

Cezary Cieśliński

Arytmetyka i intensjonalność

Filozofia Nauki 9/4, 73-81

2001

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Cezary Cieśliński

Arytmetyka i intensjonalność

Twierdzenia Gödla o istotnej niezupełności teorii zawierających arytmykę Peano już od dawna budzą zainteresowanie filozofów. Podważyły one popularną swego czasu tezę o identyczności prawdy matematycznej z dowodliwością w pewnym systemie formalnym i zmusiły do ponownego przemyślenia pytania o naturę prawdy w matematyce. Niektórzy filozofowie powoływali się na wspomniane twierdzenia, by dowodzić zaskakujących tez o niemechaniczności ludzkiego umysłu.

Wokół twierdzeń Gödla namnożyło się również wiele nieporozumień. Celem niniejszej pracy jest wyjaśnienie kilku z nich. W części I skomentujemy artykuł Wojciecha Krysztofiaka „Twierdzenia Gödla, możliwe światy i intensjonalność”. Wspomniany artykuł, zawierający liczne, rzeczowe błędy, został opublikowany w zbiorze esejów upamiętniającym sześćdziesiąte urodziny prof. Jana Woleńskiego. Nie jest to fakt bez znaczenia: książka ta z pewnością znajdzie wielu czytelników (między innymi wśród studentów), a niektórzy z nich mogą uznać artykuł Krysztofiaka za cenne źródło informacji o twierdzeniach Gödla i niezupełności arytmyki. Należy wyprowadzić ich z błędu.

W części II spróbujemy wyjaśnić, w jakim sensie logicy mówią o zjawisku intensjonalności w arytmyce.

I

Zacznijmy od podstaw. W roku 1930 Kurt Gödel udowodnił dwa twierdzenia, charakteryzujące własności teorii zawierających arytmykę Peano (PA)¹. Na mocy

¹ Zob. [Gödel 1931], a także [Smoryński 1977]. Ta ostatnia praca to znakomity przegląd tych oraz innych, później uzyskanych, metamatematycznych wyników.

pierwszego z nich, każda taka teoria jest istotnie niezupełna. Drugie twierdzenie głosi, że środkami takiej teorii nie da się udowodnić jej niesprzeczności. Oto dokładniejsze sformułowania:

Pierwsze twierdzenie Gödla²

Niech T będzie teorią aksjomatyzowalną, niesprzeczną, zawierającą PA, w języku PA. Wówczas istnieje zdanie φ takie że:

$$T \not\vdash \varphi$$

$$T \not\vdash \neg\varphi$$

Drugie twierdzenie Gödla

$$T \not\vdash \text{Con}_T$$

gdzie T jest teorią spełniającą warunki z pierwszego twierdzenia, a „Con_T” to zdanie arytmetyczne, które (przy naturalnej interpretacji) mówi, że T jest niesprzeczna.

Schemat dowodu pierwszego twierdzenia o niezupełności:

(1) Pokazujemy, że żadna aksjomatyzowalna, nierozstrzygalna teoria nie jest zupełna.

(2) Dowodzimy, że każda aksjomatyzowalna, niesprzeczna teoria zawierająca PA jest nierozstrzygalna.

Następnie uzyskujemy pierwsze twierdzenie o niezupełności jako prosty wniosek z (1) i (2).

Dowód (1) polega na zauważeniu, że gdyby teoria T była zupełna (tj. dla każdego φ , $T \vdash \varphi$ lub $T \vdash \neg\varphi$), to byłaby rozstrzygalna. Ustawiamy po prostu wszystkie dowody w T w rekurencyjny ciąg i biorąc dowolną φ , sprawdzamy czy kolejne wyrazy tego ciągu stanowią dowody φ , czy negacji φ . Skoro T jest zupełna, prędzej czy później uzyskamy pożądaną wynik.

W dowodzie (2) korzystamy z tzw. twierdzenia o reprezentowalności. Głosi ono co następuje.

Twierdzenie o reprezentowalności. Wszystkie rekurencyjne zbiory liczb naturalnych są reprezentowalne w arytmetyce Peano. Inaczej mówiąc, dla dowolnego rekurencyjnego zbioru X istnieje formuła $\varphi(v)$ z jedną zmienną wolną, taka że

$$\forall n [n \in X \equiv \text{PA} \vdash \varphi(\bar{n})]$$

² Ściśle biorąc, twierdzenie w tej postaci udowodnił Rosser. Sam Gödel posłużył się dodatkowym założeniem ω -niesprzeczności T .

$$\forall n [n \in X \equiv \text{PA} \vdash \neg \varphi(\bar{n})]$$

Przyjrzyjmy się teraz dowodowi (2).

