Anna Lemańska

Uwagi o platonizmie matematycznym

Filozofia Nauki 20/2, 95-105

2012

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Filozofia Nauki
Rok XX, 2012, Nr 2(78)

Anna Lemańska

Uwagi o platonizmie matematycznym

1. BLASKI I CIENIE PLATONIZMU MATEMATYCZNEGO

Platonizm matematyczny można najkrócej określić jako stanowisko przyjmujące obiektywne, tzn. niezależne od człowieka, jego umysłu oraz rzeczywistości materialnej, istnienie świata przedmiotów matematycznych. Jest to bardzo ogólne określenie, wymagające uściśleń, istnieją bowiem różne formy platonizmu, w szczególności: platonizm obiektowy, bezobiektowy, strukturalizm, *full-blooded Platonism*,[1] platonizm co do istnienia obiektów, co do prawdy. W artykule nie będę omawiać różnic między tymi stanowiskami, skoncentruję się tylko na tych aspektach platonizmu, które dotyczą dowolnego stanowiska przyjmującego obiektywne istnienie przedmiotu matematyki.

Platonizm jest najpopularniejszym poglądem wśród matematyków: szacuje się, że ok. ¾ z nich jest platonikami. Popularność platonizmu wśród matematyków wiąże się, jak się wydaje, z dość powszechnym odczuciem odkrywania prawd matematycznych, a nie konstruowania czy tworzenia jakiegoś własnego świata. Platonizm też lepiej niż inne koncepcje wyjaśnia „zmaganie się" matematyków z rzeczywistością matematyczną. Stawiając pytania odnośnie do świata przedmiotów matematycznych, oczekujemy jednoznacznej na nie odpowiedzi, jednocześnie mając poczucie, że nie zależy ona w żaden sposób od naszej woli. Na przykład Georg Cantor, formułując hipotezę *continuum*, był przekonany, że jest ona albo prawdziwa, albo fałszywa, i usiłował, jak wiadomo bezskutecznie, znaleźć dowód prawdziwości swej hipotezy. Odpowiedź jest inna, niż przypuszczał Cantor i ukazuje znacznie bardziej wyrafinowany świat zbiorów, niż sądził sam twórca teorii mnogości. Może to świadczyć na

[1] M. Balaguer, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford-New York 1998, Oxford University Press.

korzyść platonizmu i nie przekreśla istnienia niezależnego od nas, wydaje się, że uprzedniego w stosunku do naszego zaistnienia na ziemi, rozwiązania problemu *continuum*.

Platonizm tłumaczy też kumulacyjny charakter wiedzy matematycznej, przekraczanie przez nią barier czasu, kultury itp. W szczególności, niektóre z pojęć matematycznych zdefiniowano już w starożytności. Jako przykład takiego pojęcia Edward Nelson podaje pojęcie liczby doskonałej. Zostało ono zdefiniowane przez Pitagorejczyków ok. 2,5 tys. lat temu. Euklides następnie w *Elementach* wykazał, że jeżeli 2^n-1 jest liczbą pierwszą, to $(2^n-1)2^{n-1}$ jest liczbą doskonałą. 2 tys. lat później Leonhard Euler udowodnił, że każda parzysta liczba doskonała jest tej postaci. Do dziś natomiast nie wiadomo, czy istnieją nieparzyste liczby doskonałe i czy liczb doskonałych jest nieskończenie wiele.[2] Zatem mamy do czynienia z pojęciem i związanymi z nim problemami, które miały takie samo znaczenie w dalekiej przeszłości, jak i obecnie. Dziś ciągle na lekcjach geometrii dzieci uczą się znanych już w starożytności twierdzeń Talesa i Pitagorasa; problemy kwadratury koła czy trysekcji kąta zostały postawione przez matematyków greckich, a rozwiązane dopiero w wieku XIX.

Wśród matematyków jest dość powszechne poczucie, że raczej odkrywają, a nie tworzą jakąś rzeczywistość, że ta rzeczywistość już jest przez nich zastana. W tym kontekście za Rogerem Penrosem, broniącym platonizmu, można zadać pytanie o istnienie zbioru Mandelbrota, zanim wykreował go na komputerze Benoit Mandelbrot.[3] Czy zatem Mandelbrot odkrył, czy też powołał ten zbiór do istnienia? Wydaje się, że jednak odkrył, gdyż szukając uogólnienia tzw. zbiorów Julii, nie spodziewał się uzyskania tak dziwnej struktury jak nazwany jego nazwiskiem zbiór.[4] Można zadać podobne jeszcze bardziej podstawowe pytanie: czy 2+2 równało się 4, zanim na Ziemi pojawił się człowiek, a nawet przed Wielkim Wybuchem, o ile w ogóle jest sens mówić o jakimś „przed" Wielkim Wybuchem.

