

# Lange, Bogdan

---

## Znaczenie nierozróżnialności kwantów energii przy wyprowadzaniu formuły Plancka

---

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 37/1, 11-22

---

1992

Artykuł umieszczony jest w kolekcji cyfrowej Bazhum, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych tworzonej przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego.

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie ze środków specjalnych MNiSW dzięki Wydziałowi Historycznemu Uniwersytetu Warszawskiego.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.



## **Znaczenie nierozróżnialności kwantów energii przy wyprowadzaniu formuły Plancka**

Artykuł przedstawia podstawowe idee i problemy teoretyczne, które pojawiły się wraz ze sformułowaniem przez M. Plancka w 1900 r. koncepcji kwantów energii, a w konsekwencji doprowadziły do powstania statystyki kwantowej.

Przedstawiono tu pracę W. Natansona z 1911 r. będącą pierwszą (metodologicznie i merytorycznie) poprawną analizą semantyczną procedury kombinacyjnej Plancka.

Podana w artykule propozycja interpretacji wyników osiągniętych przez W. Natansona (przeprowadzona w płaszczyźnie ówczesnych badań teoretycznych mających na celu zrozumienie istoty kwantu energii) wychodzi z założenia, że wnioski wyciągnięte przez niego mają charakter uogólniający dane empiryczne i teoretyczne. Celem artykułu jest przedyskutowanie, do jakiego stopnia rozważania przeprowadzone przez W. Natansona zawierają się w ogólnym schemacie ówczesnych badań, a w jakim stopniu stanowią całkowicie oryginalną ich kontynuację i interpretację.

Problemy dotyczące uzasadnienia procedury Plancka były ówczesnie dyskutowane już wielokrotnie, jednakże analizy te ograniczały się do zagadnień związanych z weryfikacją jego formuły na promieniowanie.

Wydaje się, że przedstawione tu ujęcie problematyki badawczej (związanej z teorią Plancka) zaproponowane przez W. Natansona stanowi punkt wyjścia dla wszelkich późniejszych koncepcji ukazujących statystyczny charakter fizyki kwantowej. Uświadomienie sobie tego faktu oraz konkretne przedstawienie istoty statystyki kwantów mogłoby posłużyć do wzbogacenia już istniejących opracowań dotyczących determinizmu i indeterminizmu w fizyce współczesnej.

Działania, które W.Natanson podjął – zabiegi o pogłębienie zrozumienia i uzasadnienia procedury zastosowanej przez M.Plancka do zagadnienia promieniowania ciała czarnego – przyniosły pozytywne rezultaty. Jako pierwszy wskazał bowiem w 1911 r. na uświadomienie sobie przez fizyków konieczności przyjęcia założenia o nierozróżnialności kwantów energii (co było podstawą procedury zastosowanej przez Bosego w 1924) i rezygnacji z dotychczasowych założeń filozoficznych.

Interesujące jest stanowisko L.Infelda wobec wyników W.Natansona.

Stwierdził on, że „Naukowo był blisko, bardzo blisko wielkich odkryć, np. sformułowania statystyki Bosego”. „Władysław Natanson – pisze H.Kangro – był pierwszym, który wskazał na przyczynę z powodu której statystyka Plancka musi różnić się od statystyki klasycznej”. Z kolei, zdaniem A.Hermannna, to właśnie W.Natanson (obok M.Plancka, A.Einsteina i P.Ehrenfesta) należał do tych pierwszych uczonych, którzy stworzyli podstawy dla głębszego (mającego charakter filozoficzny) zrozumienia istoty statystyki kwantowej.

Jednym z pierwszych zjawisk niewytłumaczalnych na gruncie fizyki klasycznej był rozkład promieniowania ciała doskonale czarnego.

Przytoczymy pokrótce zarys historii formowania się teorii tego zjawiska.