Niech T będzie teorią aksjomatyzowalną, niesprzeczną, zawierającą PA. Dodatkowo załóżmy, że T jest rozstrzygalna.

Wprowadzamy definicję zbioru H :

$n \in H$ wtw gdy n jest kodem formuły $\varphi(v)$ z jedną zmienną wolną i $T \vDash \varphi(\bar{n})$.

Zauważamy, że przy założeniu rozstrzygalności T , H okazuje się zbiorem rozstrzygalnym. Weźmy bowiem dowolną liczbę n . Najpierw sprawdzamy, czy jest to kod jakiejś formuły $\varphi(v)$ z jedną zmienną wolną (to jest wykonalne na mocy własności kodowania). Później wystarczy sprawdzić, czy $T \vDash \varphi(\bar{n})$.

Skoro H jest rozstrzygalny, to na mocy twierdzenia o reprezentowalności istnieje taka ψ , że

$$\forall n [n \in H \equiv T \vdash \psi(\bar{n})]$$

Niech teraz k będzie numerem gödłowskim formuły $\psi(v)$. Otrzymujemy:

$$k \in H \equiv T \vdash \psi(\bar{k})$$

ale z definicji H dostajemy:

$$k \in H \equiv T \vDash \psi(\bar{k}),$$

bo k jest kodem ψ .

Zatem $T \vdash \psi(\bar{k}) \equiv T \vDash \psi(\bar{k})$. Uzyskaliśmy sprzeczność, co kończy dowód.

Wspomniana już praca Krysztofiaka zaczyna się od przedstawienia naszkicowanego powyżej dowodu; niestety, wygląda na to, że autor sam nie rozumie, czego i w jaki sposób dowodzi. Oto jego komentarz:

Kluczowym składnikiem dowodu [...] jest konstrukcja rozstrzygalnego zbioru H . Zbiór ten okazuje się nie być reprezentowalny w arytmetyce liczb naturalnych. Z drugiej jednak strony, każdy zbiór rozstrzygalny jest reprezentowalny w arytmetyce liczb naturalnych, o ile arytmetyka jest rozstrzygalna. Konstrukcja zbioru H umożliwia więc wyciągnięcie wniosku o nierozstrzygalności arytmetyki.³

Cytowany fragment zdradza dogłębne niezrozumienie zaprezentowanego dowodu. Krysztofiak w niewłaściwy sposób przedstawia jego strukturę. Zgodnie z jego komentarzem chodzi o to, że:

(a) H jest rozstrzygalny

(b) Jeśli T jest rozstrzygalna i zawiera arytmetykę, to każdy rozstrzygalny zbiór jest reprezentowalny w T

(c) H nie jest reprezentowalny w T , a T zawiera arytmetykę

Zatem T nie jest rozstrzygalna.

W rzeczywistości:

(1) Zbiór H nie jest rozstrzygalny. Jego rozstrzygalność jest tylko wnioskiem z założenia dowodu nie wprost o rozstrzygalności arytmetyki. Przedstawione wcze-

³ Zob. [Krysztofiak 2000], s. 68.

śniej rozumowanie stanowi zatem raczej dowód *nierozstrzygalności* zbioru H (również dalej w omawianym artykule Krysztofiak uparcie twierdzi, że zbiór H jest rozstrzygalny, wbrew dowodowi, który sam wcześniej podał).

(2) Założenie o rozstrzygalności T występujące w warunku (b) jest zupełnie nieistotne – twierdzenie o reprezentowalności go nie wymaga. Co więcej, celem dowodu jest przecież pokazanie, że założenie to jest fałszywe.

Naszkicowany wyżej dowód twierdzenia o nierozstrzygalności T ma następującą strukturę:

- (a) T jest rozstrzygalna (założenie dowodu nie wprost)
- (b) H jest rozstrzygalny (wniosek z założenia)
- (c) H jest reprezentowany w T przez formułę ψ (wniosek z (b) i twierdzenia o reprezentowalności)
- (d) H nie jest reprezentowany w T przez ψ . Sprzeczność.