Mimo zadowalającego wyjaśniania niektórych z cech charakterystycznych matematyki, platonizm jest krytykowany z różnych pozycji. Jest to związane z tym, że, tłumacząc pewne fakty, jednocześnie sam nie unika poważnych trudności. Literatura na ten temat jest bardzo bogata i nie jest możliwe wymienienie wszystkich zarzutów. Można je podzielić na wychodzące niejako z wnętrza samej matematyki i związane z uzyskanymi w niej wynikami, na przykład wykorzystujące interpretacje twierdzeń limitacyjnych, i na „zewnętrzne", wynikające z koncepcji filozoficznych. Te pierw-

---

[2] E. Nelson, *Mathematics and Faith*, http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers/faith.pdf [pozyskano: 9.10.2011].

[3] R. Penrose, *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, przeł. P. Amsterdamski, Warszawa 1995, WN PWN, s. 116-119. „Jego cudownie skomplikowana struktura nie została przez nikogo wymyślona ani też nie została zaprojektowana przez zespół matematyków. Sam Benoit Mandelbrot, […] który pierwszy zaczął badać ten zbiór, nawet nie przypuszczał, że jest on tak skomplikowany, choć wiedział, iż jest na tropie czegoś bardzo interesującego" (s. 116).

[4] O odkryciu zbioru Mandelbrota zob. np. J. Gleick, *Chaos. Narodziny nowej nauki*, przeł. P. Jaśkowski, Poznań 1996, Zysk i S-ka, s. 228-235.

sze pominę, a skoncentruję się na tych trudnościach platonizmu, które wydają się z punktu widzenia filozofa szczególnie ważne. Mają one charakter ontologiczny (metafizyczny) lub epistemologiczny. Trudności ontologiczne dotyczą sposobu istnienia świata obiektów matematycznych, a epistemologiczne sposobu jego poznawania.

Najważniejszą trudność natury ontologicznej stwarza sam status rzeczywistości matematycznej. Przyjmuje się bowiem istnienie rzeczywistości odmiennej i, co więcej, niezależnej od znanego nam świata fizycznego, zatem obok czy ponad światem rzeczy fizycznych powinien istnieć niezależny od niego świat niematerialnych, idealnych przedmiotów matematycznych. Jest to rzeczywistość nieumiejscowiona przestrzennie, aczasowa, niezmienna, a więc do pewnego stopnia mająca cechy bytu absolutnego. W konsekwencji przyjęcie platonizmu matematycznego wymusza odrzucenie stanowisk monistycznych, w szczególności naturalizmu ontologicznego czy różnego typu stanowisk materialistycznych. Jest to spowodowane tym, że istnienie idealnego świata przedmiotów matematycznych otwiera możliwości istnienia innych typów obiektów niematerialnych, na przykład duchowych. Jest to nie do przyjęcia dla filozofów o orientacji materialistycznej, stąd m.in. odrzucenie platonizmu i podejmowanie różnych prób wiązania istnienia obiektów matematycznych z jakimiś aspektami rzeczywistości materialnej.

Natomiast filozof przyjmujący istnienie Boga musi zmierzyć się z koniecznością określenia relacji między Bogiem a światem obiektów matematycznych. Powstają następujące problemy: czy idealne przedmioty matematyczne są niezależne od Boga, czy są przez Niego stworzone, czy istnieją w Nim, czy poza Nim? Czy to Bóg zadekretował, że 2+2 jest równe cztery, czy też niejako sam musi podlegać koniecznym związkom logicznym i matematycznym? Czy istnieje tylko jeden byt absolutny — Bóg, czy też bytów „absolutnych", w postaci obiektów matematycznych, istnieje więcej?

