenie metody tworzenia obrazów, głównie fraktali. Prostota tej metody jest zaskakująca, gdyż nie wymaga ona zaawansowanej wiedzy matematycznej ani rozwiniętych zdolności plastycznych, a do uzyskania na przykład rysunku fraktala, jakim jest trójkąt Sierpińskiego (rysunek 1), wystarczy zaledwie kartka papieru, ołówek, sześcienna kość do gry oraz trochę wolnego czasu (Peitgen, Jürgens i Saupe 2004). Sposób uzyskania trójkąta Sierpińskiego na kartce papieru opisany został poniżej.

Pierwszym krokiem jest narysowanie trzech punktów na kartce, które przypominają wierzchołki trójkąta równobocznego. Każdy z tych punktów został nazwany odpowiednio: w_1, w_2 i w_3 (rysunek 2).



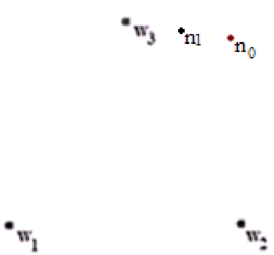
Rysunek 2: Pierwsze trzy punkty.

Kolejnym krokiem jest narysowanie kolejnego punktu w dowolnym miejscu na planszy – patrz: rysunek 3. Jest to tak zwany punkt wiodący. W przeciwieństwie do pierwszych trzech punktów, które są "stałe", punkty wiodące będą zmieniać położenie w każdym kolejnym ruchu, chociaż pozostawiać będą po sobie ślad w postaci kropki. Pierwszy z takich punktów nazwany został n_0.



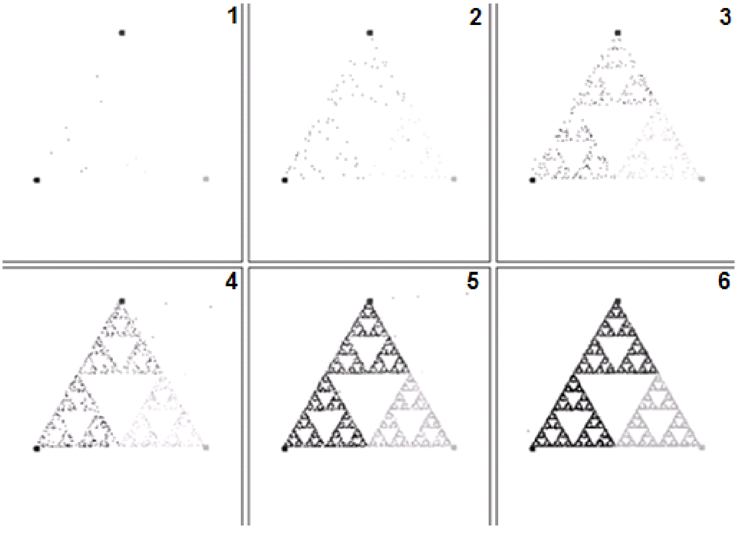
Rysunek 3: Punkt wiodący n_0.

W każdej kolejnej turze rzuca się kostką i przeprowadza następujące kroki. Jeśli wypadnie 1 lub 2, to kolejny punkt wiodący (n_1) będzie umieszczony dokładnie w połowie odległości, jaką dzieli punkt w_1 a n_0; jeśli zaś wyrzucone zostanie 3 lub 4, to nowy punkt wiodący będzie pomiędzy w_2 a n_0; natomiast jeśli wyrzucone zostanie 5 lub 6, to będzie on pomiędzy w_3 a n_0. Ostatnia z możliwości została przedstawiona na rysunku 4.



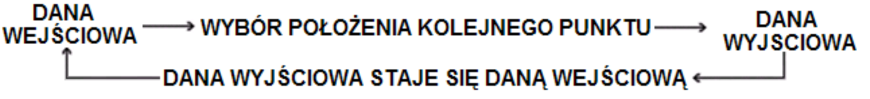
Rysunek 4: Nowy punkt wiodący w przypadku wyrzucenia 5 lub 6.