W 1858 r. szkocki fizyk B.Stewart, badając „ciepło promieniste”, wysunął pogląd, że absorpcja płytki równa się jej emisji i to dla wszystkich rodzajów ciepła. Ważnym momentem w badaniach nad promieniowaniem było ponadto opracowanie przez niemieckiego fizyka G.R.Kirchhoffa w 1859 r. metodyki analizy spektralnej. W 1859 r. Kirchhoff sformułował prawo wyrażające, że dla promieniowania o ustalonej długości fali i ciała o ustalonej temperaturze stosunek zdolności promieniowania (mocy emisyjnej) do zdolności pochłaniania (mocy absorpcyjnej) jest wielkością stałą dla wszystkich ciał. Stosunek tych wielkości  $\phi(\lambda, T)$  jest pewną uniwersalną (jednakową dla wszystkich ciał) funkcją długości fali i temperatury określoną jako stosunek mocy emisyjnej do absorpcyjnej  $E/A$ . Z faktu uniwersalności funkcji  $\phi(\lambda, T)$  wnoszono, że można znaleźć jej rozkład wychodząc z rozważań teoretycznych. Jednak próby określenia rozkładu tej funkcji (oparte na termodynamice i optyce) nie dały pozytywnych rezultatów.

Istotny jest fakt wprowadzenia przez Kirchhoffa pojęcia ciała doskonale czarnego, dla którego moc absorpcyjna wynosi  $a = 1$ . Według niego pojęcie ciała doskonale czarnego (będące idealizacją dla eksperymentu) równoważne jest wnętrzu zamkniętej wnęki o ściankach nieprzepuszczalnych dla światła.

Z kolei w 1884 r. L. Boltzman, wychodząc z drugiej zasady termodynamiki i teorii ciśnienia promieniowania, wyprowadził teoretycznie prawo J. Stefana. Prawo to określa ilość energii emitowanej w danej temperaturze przez ciało czarne. Wyprowadzone zostało ono na drodze eksperymentalnej przez J. Stefana w 1879 r.

Dalsze badania nad promieniowaniem ciała doskonale czarnego doprowadziły do sformułowania przez Wiena w 1894 r. tzw. prawa przesunięć. Wien badając funkcję  $\varphi(\lambda, T)$  i wychodząc z termodynamiki, elektrodynamiki i optyki określił jej postać.

Doświadczenia Lummera i Pringsheima potwierdziły prawo Wiena, jednakże okazało się, że dla dużych  $\lambda$  zauważono odstępstwa. Następnie w 1896 r. Wien podał nowe wyrażenie dla funkcji  $\varphi(\lambda, T)$ , które także nie było zadowalające w konfrontacji z doświadczeniami. Tak więc w dalszym ciągu nie znaleziono funkcji  $\varphi(\lambda, T)$  przy zastosowaniu metod fizyki klasycznej. Prawo rozkładu energii w widmie dla fal krótkich i długich pozostawało w dalszym ciągu sprawą otwartą. M. Laue określa prawo Wiena następująco: „Jego prawo przesunięcia daje – jak wykazał dalszy rozwój — właśnie tyle, ile środkami fizyki klasycznej w ogóle osiągnąć można, i prowadzi do progu teorii kwantów”<sup>1</sup>.

Rok 1900 przynosi nową oryginalną próbę określenia formuły rozkładu energii. Mianowicie Rayleigh opierając się na prawach elektrodynamiki klasycznej i fizyki statystycznej znalazł rozkład energii ciała doskonale czarnego. Zastosował on zasadę ekwipartycji energii do pola elektromagnetycznego w ten sposób, że określił w skończonym obszarze odpowiadającym długości fali  $\lambda$  przez podanie liczby oscylatorów, stojących monochromatycznych fal, zakładając, że na każdą z nich przypadają dwa stopnie swobody. Gdy zachodzi równowaga termodynamiczna, to na każdą z fal przypada średnia energia  $kT$ . Przyjęcie powyższych założeń doprowadziło Rayleigh'a do nowej postaci na funkcję  $\varphi(\lambda, T)$ .

Jednak rozkład energii przewiduje dużą gęstość energii na fale bardzo krótkie, czyli całkowita energia promieniowania jest nieskończona. Tak więc według wzoru Rayleigh'a – Jeans'a olbrzymia większość promieniowania ciała doskonale czarnego przypada na najwyższe częstotliwości, określone zostało to przez Ehrenfesta „katastrofą ultrafioletową”. W rzeczywistości jednak rozkład promieniowania ciała doskonale czarnego nie jest zgodny z tym prawem.