Cóż jeszcze zdaniem Krysztofiaka możemy powiedzieć o zbiorze H ? Zauważa on słusznie, że zawartość wspomnianego zbioru zależy od przyjętej metody kodowania. Zaraz potem wygłasza jednak zadziwiającą tezę: technik numeracji formuł jest nieprzeliczalnie wiele (!), a zatem istnieje nieprzeliczalnie wiele zbiorów „typu H ”.⁴ Jest to zaiste frapujące twierdzenie, tym bardziej, że dowód jego negacji możemy odnaleźć w podręcznikach logiki.⁵ Wspomniane techniki muszą mieć przecież rekurencyjny charakter, zbiór funkcji rekurencyjnych jest zaś przeliczalny.

Liczby naturalne uznaje Krysztofiak za obiekty epistemicznie niepełne. Oto jego definicja tego pojęcia:

$$x \in \text{Ep.Nzpl.}_T \equiv \exists \varphi [T \vDash \varphi(v/x) \wedge T \vDash \neg \varphi(v/x)]$$

czyli: x jest przedmiotem epistemicznie niepełnym (na gruncie teorii T) gdy dla pewnego warunku φ , T nie rozstrzyga, czy x spełnia ten warunek. Krysztofiak próbuje wykazać, że każda liczba naturalna jest obiektem epistemicznie niepełnym w scharakteryzowanym sensie. Jego «dowód» polega na tym, że dla dowolnej liczby naturalnej n i formuły φ znajdziemy metodę kodowania, przy której n jest numerem gödłowskim φ ; będzie tak zatem również dla formuły ψ reprezentującej zbiór H , a wówczas $T \vDash \varphi(\bar{n})$ i $T \vDash \neg \varphi(\bar{n})$. Jest to kompletne nieporozumienie: zostało przecież wykazane, że nie istnieje formuła ψ reprezentująca zbiór H .

Zauważmy nawiasem, że dowodzone twierdzenie (o „epistemicznej niepełności” wszystkich liczb naturalnych) jest prawdziwe i posiada banalny dowód. Twierdzenie to (podaję tu wersję mocniejszą od sformułowania Krysztofiaka) głosi co następuje:

Twierdzenie. Istnieje formuła $\varphi(v)$, taka że:

$$\forall n [T \vDash \varphi(\bar{n}) \wedge T \vDash \neg \varphi(\bar{n})]$$

Dowód.

Niech ψ będzie zdaniem, takim że:

⁴ *Ibidem*, s. 68.

⁵ Zob. np. [Cutland 1980], s. 78.

$$\begin{aligned} T \vDash \psi \\ T \vDash \neg \psi \end{aligned}$$

(istnienie takiego zdania wynika z twierdzeń Gödla-Rossera).

Niech $\varphi(v)$: = $\ulcorner \psi \wedge v = v \urcorner$.

Dalej zauważamy, że dla dowolnego n

$$T \vDash \varphi(\bar{n})$$

bo w przeciwnym razie $T \vdash \psi$, oraz:

$$T \vDash \neg \varphi(\bar{n})$$

bo w przeciwnym razie $T \vdash \neg \psi$, skoro równość „ $n = n$ ” wynika z T.

Zauważmy, że istnienie rozmaitych sposobów kodowania jest tu zupełnie nieistotne. Wystarczy jeden.

Twierdzenie jest zatem prawdziwe, cóż ciekawego jednak z tego wynika? Tu dochodzimy do sedna sprawy. Zdaniem Krysztofiaka, uzyskujemy wniosek o intencjonalnym i intensjonalnym charakterze arytmetyki. Przyjrzyjmy się temu bliżej.

(a) *Intencjonalność*. Za Ingardenem Krysztofiak określa przedmioty czysto intencjonalne jako „te, które posiadają tzw. miejsca niedookreślenia; są to takie przedmioty, o których nie można powiedzieć *zgodnie z prawdą*, że posiadają pewną własność lub jej nie posiadają. Obiekty epistemicznie niezupełne byłyby więc obiektami czysto intencjonalnymi w sensie Ingardena” (moja kursywa — C.C.). I dalej: „w procedurze dowodowej twierdzenia o niepełności arytmetyki liczb naturalnych, liczbom naturalnym nadaje się [...] status bytów czysto intencjonalnych”.⁶

Otóż żadnego takiego statusu procedura dowodowa im nie nadaje. Gdyby ktoś chciał wykazać, że liczby naturalne są przedmiotami czysto intencjonalnymi w scharakteryzowanym sensie, to powinien udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje formuła φ taka, że ani $\varphi(\bar{n})$, ani $\neg \varphi(\bar{n})$ nie jest *prawdziwa* (a nie dowodliwa). Taka teza jest zaś jawnie fałszywa, przynajmniej jeśli przez „prawdziwość” rozumiemy „prawdziwość w standardowym modelu arytmetyki”.