Po tym, jak narysowany zostanie nowy punkt wiodący, należy wybrać kolejny taki punkt wiodący za pomocą rzutu kostką. Całą procedurę należy powtórzyć aż do momentu uzyskania interesującego nas obrazu. Jak łatwo zauważyć, rysowanie fraktala za pomocą tej metody nie jest skomplikowane, ale jednak nudne i długotrwałe. Dlatego dużo prościej jest posłużyć się programem komputerowym, który będzie za nas wybierał losowo kolejne punkty wiodące i przedstawiał uzyskany obraz na ekranie komputera. Na kolejnym rysunku (patrz rysunek 5) przedstawiona została właśnie praca takiego programu w różnych odcinkach czasowych, czyli w turach (jedna tura to narysowanie jednego punktu wiodącego). Pierwszy rysunek przedstawia otrzymany obraz po dziesięciu, drugi po 100, trzeci po 500, czwarty po 1000, piąty po 5000, zaś ostatni po 10000 turach. Niezależnie od którego miejsca rozpoczniemy naszą przygodę, czyli w którym miejscu narysujemy pierwszy punkt wiodący (n_0), to i tak za każdym razem otrzymamy ten sam obraz: trójkąt Sierpińskiego.



Rysunek 5: Obraz uzyskany za pomocą programu komputerowego dostępnego pod adresem internetowym http://www.shodor.org/interactivate/activities/TheChaosGame (data dostępu 15 październik 2010).

Pomimo iż mowa jest o grze, to w rzeczywistości nie ma w niej zwycięzców ani przegranych, gdyż nie ma w niej graczy. W tym sensie grą jest tylko z nazwy. Zaś jej mechanizm jest bardzo prosty: to proces kolejnych iteracji, czyli ciągłe powtarzanie tych samych instrukcji, gdzie wynik końcowy jednej operacji staje się daną początkową dla kolejnej. Tak więc istotną rolę odgrywa tutaj sprzężenie zwrotne, które działa w ten sposób, że jeden punkt wiodący (będący informacją wejściową) wpływa na położenie kolejnego nowego punktu wiodącego (będącego informacją wyjściową), zaś ten staje się daną wejściową dla kolejnego punktu (patrz rysunek 6).



Rysunek 6: Sprzężenie zwrotne w grze w chaos.

Zatem jest to, jak widać, bardzo prosta metoda. Obraz powstaje na skutek kolejnych iteracji, które wykonuje się tak długo, dopóki pożądany obraz nie zostanie wygenerowany. Gra w chaos jest przykładem systemu funkcji iterowanych (z ang. *iterated function system*, w skrócie IFS),

Rysunek 7: Paproć Barnsleya wygenerowana za pomocą systemu funkcji iterowanych w programie Fractal Explorer 2.02.

za pomocą którego konstruuje się między innymi fraktale. W matematyce terminu tego używa się także na określenie samej metody konstrukcji figur geometrycznych. Odkryta przez Barnsleya metoda znalazła zastosowanie w przemyśle komputerowym, głównie w problematyce kompresji danych graficznych. Jednakże samo nazwisko Barnsleya kojarzy się nie tyle z systemem funkcji iterowanych w ogóle, ile ze szczególnym przypadkiem gry w chaos, czyli paproci Barnsleya (patrz rysunek 7).

Paproć Barnsleya jest fraktalem znanym ze względu na uderzające podobieństwo do liści paproci występujących w przyrodzie. Jest to przykład złożonego obiektu, który może być opisany za pomocą prostego systemu funkcji iterowanych (Barnsley 1988). Gra w chaos nie jest jedynie zabawką użyteczną przy tworzeniu wymyślnych grafik komputerowych, ale jest również interesującym studium przypadku w dyskusjach nad istotą przyrody. Można tu zadać pytanie, czy symulacje komputerowe w pełni oddają istotę odtwarzanych przez nie procesów zachodzących w przyrodzie – czy też jest to jeden z nielicznych przypadków, kiedy to za pomocą programów komputerowych udaje się w łatwy sposób naśladować naturę. To zaś prowadzi do kolejnego zagadnienia, czy natura również idzie „na skróty" i korzysta z takich rozwiązań. Innymi słowy: czy podstawy naszego świata zapisane są językiem matematyki? Czy może język matematyki, symulacje komputerowe są tylko jednymi z możliwych sposobów opisu otaczającej nas rzeczywistości? Sposobu bardzo trafnego, bo w niemal identyczny sposób naśladującego naturę. To z kolei wiedzie nas do pytania, czy poznajemy ostateczne tajemnice naszego świata, czy jedynie wskazujemy na możliwe mechanizmy leżące u jego podstaw. Wprowadzający ton tego artykułu wskazuje jedynie na niektóre z możliwych sposobów dalszego badania złożonych zjawisk. Postawione zaś na końcu pytania otwierają drogę do dalszej dyskusji.

Literatura

1. Barnsley, M. 1988. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press, Inc.
2. Gardner, M. 1970. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'life'. *Scientifc American* 223: 120-123.
3. Ilachinski, A. 2001. *Cellular Automata. A Discrete Universe.* Singapur: World Scientific: 135.
4. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D. 2004. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Second Edition.* Dordrecht: Springer-Verlag New York Inc.: 35.
5. Smith, L.A. 2007. Chaos. A Very Short Introduction, New York: Oxford University Press Inc.: 1-2.