1 M. Laue: *Historia Fizyki*, Warszawa 1960, s. 202.





Dopiero jednak w 1900 r. Planck rozpatrując ponownie zagadnienia promieniowania ciała doskonale czarnego dokonał rewolucyjnego założenia, że energia oscylatora nie może zmieniać się w sposób ciągły i może posiadać tylko całkowite wielokrotności wielkości  $h\nu$ , gdzie  $h$  jest stałą, a  $\nu$  częstotnością oscylatora.

Tak więc, aby określić prawo rozkładu promieniowania Planck wprowadził oscylator harmoniczny jako model promieniującego i pochłaniającego atomu. Liniowy oscylator harmoniczny może znajdować się tylko w pewnych wyszczególnionych stanach, a jego energia może wynosić tylko całkowite wielokrotności  $h\nu$ . Wielkość ta określana jest jako kwant energii:

$$E = h\nu,$$

gdzie  $h$  jest pewną stałą mającą wymiar działania,  $\nu$  zaś jest częstotnością drgań promieniowania.

Wkrótce po sformułowaniu prawa Planck uważał, że oscylator emituje energię w sposób nieciągły, a może pochłaniać ją w sposób ciągły. Jednakże następnie wycofał się z tego stanowiska. Należy zaznaczyć bardzo istotny fakt, że Planck nie robił żadnych założeń w stosunku do natury promieniowania. Z tym wiąże się stanowisko Plancka, że pole elektromagnetyczne jest ciągłe i że przenoszenie energii w tym polu odbywa się w sposób ciągły.

Z powstaniem hipotezy Plancka wiąże się początek rozwoju teorii kwantów. Jak zauważa M.Jammer: „Chwilowo, bo aż co najmniej do roku 1905, nikt z fizyków w samej istocie rzeczy, nie zdawał sobie sprawy z tego, iż odkrycie Plancka dawało się porównać ze względu na swoją doniosłość jedynie z odkryciami Newtona”<sup>2</sup>.

Warto wspomnieć, że jedna z podstawowych prac z tej dziedziny napisana przez J.H.Jeans'a, opublikowana w 1904 r., nie zawierała absolutnie żadnej wzmianki o prawie Plancka. Krótko mówiąc, wprowadzenie przez Plancka stałej  $h$ , jak się wydaje, w tamtych latach uważane było jako praktyczne narzędzie metodologiczne nie mające głębszego znaczenia fizycznego, pomimo że jego prawo promieniowania bez przerwy poddawane było eksperymentalnym sprawdzeniom. Zostało ono potwierdzone przez M.Holborna i J.Valentinera, a także przez P.Warburga i H.Coblentza.

Z drugiej zaś strony, w 1919 r. P.Nernst i J.Wulf sądzili, że znaleźli odchylenie od prawa Plancka. Dalsze badania wykazały jednak jego

<sup>2</sup> M.Jammer: *The conceptual Development of Quantum Mechanics*, New York 1966, s. 23.

słuszność, zarówno z punktu widzenia eksperymentalnego, jak i teoretycznego.

Wraz ze wzrastającą ilością eksperymentalnych potwierdzeń prawa Plancka czyniono szereg prób pominięcia konkluzji Rayleigh'a bez porzucenia klasycznej mechaniki statystycznej, a w szczególności twierdzenia ekwipartycji. Przyczyną – tak jak podaje to A.H.Lorentz – było niewątpliwie to, że nie jesteśmy w stanie powiedzieć, iż mechanizm tego zjawiska został odsłonięty przez teorię Plancka oraz że trzeba przyznać, iż trudno dostrzec przyczynę podziału energii na skończone części, które nie są nawet równe, lecz różnią się od siebie, czyli że poszczególne rezonatory mają różne wielkości.

Oczywiście, ci fizycy, którzy odrzucili kwantową teorię światła Einsteina, musieli obalić dowody eksperymentalne przyjęte na korzyść tej koncepcji. Dopóki dowody eksperymentalne na istnienie interferencji i dyfrakcji służyły za podstawę do tego odrzucenia, nie można było podjąć jednoznacznej dyskusji i decyzji. Tym samym, na przełomie pierwszej dekady obecnego stulecia, podejmowano szereg prób mających na celu udowodnienie, że konkluzje A.Einsteina są błędne. Przykładem może być stanowisko wyrażone przez W.Wiena w 1913 r., w którym odrzucił on koncepcję kwantową światła Einsteina, dla przyczyn podobnych do tych na jakich opierał się A.H.Lorentz.