Z kolei zastosowanie „brzytwy Ockhama" do istnienia pojęć matematycznych zmusza do zadania następującego pytania: czy warto wprowadzać nowy rodzaj bytów, odmienny od materialnych, czy rzeczywiście rozwiązuje to jakieś istotne problemy? Obiekty matematyczne stanowią istotnie nową kategorię bytów niż swojskie dla nas makroskopowe przedmioty materialne. Nie są one bytowo zależne ani od materii, ani od umysłu, nie widać, jak miałyby oddziaływać na świat materialny i mentalny, zatem ich istnienie wydaje się wprowadzać nadmiarowość, która być może nie jest do niczego potrzebna, a właściwości matematyki można wyjaśnić bez odwoływania się do ich istnienia.

Trudności natury epistemologicznej dotyczą przede wszystkim problemów z dostępem poznawczym do idealnego świata matematyki. Nie widać bowiem, w jaki sposób możemy poznawać świat obiektów matematycznych, które są niezależne od obiektów materialnych i psychicznych oraz w żaden sposób nie oddziałują na nasze zmysły i nie wywołują jakichkolwiek zmian w świecie nas otaczającym. Rozwiązanie w tym zakresie Platona, czyli anamneza, nie jest obecnie traktowane poważnie.

Te i inne trudności prowokowały i nadal prowokują do odrzucenia platonizmu i przyjęcia innego rozwiązania problemu istnienia przedmiotu matematyki.

2. PROBLEMY INNYCH NIŻ PLATONIZM STANOWISK ODNOŚNIE DO PRZEDMIOTU MATEMATYKI

Stanowisk na temat przedmiotu matematyki jest cała panorama: od skrajnego formalizmu czy nominalizmu aż po skrajny platonizm. Warto zauważyć, że każde ze stanowisk musi zmierzyć się z określeniem relacji między z jednej strony matematyką, a z drugiej światem materialnym, umysłem matematyka i językiem. Matematyka bowiem jest wykorzystywana w badaniu przyrody — obecnie trudno wyobrazić sobie fizykę bez matematyki. Również kształtowanie pierwszych podstawowych pojęć matematycznych, jak liczby naturalne czy figury geometryczne dokonywało się przez kontakt poznawczy ze światem fizycznym. Toteż musi istnieć pewien rodzaj relacji między światem materialnym a przedmiotem matematyki.

Matematyk z kolei formułuje definicje, twierdzenia, dowodzi tych twierdzeń. Wyraża to w szczególnym tworzonym na potrzeby matematyki języku symbolicznym, zapisuje za pomocą notacji, umieszcza swe wyniki w artykułach, książkach itp. Toteż musi również istnieć jakieś odniesienie między umysłem matematyka a matematyką z jednej strony i między matematyką a językiem z drugiej.

Bardzo pobieżny przegląd różnych rozwiązań problemu istnienia obiektów matematycznych zdaje się pokazywać, że ich autorzy koncentrują się z reguły na jednym z wymienionych elementów: języku, umyśle bądź świecie materialnym. Znacznie rzadziej są reprezentowane stanowiska, które próbują uwzględnić wszystkie wskazane przeze mnie elementy.

Uwypuklenie roli jednego z tych elementów pozwala podzielić stanowiska w kwestii istnienia obiektów matematycznych na cztery grupy. Do pierwszej zaliczam te, według których nie ma sensu mówić o obiektach matematycznych. Matematyka jest w tym przypadku bądź redukowana do języka, stanowiącego użyteczne narzędzie; bądź uważana za „grę” pustymi symbolami; bądź jej pojęcia są traktowane tylko jak nazwy, na przykład w stanowisku nominalistycznym.

W drugiej grupie stanowisk znajdują się te, które wiążą istnienie obiektów matematycznych z umysłem matematyka. Można tu zaliczyć różne koncepcje konstruktywistyczne, wśród nich intuicjonizm, a także fikcjonalizm czy psychologizm.

Trzecią grupę tworzą stanowiska uznające, że istnienie obiektów matematycznych jest wtórne w stosunku do istnienia przedmiotów fizycznych. W szczególności uznają one obiekty matematyczne za abstrakcje lub idealizacje z relacji czy z własności przedmiotów fizycznych, ewentualnie abstrakcje od abstraktów z niższego poziomu. Tu w szczególności mieszczą się stanowiska przyjmujące realizm umiarkowany, a tym samym nawiązujące do Arystotelesa. Warto zwrócić uwagę, że to rozwiązanie jest przyjmowane przez dwa diametralnie odmienne stanowiska filozoficzne, zarówno przez materializm dialektyczny, jak i tomizm.