(b) *Intensjonalność*. Krysztofiak twierdzi, że „język arytmetyki jest językiem ekstensjonalnym, ale „metajęzyk użyty w procedurze dowodowej [twierdzenia Gödla] musi mieć charakter intensjonalny”.⁷ Oto zasada ekstensjonalności w wersji Krysztofiaka:

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\psi(\alpha) \equiv \psi(\alpha / \beta)}$$

Sens jest następujący: jeśli przyjęliśmy, że α jest logicznie równoważne β („ \Leftrightarrow ” to funktor zdaniotwórczy od argumentów nazwowych), to wolno nam uznać logiczną równoważność dowolnych dwóch formuł, różniących się od siebie tylko tym, że w jednej z nich nazwa wyrażenia α została zastąpiona nazwą wyrażenia β . W myśl tej zasady, powinniśmy stwierdzić, że dla dowolnych logicznie równoważnych formuł φ, ψ :
numer Gödla (φ) = numer Gödla (ψ).

⁶ *Op. cit.*, s. 72.

⁷ *Ibidem*, s. 73.

Taka teza byłaby jednak fałszywa, zatem metajęzyk arytmetyki ma intencjonalny charakter.

Tyle Krysztofiak. A oto komentarz:

(1) Metajęzyk użyty w procedurze dowodowej twierdzenia Gödla to po prostu język arytmetyki, jeśli więc ten drugi uznajemy za ekstensjonalny, to samo musimy powiedzieć o tym pierwszym.

(2) Charakterystyka kontekstów ekstensjonalnych, jaką podaje Krysztofiak, jest nadużyciem. Przy standardowym rozumieniu tego terminu, kontekst ekstensjonalny to taki kontekst, w którym *salva veritate* możemy podstawiać wyrażenia o tej samej wartości logicznej lub denotacji. Otóż zdanie o postaci „numer Gödla (φ) = n ” zachowa swą wartość logiczną bez względu na to, jakiej dostępnej nam nazwy formuły φ użyjemy. Zgodnie z podejściem Krysztofiaka, dowolny, syntaktyczny opis danego zdania φ należałoby uznać za intencjonalny, nie stosowałby się on bowiem do niektórych zdań logicznie mu równoważnych (por. np. „Zdanie „ $2 + 2 = 4$ ” składa się z pięciu symboli”, „Zdanie „ $2 + 2 = 4$ i $2 + 2 = 4$ ” składa się z pięciu symboli”). Warunek Krysztofiaka nie jest tu więc spełniony, co pokazuje tylko tyle, że używa on słowa „ekstensjonalność” w bardzo nietypowym sensie.

II

Dzięki technice arytmetyzacji potrafimy wyrazić w języku arytmetyki szereg pojęć, określających własności tego języka, a także charakteryzować własności teorii formułowanych w tym języku. Cóż jednak mamy na myśli, kiedy twierdzimy, że dany predykat arytmetyczny $\varphi(v)$ wyraża pewne syntaktyczne lub semantyczne pojęcie? Rysuje się tu kilka możliwości.

(1) Predykat definiuje zbiór przedmiotów, podpadających pod to pojęcie, w standardowym modelu arytmetyki.

(2) Predykat trafnie oddaje *znaczenie* metateoretycznego pojęcia.

Otóż w niektórych kontekstach (nazwijmy je „ekstensjonalnymi”) zadowolamy się predykatami spełniającymi pierwszy warunek. Takim ekstensjonalnym wynikiem jest pierwsze twierdzenie Gödla. W innych („intencjonalnych”) kontekstach domagamy się spełnienia warunku 2; przykładu dostarcza nam drugie twierdzenie Gödla o niedowodliwości niesprzeczności.⁸

Ad 1. Ponownie rozważmy pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki w następującym sformułowaniu:

Twierdzenie. Niech T będzie teorią aksjomatyzowalną, prawdziwą w standardowym modelu arytmetyki (N). Istnieje wówczas zdanie φ , takie że:

(a) $T \not\vdash \varphi$

(b) $T \not\vdash \neg \varphi$

⁸ Tradycja takiego używania terminów „ekstensjonalny” i „intencjonalny” w odniesieniu do arytmetycznych kontekstów wywodzi się od Fefermana. Zob. [Feferman 1960].