Natomiast fizycy, którzy stanęli po stronie koncepcji wyrażonej przez Einsteina, aby poprzeć jego ideę dotyczącą światła pojmowanego kwantowo, doszli do wniosku, że niezbędnym jest zbadać jej stosunek do koncepcji kwantowej Plancka.

Ważny krok naprzód w tym kierunku miał miejsce – jak słusznie zauważa M.Jammer – gdy dwa podobne, lecz niezależne od siebie opracowania opublikowane zostały w 1911 r.<sup>3</sup>

Otóż, P.Ehrenfest i W.Natanson wykazali, że hipoteza Einsteina o niewzajemnym nieoddziaływaniu kwantów nie prowadziła do prawa promieniowania Plancka, lecz do prawa Wiena stanowiącego szczególny przypadek tego pierwszego.

W analizie W.Natansona zawarta jest – według M.Jammera – dyskusja precyzyjnych założeń podstawowych koncepcji Plancka. Założenia poczynione przez Plancka stanowią do dziś podstawę dla wszelkich filozo-

3 Tamże, s. 50-51. Zarys problematyki dotyczącej badań nad teorią promieniowania został opracowany przede wszystkim na podstawie następujących prac: B.Średniawa: *Mechanika kwantowa*, Warszawa 1972; H.Kangro: *Early History of Planck's Radiation Law*, London 1976; A.Hermann: *The Genesis of Quantum Theory (1899-1913)*, Cambridge, Massachusetts 1971; F.Hund: *The History of Quantum Theory*, London 1974.

ficznych interpretacji podstaw mechaniki kwantowej. Analiza dokonana przez W.Natansona pozwala – jak sądzę – bliżej zrozumieć racje tych, którzy wskazują na statystyczny charakter mechaniki kwantowej i dalej płynące z tego konsekwencje.

Jak wiadomo, M.Planck przyjął, że energia nie jest nieograniczenie podzielna, lecz składa się z elementów lub jednostek nieciągłych, oraz że podstawowe cząstki materii absorbują takie ilości energii, do emitowania których są zdolne, i które są wielokrotnością jednostek ograniczonych i sprecyzowanych.

W związku z tymi założeniami, polski fizyk Władysław Natanson przyjmuje, jak to zazwyczaj czyniono, że system składa się z  $N$  niezależnych jednostek materialnych, zawierających wielkości energii:

$$0e, 1e, 2e, \dots, pe;$$

ogólnie:  $(ie)$ , gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, p$  są to liczby całkowite<sup>4</sup>.

Wyróżnione w ten sposób jednostki  $(ie)$  określa on nazwą „naczynia energii” („Energiehälter” lub „receptacles of energy”)<sup>5</sup>.

W sytuacji, gdy z  $N$  rozważanych naczyń energii  $N_0$  mają energię  $(0e)$ ,  $N_1$  posiada energię  $(1e)$ ,  $N_2$  posiada energię  $(2e)$ , a w końcu  $(N_p)$  posiada energię  $(pe)$ , przy czym  $N$  i  $p$  są ustalone, wtedy zachodzi zależność:

$$\sum N_i = N \quad (\text{I})$$

Jeżeli z kolei zawarta w systemie ilość energii wynosi  $E$ , to liczba jednostek energii w tymże systemie jest następująca:

$$n = \frac{E}{e}$$

oraz zachodzi zależność:

$$\sum_{i=0}^{i=p} i \cdot N_i = n \quad (\text{II})$$

Powyższe wyrażenie oznacza, że ilość  $n$  wszystkich jednostek energii w systemie równa się sumie iloczynów liczby jednostek energii zawartych w poszczególnych naczyniach energii przez ilość tych naczyń (rozumowanie rozciąga się na wszystkie naczynia energii).

4 L.Natanson, *Über die statistische Theorie der Strahlung*, „Physikalische Zeitschrift”, 12, 1911, s. 659-666.

5 Tamże, s. 660.

Natanson stawia pytanie, o rozkład  $n$  jednostek energii w  $N$  naczyniach energii, jeśli przyjmie się, że każda pojedyncza jednostka ma dokładnie taką samą szansę dostania się do każdego z tych naczyń<sup>6</sup>.