W czwartej grupie znajdują się stanowiska traktujące obiekty matematyki jako istniejące niezależnie od materii i od umysłu, czyli różne formy platonizmu matematycznego. W tym miejscu od razu dodam, że stanowiska platońskie z reguły nie rozwiązują problemów dotyczących relacji między matematyką a językiem, umysłem i rzeczywistością materialną. To również stanowi pewną słabość platonizmu.

Zaproponowany podział nie jest rozłączny — są stanowiska, które trudno jednoznacznie przypisać do którejś z wymienionych grup — nie jest też zapewne wyczerpujący.

Jak łatwo zauważyć, trzy pierwsze typy stanowisk unikają wskazanych, a także części innych, trudności platonizmu, ale same stwarzają własne, nie wyjaśniają też wszystkich istotnych „osobliwości" matematyki jako nauki. Matematyka bowiem nie redukuje się tylko do języka, jej twierdzeń nie można traktować wyłącznie jako zdań analitycznych. Nie jest też swobodną konstrukcją umysłu matematyka. Kreacja obiektów matematycznych podlega przynajmniej prawom logiki i sieć obiektów matematycznych, jakkolwiek kreowana, musi być spójna. Powstaje zatem problem, co stanowi źródło tej spójności. W intuicjonizmie przyjmuje się istnienie wspólnej dla wszystkich ludzi intuicji, jednak nie jest to niczym uzasadniane. Z kolei powiązanie istnienia obiektów matematycznych z umysłem matematyka i przyjęcie materializmu wikła w problemy niemające dobrych rozwiązań, na przykład takich, jak kwestia istnienia ośrodków w mózgu, w których mogą być zlokalizowane konkretne pojęcia matematyczne.

Powiązanie matematyki z rzeczywistością fizyczną jest znacznie bardziej złożone i nie wyczerpuje się tylko w abstrahowaniu pewnych własności i wyrażaniu ich w specyficznym języku. Toteż stanowiska z trzeciej grupy nie dają zadowalających odpowiedzi na temat natury nieskończoności: w szczególności czy jest to pojęcie abstrakcyjne lub czy można swobodnie posługiwać się nieskończonością aktualną. Problem stanowią też obiekty, których powiązania nawet pośredniego ze światem fizycznym nie widać, na przykład zbiory mocy nieprzeliczalnych, przestrzenie wielowymiarowe, „patologiczne" twory matematyczne, jak ciągła funkcja nigdzie nieróżniczkowalna, „krzywa" wypełniająca kwadrat, zbiór Mandelbrota czy inne zbiory fraktalne.

Odnośnie do poglądów z drugiej i trzeciej grupy powraca pytanie, które w tych stanowiskach pozostaje bez zadowalającej odpowiedzi: czy zbiór Mandelbrota istniał zanim został wykreowany i opisany przez Mandelbrota? Podobny problem odnosi się do podzbiorów liczb naturalnych. Jak wiadomo, jest ich nieprzeliczalnie wiele. Niektóre z nich łatwo określić, ale pozostaje nieskończenie wiele podzbiorów, których nigdy nie zdefiniujemy. Czy zatem te podzbiory istnieją, czy też nigdy nie zaistnieją?

Jak się zatem wydaje, żadne ze stanowisk w kwestii istnienia przedmiotu matematyki nie rozwiązuje wszystkich problemów ontologicznych i epistemologicznych stwarzanych przez matematykę. Ciągle na ten temat są toczone dyskusje i nie widać możliwości ich zakończenia oraz uzyskania zgody w kwestii sposobu istnienia obiektów matematycznych. Nie widać zatem konkurencyjnego stanowiska wobec platonizmu, stanowiska, które lepiej niż platonizm wyjaśniałoby istnienie szczególnych cech matematyki. W dalszej części spróbuję zatem bronić platonizmu.