Szkic dowodu

Konstruujemy formułę „ $PR_T(v)$ ” języka arytmetyki, spełniającą warunek:

$$(*) \quad \forall \psi [N \models PR_T(\psi) \equiv T \vdash \psi]$$

Korzystamy następnie z lematu przekątniowego, na mocy którego istnieje zdanie φ , takie że:

$$(**) \quad N \models \varphi \equiv \neg PR_T(\varphi)$$

(a) Pokazujemy, że $T \not\models \varphi$. Załóżmy bowiem, że jest inaczej, czyli: $T \vdash \varphi$. Wówczas $N \models \varphi$, zatem na mocy (**), $N \models \neg PR_T(\varphi)$, więc z (*) $T \not\models \varphi$. Sprzeczność.

(b) Pokazujemy, że $T \not\models \neg \varphi$. Załóżmy bowiem, że jest inaczej, czyli: $T \vdash \neg \varphi$. Wówczas $N \models \neg \varphi$, zatem na mocy (**), $N \models PR_T(\varphi)$, więc z (*) $T \vdash \varphi$. Okazuje się w rezultacie, że T jest sprzeczna, a zatem $N \not\models T$. Sprzeczność z założeniem.

Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele formuł, spełniających warunek (*). W obecnym kontekście nie ma żadnego znaczenia, którą z nich wybierzemy. Ważne jest tylko to, że nasz wybór formuły „ $PR_T(v)$ ” jest ekstensjonalnie poprawny, tzn. formułę tę spełniają w standardowym modelu arytmetyki wszystkie twierdzenia teorii T (ich numery gödłowskie) i nic poza nimi.

Podobnie ekstensjonalny charakter miało rozumowanie Rossera. Rozważał on formułę „ $PR_T^R(v)$ ” („ v jest dowodliwe w sensie Rossera”), zdefiniowaną w następujący sposób:

$$PR_T^R(v) \equiv \exists y [\text{Prov}_T(y, v) \wedge \forall z, w \leq y (\text{Prov}_T(z, w) \Rightarrow (v \neq \ulcorner \neg w \urcorner \wedge w \neq \ulcorner \neg v \urcorner))]$$

gdzie „ $\text{Prov}_T(y, v)$ ” to standardowy predykat „ y jest dowodem v w T ”. Przy założeniu niesprzeczności T , formuła ta spełnia warunek (*), choć nie oddaje treści metateoretycznego pojęcia dowodliwości. Z grubsza biorąc, formuła „ $PR_T^R(v)$ ” mówi raczej, że v posiada taki dowód y , poniżej którego nie znajdziemy dowodu negacji v . Okazało się, że rozważana konstrukcja, w której nie respektujemy intuicyjnego sensu terminu „dowodliwość”, pozwala uzyskać interesujące rezultaty: Rosser wykazał niezupełność aksjomatyzowalnej teorii T przy słabszych założeniach niż Gödel (założył mianowicie tylko jej niesprzeczność).

Ad 2. Jak już zauważyliśmy, wiele predykatów spełnia warunek (*), czyli definiuje w N zbiór twierdzeń T . Niech „ $PR_T(v)$ ” będzie dowolnym takim predykatem. Wykorzystując ten predykat, zdefiniujemy zdanie Con_T^{PR} :

$$Con_T^{PR} \equiv \neg \exists d [d \text{ jest dowodem } \ulcorner 0 \neq 0 \urcorner \text{ w oparciu o zbiór formuł } \varphi, \text{ takich że } PR_T(\ulcorner \varphi \urcorner)].$$

Skoro „ $PR_T(\varphi)$ ” mówi, że φ jest twierdzeniem T , zdanie „ Con_T^{PR} ” wyraża niesprzeczność T .

