Waldemar Cieślak, Halina Felińska, Paweł Wlaź

Zastosowanie wielomianów w starym zagadnieniu Ponceleta

Edukacja - Technika - Informatyka nr 1(23), 52-59

2018

© Wydawnictwo UR 2018
ISSN 2080-9069
ISSN 2450-9221 online

„Edukacja – Technika – Informatyka" nr 1/23/2018
www.eti.rzeszow.pl
DOI: 10.15584/eti.2018.1.5

WALDEMAR CIEŚLAK[1], **HALINA FELIŃSKA**[2], **PAWEŁ WLAŹ**[3]

Zastosowanie wielomianów w starym zagadnieniu Ponceleta

Application of Polynomials in the Old Problem of Poncelet

[1] Doktor habilitowany profesor PL, Politechnika Lubelska, Katedra Matematyki Stosowanej, Polska
[2] Doktor, Politechnika Lubelska, Katedra Metod i Technik Nauczania, Polska
[3] Doktor, Politechnika Lubelska, Katedra Matematyki Stosowanej, Polska

Streszczenie

W pracy stawiamy hipotezę związaną z postacią wzorów Fussa. Hipotezę weryfikujemy dla przypadków $n = 3, 4, 5, 6$. Wzory Fussa nie są znane w jawnej postaci dla dowolnego n, więc hipotezy tej w obecnej chwili udowodnić nie można.

Słowa kluczowe: poryzm Ponceleta, wzory Fussa

Abstract

In this paper we state a new hypothesis on the shape of the Fuss formulas. We verify the hypothesis for $n = 3, 4, 5, 6$. The Fuss formulas are not known for all n in explicit form, therefore the hypothesis cannot be proved at the moment.

Keywords: the Poncelet porism, the Fuss formulas

Wstęp

Rozważmy pierścień kołowy CD utworzony przez dwa okręgi C i D, gdzie okrąg C jest zawarty we wnętrzu obszaru ograniczonego przez D.

Przeprowadźmy następującą konstrukcję. Z dowolnie wybranego punktu $P_0 \in D$ prowadzimy styczną do C. Punkt przecięcia tej stycznej z D oznaczmy przez P_1. Następnie z P_1 prowadzimy drugą styczną do C i przez P_2 oznaczamy punkt jej przecięcia z D, itd. W ten sposób otrzymujemy ciąg punktów $P_0, P_1, P_2, ...$, które są wierzchołkami tzw. łamanej Ponceleta.

Może się zdarzyć, że istnieje liczba naturalna n taka, że $P_n = P_0$. Wtedy łamaną nazywamy zamkniętą, a n-kąt, który jest opisany na okręgu C i wpisany w okrąg D, będziemy nazywać n-kątem wpisano-opisanym.

Przypomnijmy (Bos, 1987) następujące twierdzenie Ponceleta o zamknięciu.

Twierdzenie 1. *Dany jest pierścień kołowy. Jeżeli na okręgu zewnętrznym istnieje punkt początkowy, dla którego łamana Ponceleta o* n *bokach jest zamknięta, to będzie ona zamknięta dla każdego punktu początkowego.*

Przyjmijmy następującą definicję.

Definicja 1. Pierścieniem Ponceleta *nazywamy pierścień kołowy, w którym zachodzi twierdzenie Ponceleta o zamknięciu.*

Scharakteryzujmy, zgodnie z (Cieślak, 2016) następujące znaczenie słowa „poryzm". Poryzm oznacza, że jeśli pewna własność zachodzi w jednym punkcie danego zbioru, to zachodzi w każdym punkcie tego zbioru.

Pojęcie poryzmu Ponceleta oznacza więc, że jeśli w jakimś pierścieniu kołowym istnieje n-kąt wpisano-opisany, to jest on elementem całej rodziny wpisano-opisanych n-kątów w tym pierścieniu.

Rozważmy pierścień kołowy utworzony przez dwa okręgi:

$$C: x^2 + y^2 = r^2$$

oraz

$$D: (x-a)^2 + y^2 = R^2,$$

gdzie $0 < a < R - r$.