3. PLATONIZM W UJĘCIU MICHAŁA HELLERA

Broniąc platonizmu, wykorzystam rozwiązania niektórych ze wskazanych problemów zaproponowane przez Michała Hellera. Dokonuje on interesującego rozróżnienia dwóch matematyk: Matematyki przez duże M i matematyki przez małe m. O Matematyce Heller tak pisze:

> Matematyka przez duże M istnieje poza czasem, jest wieczna i niezmienna. Nie jest ona wyrażona za pomocą żadnych zapisów i symboli. Po prostu jest. Wszystko, co byłoby z nią sprzeczne, nie może istnieć. Wszystko, co istnieje, podlega jej logice. Jest ona rzeczywistością najbliższą Platońskiemu światu „boskich idei”.[5]

Heller nazywa ją również „zbiorem wszystkich możliwych wynikań”, Logiką przez duże L, polem formalnym, polem wszystkich związków formalnych czy duchem racjonalności. „Zanim zaistniał człowiek i jego szare komórki, była już Matematyka i sprawowała swoje rządy nad wszystkim, co istnieje i może zaistnieć”.[6] To, co robi matematyk, jest odkrywaniem części tego pola i opisywaniem ich własności za pomocą naszego języka i symboli przez nas wymyślonych. I to jest właśnie matematyka przez małe m. Znajduje się ona w podręcznikach matematycznych, monografiach, artykułach.

> Geneza tak rozumianej matematyki oczywiście znajduje się w świecie. Pewne ważne struktury matematyczne zostały wyabstrahowane ze świata, a reszty dokonała twórcza wyobraźnia matematyków i sterowane nią czysto formalne manipulacje.[7]

Jest ona oczywiście zależna od Matematyki, bo człowiek nie może stworzyć niczego, co nie znajduje się w polu racjonalności.

> Genetycznie nasza matematyka wywodzi się z matematyczności świata. W tym sensie gdyby struktura świata była inna, mielibyśmy inną matematykę (małe m). Ale w strukturze świata nie może być żadnych elementów sprzecznych z Matematyką (duże M). Sprzeczność z Matematyką wyklucza z istnienia. Struktura świata nie ma wpływu na Matematykę. Świat może realizować tylko te możliwości, które są dopuszczalne przez pole racjonalności.[8]

---

[5] M. Heller, J. Życiński, *Wszechświat i filozofia. Szkice z filozofii i historii nauki*, Kraków 1980, Polskie Towarzystwo Teologiczne, s. 127.

[6] Tamże, s. 127.

[7] M. Heller, *Czy matematyka jest strukturą świata*, [w]: *Otwarta nauka i jej zwolennicy*, red. M. Heller, J. Urbaniec, Tarnów 1996, Biblos, s. 65.

[8] Tamże, s. 66.

Rzeczywistość matematyczna ujawnia się zatem dwojako. Przede wszystkim istnieje idealna Matematyka przez duże M, nieskończone pole racjonalności, związków logicznych, niezależne od umysłu. Człowiek nigdy nie pozna jej w całości. Jest również matematyka przez małe m, czyli aktualnie istniejące teorie matematyczne, a więc ludzki wytwór. Relacje między Matematyką a matematyką są analogiczne do relacji między światem fizycznym a teoriami fizyki.

Według Hellera, Matematyka jest pierwotniejsza od materii i od niej niezależna. Ale świat materialny jest modelem dla niektórych struktur matematycznych, warto dodać, że tylko dla niewielu. Dokładniej, my ze świata materialnego tworzymy za pomocą abstrakcji czy idealizacji modele zjawisk — modele fizykalne: to one są modelami pewnych teorii matematycznych. Które ze struktur matematycznych pasują do świata materialnego, powinno badać się za pomocą eksperymentów. Trzeba jednak podkreślić, że według Hellera to struktury, teorie bądź modele matematyczne są pierwotniejsze niż modele fizykalne. Jest tak dlatego, że przyroda, jak podpowiada nam nasze doświadczenie, jest racjonalna i, co więcej, matematyczna, więc niejako odzwierciedla niektóre z własności idealnego świata Matematyki. Nasz dostęp poznawczy do świata Matematyki (przed duże M) jest możliwy, gdyż mamy możliwość „odczytywania" ze świata fizycznego niektórych ze struktur, a dodatkowo, nasz umysł jako racjonalny również te związki może rozpoznawać. Mamy poza tym, oczywiście, dostęp do świata matematyki przez małe m, w którym znajdują się zobiektywizowane nasze teorie matematyczne, i ten świat możemy twórczo rozwijać i przekształcać. Świat ten jest bowiem w swym istnieniu od nas zależny. W tym ujęciu znikają trudności epistemologiczne: do Matematyki mamy dostęp poznawczy przez świat fizyczny, w którym niektóre struktury stanowią modele dla struktur matematycznych z pola racjonalności.