Jak wiadomo, na mocy drugiego twierdzenia Gödla w teorii T nie da się udowodnić, że T jest niesprzeczna. Czy w związku z tym mamy prawo stwierdzić:

$$T \nVdash \text{Con}_T^{\text{PR}} ?$$

Otóż nie. Intensjonalny charakter drugiego twierdzenia Gödla polega na tym, że jego prawdziwość zależy od wyboru formuły, definiującej zbiór twierdzeń T . Zilustruje to krótkie rozumowanie, pokazujące że (przy założeniu niesprzeczności T) pewne zdanie, które mówi, że T jest niesprzeczna, wynika z T . Definiujemy:

$$\text{Pr}'_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \equiv [(\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Con}_T) \vee (\ulcorner \varphi \urcorner = \ulcorner 0 \neq 0 \urcorner \wedge \neg \text{Con}_T)]$$

$$\text{Con}'_T \equiv \neg \text{Pr}_{\{\varphi: \text{Pr}'_T(\ulcorner \varphi \urcorner)\}}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner),$$

gdzie „ $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ” to standardowy predykat dowodliwości, a „ Con_T ” to zdanie „ $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$ ”. Łatwo zauważyć, że jeśli T jest niesprzeczna, to dla dowolnej formuły φ :

$$\mathbb{N} \models \text{Pr}'_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \equiv T \vdash \varphi.$$

Zdanie „ Con'_T ” mówi zatem, że nie istnieje dowód sprzeczności w oparciu o zbiór twierdzeń T , czyli: T jest niesprzeczna. Możemy obecnie wykazać, że

$$T \vdash \text{Con}'_T.$$

Dowód (wewnątrz teorii T):

Założmy, że $\neg \text{Con}'_T$, czyli: $\text{Pr}_{\{\varphi: \text{Pr}'_T(\ulcorner \varphi \urcorner)\}}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$. Rozważamy obecnie dwa przypadki: (1) Con_T , (2) $\neg \text{Con}_T$. Pokazujemy, że w obu przypadkach uzyskujemy sprzeczność.

Ad (1). Skoro Con_T , to otrzymujemy:

$$\forall \varphi [\text{Pr}'_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)],$$

a zatem z założenia:

$$\text{Pr}_{\{\varphi: \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)\}}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner).$$

Stąd:

$$\text{Pr}_T(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner),$$

czyli:

$$\neg \text{Con}_T.$$

Uzyskaliśmy zatem sprzeczność.

Ad 2. Tu zakładamy, że $\neg \text{Con}_T$. Zatem jedyną formułą spełniającą warunek $\text{Pr}'_T(v)$ jest $\ulcorner 0 = 0 \urcorner$. Otrzymujemy więc:

$$\text{Pr}_{\{0=0\}}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner),$$

czyli: zbiór tautologii rachunku predykatów jest sprzeczny. Wiadomo jednak, że wewnątrz T potrafimy udowodnić niesprzeczność rachunku predykatów:

$$\neg \text{Pr}_{\{0=0\}}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner),$$

a zatem i tu dostajemy sprzeczność.

W tej sytuacji pojawia się pytanie, w jakim sensie wolno nam twierdzić, że niesprzeczność teorii T nie jest dowodliwa w T . Dysponujemy częściową odpowiedzią: wiadomo np., że jeśli predykat „ $\text{PR}_T(v)$ ”, którym się posługujemy, spełnia tzw. wa-

runki wywodliwości, wprowadzone przez Hilberta i Bernaysa,⁹ to można udowodnić dla T drugie twierdzenie o niezupełności. Wciąż możemy jednak pytać o interesujące pojęcia dowodliwości, przy których zdanie stwierdzające niesprzeczność teorii T okaże się jej twierdzeniem.

BIBLIOGRAFIA

- Cutland, N. (1980), *Computability. An Introduction to Recursive Function Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Feferman, S. (1960), „Arithmetization of metamathematics in a general setting”, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 49, s. 35—92.
- Gödel, K. (1931), „Über formal unentscheidbare Sätze der Prinzipia Mathematica und verwandter Systeme, I”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, s. 173—98.
- Krysztofiak, W. (2000), „Twierdzenia Gödla, możliwe światy i intensjonalność”, [w:] J. Hartman (red.), *Filozofia i logika. W stronę Jana Woleńskiego*, Wydawnictwo Aureus, Kraków, s. 63—83.
- Smoryński, C. (1977), „The incompleteness theorems”, [w:] J. Barwise (red.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

⁹ W sprawie warunków wywodliwości, zob. np. [Smoryński 1977].