W roku 1792 szwajcarski matematyk Fuss (1792) podał wzory ustalające związek pomiędzy promieniami okręgów tworzących pierścień kołowy i odległością pomiędzy ich środkami w poryzmie Ponceleta dla $n = 4, 5, 6, 7, 8$. Wzór dla $n = 3$ podał Euler. Są to wzory postaci:

$$n = 3: \qquad a^2 = R^2 - 2rR,$$

$$n = 4: \qquad (R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2),$$

$$n = 5: \qquad r(R-a) = (R+a)\left(\sqrt{(R-r+a)(R-r-a)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{2R(R-r-a)}\right),$$

$$n = 6: \qquad 3(R^2 - a^2)^4 = 4r^2(R^2 + a^2)(R^2 - a^2)^2 + 16a^2r^4R^2.$$

Powyższe wzory zostały podane przez J. Steinera (1827; Weisstein, 2017) w 1827 r. W dalszej części pracy wzory wiążące R, r i a będziemy nazywać wzorami Fussa. Są one znane w jawnej postaci dla niewielu wartości n. Nowe wzory Fussa zostały podane w (Radić, 2010).

Metodę uzyskiwania wzorów Fussa przedstawiono w pracy (Cieślak, 2008). Nie jest ona zbyt praktyczna. Jednakże metoda ta pokazuje, że we wzorach Fussa występują tylko funkcje elementarne.

Otwierając stronę internetową (Weisstein, 2017), modyfikowaną co pewien czas, możemy obejrzeć dynamiczną ilustrację graficzną poryzmu Ponceleta. Wartość dydaktyczną poryzmu podkreśla fakt, że słownictwo ograniczone jest tylko do takich pojęć szkolnych, jak okrąg, styczna do okręgu, łamana. Twierdzenie Ponceleta wypowiedziane jest w języku wymienionych pojęć, jest więc zrozumiałe dla każdego ucznia. Poryzm liczy sobie ok. 200 lat. Mimo upływu tak długiego czasu istnieje nierozwiązany do dnia dzisiejszego problem, któremu poświęcona jest ta praca. Problem ten dotyczy postaci wzorów Fussa.

Warto podkreślić, że w literaturze mamy wzór wiążący omówione wyżej wielkości R, r, a oraz n, który zachodzi, gdy w pierścieniu kołowym istnieje n-kąt będący wielokątem Ponceleta. Wzór ten został podany przez Jacobiego w XIX w. Jednak wzór Jacobiego jest niezrozumiały dla osób nieobeznanych z funkcjami specjalnymi, które nie są standardowo wykładane na studiach matematycznych.

Autorzy chcieliby z jednej strony zapoznać czytelników z elementarnie wypowiedzianym zagadnieniem zapoczątkowanym przez Ponceleta, z drugiej zaś pokazać, że istnieją w matematyce problemy, które są zrozumiałe dla uczniów i mogą stanowić dla nich inspiracje do własnych poszukiwań.

Hipoteza

Rozpatrzmy poryzm Ponceleta w przypadku $n = 3$. W tym przypadku wzór wiążący r, R i a mający postać:

$$a^2 = R^2 - 2Rr,$$

często nazywany jest wzorem Eulera. Przyjmijmy oznaczenia:

$$y = \frac{r}{R}, \qquad x = \frac{a}{R}. \tag{1}$$

Z nierówności $0 < a < R - r$ wynika, że

$$y < 1 - x, \qquad x > 0, \qquad y > 0. \tag{2}$$

Wzór Eulera ma wtedy postać:

$$2y = 1 - x^2 \qquad \text{dla } x \in (0,1). \tag{3}$$

Postawmy następującą hipotezę, która w sposób oczywisty spełniona jest dla $n = 3$.

Hipoteza *Dla dowolnego* $n \geq 3$ *wzór Fussa ma postać*

$$y(x) = (1 - x^2)v(x) \qquad dla\ x \in (0,1), \tag{4}$$

gdzie

$$y'(0^+) = 0, \tag{5}$$

$$\mathrm{v}(1^-) = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Przypadek $\boldsymbol{n = 4}$

Dla $n = 4$ wzór Fussa jest postaci:

$$(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2).$$

Wykorzystując podstawienie (2.1), otrzymamy:

$$\sqrt{2}y(x) = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Łatwo widać, że równości (2.4)–(2.6) są w tym przypadku spełnione.