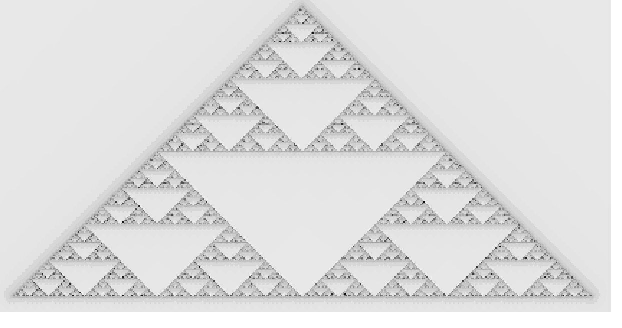
Complexity is around us. Part one: the chaos game

Dawid Lubiszewski

Complex phenomena – like structures or processes – are intriguing scientists around the world. There are many reasons why complexity is a popular topic of research but I am going to describe just three of them. The first one seems to be very simple and says “we live in a complex world”. However complex phenomena not only exist in our environment but also inside us. Probably due to our brain with millions of neurons and many more neuronal connections we are the most complex things in the universe. Therefore by understanding complex phenomena we can better understand ourselves. On the other hand studying complexity can be very interesting because it surprises scientists at least in two ways. The first way is connected with the moment of discovery. When scientists find something new e.g. life-like patterns in John Conway’s famous cellular automata The Game of Life (Gardner 1970) they find it surprising: *In Conway's own words, When we first tracked the R-pentamino... some guy suddenly said "Come over here, there's a piece that's walking!" We came over and found the figure...*(Ilachinski 2001). However the phenomenon of surprise is not only restricted to scientists who study something new. Complexity can be surprising due to its chaotic nature. It is a well known phenomenon, but restricted to a special class of complex systems and it is called the butterfly effect. It happens when changing minor details in the system has major impacts on its behavior (Smith 2007). This means that if we do not have a complete knowledge about the system then our prediction can vary and in some cases this prediction can be totally useless. The last but not least complexity is worth studying because in order to deal with it the scientists create a new language. They talk about fractals, stigmergy, self-organization, emergence and other phenomena. This new language sometimes allows us to describe something very complex in a very simple way and this is also surprising.

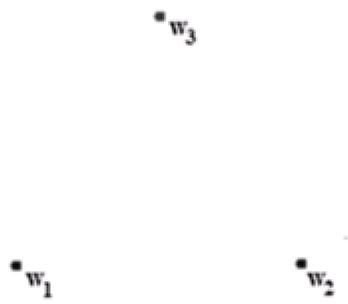
Having that all in mind I would like to focus in this introductory article on one example of complexity, that is structural complexity where complex geometrical patterns appear as the result of the simple rules of an algorithm – known as the chaos game. Therefore the aim of this paper is an invitation to more advanced research on complexity.

The chaos game is an algorithm invented in the eighties by British mathematician Michael Barnsley (1988) and has been used to create graphics of fractals and other figures. The simplicity of this method is surprising because in order to create such a beautiful fractal as the Sierpinski triangle (picture 1) the knowledge of higher mathematics or graphic abilities is not important. What you need is a sheet of paper, pencil, dice and some spare time (Peitgen, Jürgens and Saupe 2004). The algorithm to create a Sierpinski triangle is described below.



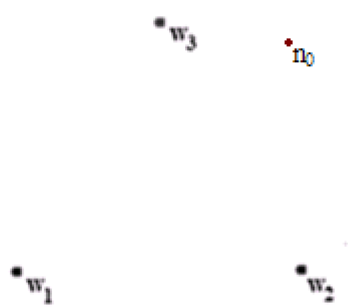
Picture 1: Sierpinski triangle created in Fractal Explorer 2.02.

The first step is to draw three points on the paper, which looks like the apexes of a regular triangle. Each point is named as followed: w_1, w_2 and w_3 (picture 2).



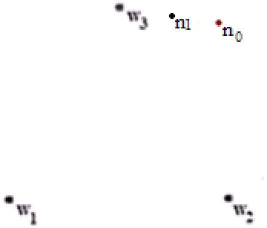
Picture 2: First three points.

In the next step one has to choose the next point n_0 at random and draw it on the paper. It is the “leading” point. In contrast to the first three points, which are stable, this one is going to move but after every move it will leave a trace – a small dot on the paper (picture 3).