Heller koncentruje się bądź na związkach wynikania logicznego (pole racjonalności), bądź na relacjach. Jego platonizm wydaje się zatem raczej platonizmem bezobiektowym niż obiektowym. Tego typu stanowisko stwarza jednak dodatkowe trudności w stosunku do tych, które niesie ze sobą każda koncepcja platońska. Pomija bowiem takie obiekty matematyczne, które stanowią „jednostkowe" przedmioty, jak wymienione przeze mnie „patologiczne" matematyczne obiekty. Tym samym nie uwzględnia w pełni całego obszaru zainteresowań matematyków.

4. ISTNIENIE POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Ponieważ bliższy jest mi platonizm obiektowy niż bezobiektowy (strukturalizm), więc dokonam innego niż Heller podziału matematyki na platońską rzeczywistość i świat matematyki przez małe m, na plan pierwszy wysuwając obiekty matematyczne, a nie struktury.

Proponując własną koncepcję, od razu zaznaczę, że problemy związane z odrzuceniem monizmu ontologicznego nie stanowią dla mnie rzeczywistych trudności.

Zdaję sobie jednak sprawę, że tak samo jak w wypadku innych fundamentalnych rozstrzygnięć metafizyczno-epistemologicznych jesteśmy skazani przy wyborze między monizmem ontologicznym a pluralizmem bytowym na „akt wiary". Przedstawiając poniższą propozycję, opieram się na swoich intuicjach ukształtowanych przez kontakt z matematyką. Oprócz tych intuicji, nie mam innych argumentów na uzasadnienie swych poglądów.

Według mnie, istnieje istotna różnica między na przykład konkretnymi liczbami naturalnymi, jak: dwa, pięć, 10^{10}, a pojęciem liczby naturalnej; między funkcjami $y=\sin(x)$, $y=e^x$, $y=2x^2+3x-4$ a pojęciem funkcji. Istnienie tej różnicy jest spowodowane tym, że pewne pojęcia matematyczne bardziej niż inne przypominają konkretne przedmioty, że niektóre z nich można niejako „wziąć do ręki", na przykład: liczbę 5, funkcję $y=2x^2+3x-4$, relację mniejszości wśród liczb naturalnych, pierścień liczb całkowitych. Natomiast pojęcia: liczba naturalna, funkcja, relacja, pierścień, przestrzeń liniowa wyróżniają całe klasy obiektów o tych samych, z jakiegoś punktu widzenia, interesujących nas własnościach. Dlatego pojęcia matematyczne dzielę na dwie wyraźnie odmienne klasy. Do pierwszej zaliczam te pojęcia, które można potraktować jak konkretne obiekty. Do drugiej zaś te, które odgrywają analogiczną rolę jak pojęcia ogólne w języku naturalnym.

Kryterium uznania danego pojęcia za konkretny obiekt jest sprawdzenie, czy jest możliwe potraktowanie go jako elementu pewnego zbioru, wykonanie na nim jakichś operacji czy manipulacji. Jeśli tego nie jesteśmy w stanie uczynić, to pojęcie takie trzeba uznać za nazwę ogólną.

Ponieważ określone, konkretne zbiory również mogą stać się elementami nowego zbioru, nie widać więc powodu, by i one nie mogły zostać potraktowane jak obiekty. Na zbiorach czy strukturach matematycznych można również wykonywać pewne działania, stąd konkretne zbiory, konkretne struktury czy inne tego typu pojęcia trzeba potraktować tak jak przedmioty. Natomiast pojęcia, takie jak: zbiór, funkcja, liczba naturalna, pierścień, grupa nazywają klasy obiektów matematycznych podobnych pod jakimś względem. Spełniają zatem funkcję pojęć takich, jak: człowiek, drzewo, dom z języka naturalnego. W tym kontekście pojęcia z grupy pierwszej można potraktować analogicznie do nazw własnych z języka potocznego.

W pierwszej grupie znajdują się zatem takie pojęcia, jak: konkretne liczby (na przykład liczba 5 czy π), konkretne działania (na przykład dodawanie liczb naturalnych), konkretne funkcje (na przykład funkcja $y=3x^2$), konkretne struktury algebraiczne (na przykład pierścień liczb całkowitych, ciało liczb zespolonych). Do drugiej grupy należy zaliczyć na przykład pojęcia: liczba naturalna, funkcja, grupa, pierścień, ciało algebraicznie domknięte, działanie, homomorfizm.