Przypadek $\boldsymbol{n = 5}$

Wzór Fussa dla $n = 5$ zapiszemy w postaci:

$$r\frac{R - a}{R + a} = \sqrt{(R - r + a)(R - r - a)} + \sqrt{2R(R - r - a)}. \tag{7}$$

Wykorzystując podstawienie (2.1) we wzorze (4.1), otrzymamy:

$$y\frac{1 - x}{1 + x} - \sqrt{2(1 - y - x)} = \sqrt{(1 - y)^2 - x^2}. \tag{8}$$

Po prostych przekształceniach z (4.2) dostajemy:

$$-4xy^2 + (1 - x^2)^2 = 2y(1 - x^2)\sqrt{2(1 - y - x)}. \tag{9}$$

Zgodnie z naszą hipotezą poszukujemy funkcji $v(x)$ takiej, że

$$y(x) = (1 - x^2)v(x).$$

Po podstawieniu (2.4) do (4.3) otrzymujemy równość:

$$1 - 4xv^2(x) = 2\sqrt{2}v(x)\sqrt{1 - x}\sqrt{1 - (x + 1)v(x)},$$

którą krótko zapiszemy w postaci:

$$1 - 4xv^2 = 2\sqrt{2}v\sqrt{1 - x}\sqrt{1 - (x + 1)v}. \tag{10}$$

Podnieśmy równość (4.4) obustronnie do kwadratu, a następnie otrzymujemy równanie:

$$16v^4x^2 - 8v^3x^2 + 8v^3 - 8v^2 + 1 = 0. \tag{11}$$

Okazuje się, że $v = \frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem równania (4.5), a zatem jest ono równoważne równaniu:

$$(8v^3x^2 + 4v^2 - 2v - 1)\left(v - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Wykażemy najpierw, że równanie stopnia trzeciego:

$$8v^3x^2 + 4v^2 - 2v - 1 = 0 \tag{12}$$

ma trzy rzeczywiste rozwiązania dla każdego $x \in (0,1)$. W tym celu zapiszmy (4.6) w postaci:

$$v^3 + \frac{1}{2x^2}v^2 - \frac{1}{4x^2}v - \frac{1}{8x^2} = 0. \tag{13}$$

Wykorzystując podstawienie:

$$w = v + \frac{1}{6x^2}$$

z (4.7), otrzymujemy równanie:

$$w^3 - \frac{1 + 3x^2}{12x^4}w + \frac{2 + 9x^2 - 27x^4}{27 \cdot 8x^6} = 0. \tag{14}$$

Wyróżnik D równania (4.8) jest postaci:

$$D = \frac{1}{4}\left(\frac{2 + 9x^2 - 27x^4}{27 \cdot 8x^6}\right)^2 - \frac{1}{27}\left(\frac{1 + 3x^2}{12x^4}\right)^3.$$

Łatwo wykazać, że dla $x \in (0,1)$ zachodzi nierówność:

$$\frac{(2 + 9x^2 - 27x^4)^2}{27^2 \cdot 64x^{12}} < \frac{4(1 + 3x^2)^3}{36^3x^{12}}.$$

Mianowniki obu ułamków są równe, a przez bezpośrednie przeliczenie sprawdzamy, że

$$(2 + 9x^2 - 27x^4)^2 - 4(1 + 3x^2)^3 < 0.$$

Zatem $D < 0$, więc równanie (4.6) ma trzy pierwiastki rzeczywiste dla dowolnie ustalonego $x \in (0,1)$.

Wprowadźmy teraz pomocniczą funkcję:

$$p(x) = \left(\frac{\sqrt{27x^4 - 22x^2 - 5}}{16 \cdot 3^{\frac{3}{2}}x^4} + \frac{27x^4 - 9x^2 - 2}{432x^6}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{15}$$

Rozwiązania równania (4.6) mają postać:

$$v_1(x) = e^{\frac{4}{3}i\pi}p(x) + \frac{3x^2+1}{36x^4 e^{\frac{4}{3}i\pi}p(x)} - \frac{1}{6x^2},$$
$$v_2(x) = e^{\frac{2}{3}i\pi}p(x) + \frac{3x^2+1}{36x^4 e^{\frac{2}{3}i\pi}p(x)} - \frac{1}{6\,x^2},$$
$$v_3(x) = p(x) + \frac{3x^2+1}{36x^4 p(x)} - \frac{1}{6x^2}.$$

Ponieważ $v_1(1) = -\frac{1}{2}$, $v_2(1) = -\frac{1}{2}$, $v_3(1) = \frac{1}{2}$, to $v(x)$ musi być zadane formułą funkcji $v_3(x)$, w przeciwnym wypadku istniałyby punkty $x \in (0,1)$, dla których $y(x)$ przyjmowałby wartości ujemne. Zatem

$$y(x) = (1-x^2)\left(p(x) + \frac{3x^2+1}{36x^4 p(x)} - \frac{1}{6x^2}\right),$$

gdzie $p(x)$ dane jest wzorem (4.9). Uzyskaliśmy jednocześnie spełnienie warunku (2.6).