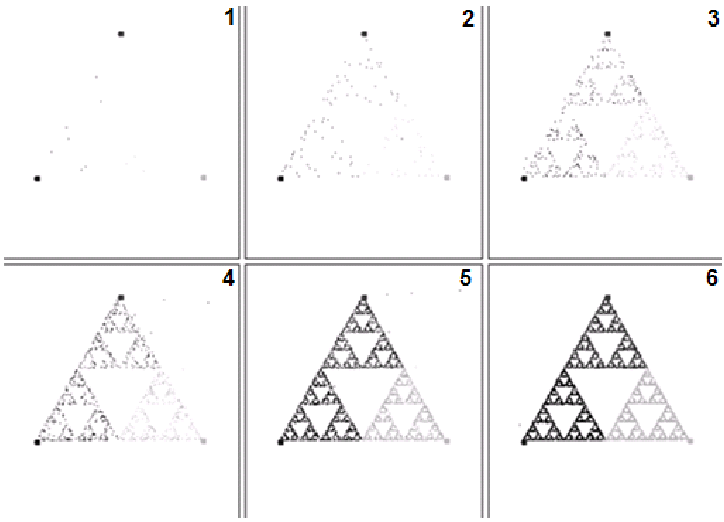
Picture 3: Leading point n_0.

From now at each turn one has to throw a dice and do the following steps. If one tossed 1 or 2 the next leading point (n_1) will be exactly in the midway between n_0 and w_1. In the case of 3 or 4 the next point will be midway between w_2 and n_0. In the last case, that is 5 or 6 the new point will be midway between w_3 and n_0. The last situation is pictured below (picture 4).



Picture 4: The new leading point (n1) in case of 5 or 6.

After drawing the next point one has to throw a dice again to choose the new point. The whole procedure has to be repeated until an interesting picture appears. Therefore drawing a fractal using this method is not a complicated procedure. However it is very boring and takes a lot of time. Consequently it is much easier to use a computer program randomly choose the next point and project the final picture on the screen. In the next picture (picture 5) are shown the results of a work done by computer program in different time steps (in each time step one leading point is chosen). The first picture shows the points drawn after ten steps, the second after a hundred steps, the third after 500, the next after 1000, the following after 5000 and the last after 10000 time steps. It does not matter where one places the first point (n_0) the final picture is going to be the same - the Sierpinski triangle.



Picture 1: Pictures generated by computer program in different time steps. The program is available on the following page http://www.shodor.org/interactivate/activities/TheChaosGame (date of access 15.10.2010).

The chaos game is not really a game. There are no winners, losers and most of all any players. "Game" is just in the name. The mechanism of this algorithm is very simple: it is the process of continuous iteration. In the other words it repeats the same instruction over time, where the output of one calculation becomes the input for another. That means that feedback plays a crucial role in the chaos game, where one leading point n_1 (input) influences the position of the next leading point n_2 (output), which in turn affects the position of another leading point, that is n_2 becomes a input (picture 6).

Picture 6: Feedback in chaos game.

It has been shown that the chaos game is a very simple method to create fractal images. The picture is drawn as the result of following iterations. Therefore the chaos game is an example of an iterated function system (IFS) which is used to create images e.g. fractals. In mathematical terms the chaos game refers in general to the method of constructing geometric figures. The IFS method discovered by Barnsley has been used in computer science in the area of graphic compression. Barnsley (1988) is famous because one of his IFS algorithms creates an image of fern which looks like the Black Spleenwort (picture 7). The image is a fractal and it has been named after Barnsley so it is called the Barnsley Fern and is very popular not only among scientists.

Picture 2: Barnsley fern generated by IFS in Fractal Explorer 2.02.

The chaos game is not only a useful tool to create impressive computer graphics but also is an intriguing case study in debates about the nature of the world. Are the computer simulations telling us something about the nature? Are they really mimicking the process or just showing one possible way to do it? Does nature use the same short path and similar methods? This leads to another question: is mathematics a language of nature? Or maybe mathematics and computer simulations just show one of the possible descriptions of the universe? Are we really revealing the mysteries of nature or only pointing at possible solutions? This introduction shows one of the possible ways of studying complex phenomena and questions which open the door for further discussion.

Bibliography

1. Barnsley, M. 1988. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press, Inc.
2. Gardner, M. 1970. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'life'. *Scientifc American* 223: 120-123.
3. Ilachinski, A. 2001. *Cellular Automata. A Discrete Universe.* Singapur: World Scientific: 135.
4. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D. 2004. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Second Edition.*, Dordrecht: Springer-Verlag New York Inc.: 35.
5. Smith, L.A. 2007. Chaos. A Very Short Introduction, New York: Oxford University Press Inc.: 1-2.