Bliższa analiza pojęć z powyższych dwóch grup pozwala stwierdzić, że mamy do czynienia z dwoma wyraźnie różnymi sposobami ich określania i funkcjonowania. Pojęcia z pierwszej grupy są określane za pomocą definicji bądź wskazujących w jakiś sposób dane obiekty (np. liczba trzy może zostać określona jako następnik następnika jedynki, a funkcja: $y=3x^2$ za pomocą właśnie tego wzoru), bądź podających ich konstrukcję (np. liczbę e można zdefiniować jako granicę ciągu: $a_n= (1+1/n)^n$). Z kolei pojęcia z drugiej grupy z reguły określane są za pomocą definicji podających szereg warunków, które powinien spełniać konkretny obiekt, aby być na przykład funkcją, grupą,[9] ciałem uporządkowanym, homomorfizmem. Może też być podany schemat konstrukcji prowadzący do utworzenia nowego obiektu określanego daną nazwą, jak ma to miejsce np. w wypadku grupy ilorazowej.

Różne są też sposoby funkcjonowania pojęć. Obiekty z pierwszej grupy mogą zostać elementami pewnego zbioru, należeć do dziedziny funkcji, można na nich wykonywać określone operacje. Tych własności nie posiadają pojęcia z grupy drugiej. Na przykład, konkretne liczby naturalne mogą utworzyć zbiór liczb naturalnych, konkretne funkcje zmiennej rzeczywistej mogą utworzyć zbiór funkcji zmiennej rzeczywistej, konkretne pierścienie mogą utworzyć zbiór pierścieni czy kategorię pierścieni. Natomiast samo pojęcie funkcji, pierścienia czy liczby nie staje się elementem jakiegoś zbioru, który byłby interesujący z matematycznego punktu widzenia. Zatem w przeciwieństwie do pojęć z grupy pierwszej nie mogą być one traktowane jak konkretne obiekty. Pojęcia z grupy pierwszej natomiast stają się przykładami konkretnych obiektów, którym można przypisać ogólną nazwę, na przykład pierścień wielomianów o współczynnikach całkowitych jest przykładem pierścienia, przestrzeń kartezjańska R^7 przykładem przestrzeni topologicznej bądź metrycznej, zbiór Mandelbrota lub zbiór Cantora są przykładami fraktali.

Zatem to, co może być elementem jakiegoś zbioru, można uważać za konkretny obiekt matematyczny, natomiast to, co jest tylko nazwą dla pewnej klasy przedmiotów o wspólnych własnościach, stanowi pojęcie ogólne i odgrywa inną rolę w matematyce niż „pojęcia konkretne".

Skoro można wyróżnić dwie kategorie pojęć matematycznych, więc sugeruje to, że i w odniesieniu do sposobów ich istnienia można różnie je potraktować i przypisać im odmienne sposoby istnienia.

Obiekty z pierwszej grupy znajdują się w idealnym świecie obiektów matematycznych, istnieją niezależnie od nas i od świata materialnego, choć niektóre z przedmiotów fizycznych czy struktur występujących w przyrodzie mogą mieć cechy odzwierciedlające własności tych idealnych obiektów. Zatem poznanie zmysłowe może pomóc w poznaniu konkretnych obiektów matematycznych. Natomiast pojęcia z grupy drugiej wydają się tworem matematyka. To matematyk wydziela pewne wspólne własności przedmiotów matematycznych, łączy je w jedną klasę i nadaje im wspólną nazwę. To matematyk układa aksjomaty określające cechy, które pozwalają utworzyć dane pojęcie. To matematyk dokonuje abstrakcji i idealizacji, z tym że mamy tu do czynienia z procesem, którego punktem wyjścia nie są przedmioty materialne (jak

[9] Np. grupą jest dowolny niepusty zbiór A z dwuargumentowym działaniem $\circ$ spełniającym następujące warunki: działanie to jest łączne ($a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$), istnieje dla niego element neutralny (istnieje takie e, że dla dowolnego a ze zbioru A: $a\circ e=e\circ a=a$), dla dowolnego elementu z A istnieje do niego element odwrotny (dla dowolnego a istnieje takie b, że $a\circ b=b\circ a=e$).