Aby wykazać, że spełniony jest warunek (2.5), powróćmy do równania (4.3).

Niech

$$F(x,y) = -4y^2x + (1-x^2)^2 - 2y(1-x^2)\sqrt{2(1-y-x)}.$$

Zauważmy, że

$$F(0,\frac{1}{2}) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0,\frac{1}{2}) \neq 0.$$

Zatem istnieje otoczenie punktu $x = 0$, w którym równanie $F(x,y) = 0$ wyznacza dokładnie jedną funkcję uwikłaną $y = f(x)$ taką, że $f(0) = \frac{1}{2}$ oraz

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,\frac{1}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,\frac{1}{2})} = 0.$$

Przypadek $n = 6$

Dla $n = 6$ pierścień CD jest pierścieniem Ponceleta, jeśli zachodzi równość

$$16r^4a^2R^2 + 4r^2(R^2+a^2)(R^2-a^2)^2 - 3(R^2-a^2)^4 = 0. \qquad (16)$$

Po podstawieniu (2.1) do (5.1) mamy:

$$16y^4x^2 + 4y^2(1+x^2)(1-x^2)^3 - 3(1-x^2)^4 = 0,$$

skąd

$$8y^2 = (1-x^2)^2 \frac{\sqrt{(1+x^2)^2+12x^2}-1-x^2}{x^2}.$$

Zatem

$$\sqrt{8}\,y(x) = (1-x^2)\sqrt{\frac{\sqrt{(1+x^2)^2+12x^2}-1}{x^2}-1} =$$

$$= (1-x^2)\sqrt{\frac{\sqrt{(1+x^2)^2+12x^2}-1}{x^2}\frac{\sqrt{(1+x^2)^2+12x^2}+1}{\sqrt{(1+x^2)^2+12x^2}+1}-1} =$$

$$= (1-x^2)\sqrt{\frac{x^2+14}{\sqrt{(1+x^2)^2+12x^2}+1}-1}.$$

Wykażemy, że spełniony jest warunek (2.5). W tym celu wprowadzimy funkcję pomocniczą

$$g(x) = \sqrt{(1+x^2)^2+12x^2}.$$

Mamy

$$g'(x) = \frac{2x}{g(x)}(x^2+6x+1).$$

Funkcję $y(x)$ zapiszmy teraz w postaci:

$$\sqrt{8}\,y(x) = (1-x^2)\sqrt{\frac{x^2+14}{g(x)+1}-1}. \tag{17}$$

Różniczkując (5.2) w przedziale $(0,1)$, otrzymamy:

$$\sqrt{8}\,y'(x) = -2x\sqrt{\frac{x^2+14}{g(x)+1}-1}$$
$$+(1-x^2)\frac{2x(g(x)+1)-(x^2+14)g'(x)}{(g(x)+1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+14}{g(x)+1}-1}},$$

skąd natychmiast mamy $y'(0^+) = 0$.

Z (5.2) otrzymujemy, że warunek (2.6) także jest spełniony.

Podsumowanie

W pracy zweryfikowano hipotezę dotyczącą postaci wzorów Fussa, w przypadku $n = 3, 4, 5, 6$.

Walor edukacyjny tej tematyki to prosta w wypowiedzi teoria. Do zrozumienia problemu Ponceleta, zwanego przez specjalistów poryzmem Ponceleta, wystarczy szkolna wiedza. Każdy czytelnik jest w stanie wgłębić się w problem nierozwiązany od ponad 200 lat. Jasność zagadnienia i brak rozwiązania mogą zachęcić wielu czytelników do interesujących dociekań.

Literatura

Bos, H.J.M., Kers, C., Dort, F., Raven, D.W. (1987). Poncelet's Closure Theorem. *Expo. Math.*, *5*, 313–320.

Cieślak, W., Mozgawa, W. (2016). In Search of a Measure in Poncelet's Porism. *Acta Math. Hungarica*, *149* (2), 338–345.

Cieślak, W., Szczygielska, E. (2008). Circuminscribed Polygons in a Plane Annulus. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska*, *62*, 49–53.

Radić, M. (2010). An Improved Method for Establishing Fuss' Relations for Bicentric Polygons. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, Ser. I, *348*, 415–417.

Steiner, J. (1827). Aufgaben und Lehrsatze, erstere aufzulosen, letzere zu beweisen. *J. Reine Angew. Math.*, *2*, 289.

Weisstein, E.W. (2017). *Poncelet-Steiner Theorem.* Pobrane z: http://mathworld.wolfram.com/Poncelet-SteinerTheorem.html (1.09.2017).