miało to miejsce w wypadku tworzenia pierwszych pojęć matematycznych), lecz obiekty matematyczne. W związku z tym pojęciom z grupy drugiej należy przypisać istnienie związane w jakiś sposób z umysłem matematyka. W pojęciach tych bowiem wyraźnie widać rolę matematyka w ich tworzeniu. Oczywiście w odniesieniu do tych pojęć mamy do czynienia również ze swego rodzaju wyemancypowaniem się, z ich obiektywizacją. Widać jednak tu istotną rolę, którą odegrał matematyk, uogólniając i znajdując wspólne własności pewnych klas konkretnych obiektów.[10]

Obiekty z grupy pierwszej istnieją zatem obiektywnie, niezależnie od świata fizycznego i od umysłu matematyka. Natomiast pojęcia z grupy drugiej są tworami matematyka, gdyż to on grupuje określone obiekty matematyczne w poszczególne klasy, wybierając podstawowe własności, które służą do wyróżnienia tych obiektów, i nadaje nazwy tym klasom.

Podział pojęć matematycznych na różne klasy usuwa część trudności platonizmu, przede wszystkim natury epistemologicznej. Poznawanie pojęć matematycznych rozpoczyna się bowiem od doświadczania rzeczywistości materialnej, gdyż odzwierciedlają się w niej pewne struktury matematyczne. Stanowi to punkt wyjścia tworzenia matematyki — matematyki przez małe m w terminologii Hellera. Ta matematyka przez małe m jednocześnie obiektywizuje się i niejako zaczyna rozwijać się już samodzielnie, niezależnie od poszczególnych matematyków. Zatem poznawanie obiektów matematycznych, tych z idealnego platońskiego świata matematyki, zaczyna się od zmysłowego poznania świata fizycznego oraz spontanicznej idealizacji i abstrakcji pewnych własności i relacji z tego świata. Ale tworząc pojęcia matematyczne, dotykamy idealnego świata obiektów matematycznych. Zarazem tworzone przez matematyków teorie matematyczne „alienują się", obiektywizują, toteż niektóre z własności możemy uzyskać, badając matematykę przez małe m. Poprawne wyniki nie mogą być niezgodne z Matematyką, której istnienie jest jednocześnie gwarantem prawomocności tych wyników.

Problemy, które wynikają z istnienia zdań niezależnych, jak na przykład hipoteza *continuum*, wynikają raczej z tego, że nie potrafimy tak zdefiniować uniwersum zbioru, by istniał dla niego model standardowy. Można powiedzieć, że nie wiemy w pełni, co to jest zbiór. Określenie zbioru, że jest to to, o czym mówią aksjomaty na przykład teorii mnogości Zermelo–Fraenkla, jest za słabe, by rozstrzygać wszystkie problemy.

Przy powyższej interpretacji można jednak zadać zasadne pytanie, czy w ogóle jest sens przyjmować istnienie platońskiego świata obiektów matematycznych, czy nie wystarczy ograniczenie się do matematyki przez małe m. Wydaje się jednak, że

[10] R. Penrose dzieli struktury matematyczne na „dzieła Boże" (*God given*) i „dzieła ludzkie" (*human made*). Te pierwsze mają o wiele bogatszą strukturę i dają znacznie więcej wyników, niż wydawało się tkwić w założeniach wyjściowych. Natomiast „dzieła ludzkie" nie wykazują takich właściwości. Są wprowadzane, na przykład, w dowodach twierdzeń, by uzyskać konkretny cel (R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*..., s. 118). Rozróżnienie Penrose'a opiera się na odmiennych podstawach niż zaproponowane przeze mnie w niniejszym artykule.

platonizm najlepiej wyjaśnia, dlaczego przy rozwijaniu wiedzy matematycznej raczej ma się poczucie jej odkrywania, a nie tworzenia, dlaczego można mówić o prawdzie, wręcz o prawdzie absolutnej odnośnie do twierdzeń matematycznych, znika też problem istnienia rozmaitych obiektów zanim zostały odkryte, na przykład zbioru Mandelbrota.

Wyróżnienie dwóch klas pojęć matematycznych, jak się wydaje, osłabia niektóre trudności platonizmu. Jednocześnie potraktowanie obiektów matematycznych jako istniejących realnie pozwala wyjaśnić, dlaczego wiedza matematyczna ma kumulacyjny charakter, dlaczego matematyk ma poczucie odkrywania pewnej rzeczywistości, a nie jej dowolnego kształtowania. Natomiast uznanie części pojęć matematycznych za analogiczne do pojęć ogólnych z języka naturalnego uwzględnia twórczą rolę matematyka przy konstruowaniu teorii matematycznych.