Zakłada on, jak poprzednio, że w  $N_0$  naczyniach energii występuje  $(0e)$  jednostek energii, że w  $N_1$  naczyniach znajduje się  $(1e)$  jednostek energii, itd., a w końcu w  $N_p$  naczyniach występuje  $(pe)$  jednostek energii.

Wszystkie przypadki, gdy spełnione są warunki (I) i (II) tworzą – według Natansona – „rodzaj rozkładu” („Verteilungsart” lub „mode of distribution”)  $n$  jednostek energii w  $N$  naczyniach energii. Oznacza on go symbolicznie w następujący sposób:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0e, 1e, 2e, \dots, pe \\ N_0, N_1, N_2, \dots, N_p \end{array} \right\} \quad (1)$$

Wprowadzenie rodzaju rozkładu nie prowadzi jednak do możliwości zidentyfikowania naczynia energii lub jednostki tejże energii. Aby wyspecyfikować ustaloną odmianę rozkładu należy – według Natansona – określić liczbę naczyń elementarnych, którym przydzielona została każda podana liczba jednostek energii. Jednakże – zaznacza on – nie jesteśmy zobowiązani do prowadzenia jakiegokolwiek kontroli odnośnie indywidualnych naczyń energii oraz do wskazania pojedynczych jednostek energii lub kontroli ich ruchu<sup>7</sup>.

Warunki zagadnienia zmieniają się jednak całkowicie, gdy przyjmujemy, że naczynia elementarne (z których składa się system) różnią się oraz gdy każde naczynie badamy osobno i jesteśmy w stanie stwierdzić jego tożsamość (odróżnić je od innych, przykładowo przypisać mu numer). Oznacza to, że rozróżniamy pojemniki zaliczone dotychczas do jednej grupy.

Tak więc, gdy „pierwsze” naczynie energii zawierać będzie  $n_1$  jednostek energii, „drugie” naczynie energii zawierać będzie  $n_2$  takich jednostek oraz gdy w stosunku do pozostałych naczyń zachodzi analogiczna sytuacja, to – według Natansona – w systemie przewodzi następujący „rodzaj układu” („Anordnungsart” lub „mode of collocation”):

$$\left\{ \begin{array}{l} I, II, III, \dots, N \\ n_1, n_2, n_3, \dots, n_N \end{array} \right\} \quad (2)$$

6 Tamże, s. 660.

7 Tamże, s. 660.

gdzie  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$  są to liczby całkowite i posiadają wartości:  $0, 1, 2, 3, \dots, p$ . Natanson wprowadził tu numerację podprzedziałów (poprzednio występowała numeracja przedziałów).

W rzędzie liczb  $n_1, n_2, n_3, \dots, p$ , liczba  $0$  występuje  $N_0$  razy, liczba  $1$  występuje  $N_1$  razy, a liczba  $p$  występuje  $n_N$  razy. Opierając się na powyższych wnioskach, Natanson wprowadził wielkość:  $U/N!$ , która określa liczbę kolokacji (Anzahl der Anordnungsarten), czyli liczbę rodzajów układów z rozkładu (1). Liczba układów (kolokacji) wyrażona jest przez równanie:

$$U(N) \prod_{i=0}^{i=p} N_i! = N! \quad (3)$$

Wprowadzając powyższe zależności, odnoszące się do „układów” (kolokacji), W. Natanson przyjął, że można badać poszczególne naczynia energii, czyli że naczynia energii są rozróżnialne. Jednakże jednostki energii traktuje on jako elementy, które nie różnią się między sobą (są nierozróżnialne)<sup>8</sup>. W tym miejscu, w analizie Natansona statystycznego ujęcia zagadnienia promieniowania, po raz pierwszy pojawia się kwestia nierozróżnialności elementów (kwantów) energii.

W dalszym ciągu rozważań W. Natanson przyjmuje, że jeśli każdą z jednostek energii bierze się pod uwagę, wówczas warunki zagadnienia ulegają zmianie. Dlatego też fakt ten należy uświadomić sobie przede wszystkim i traktować go jako zasadę procedury badawczej<sup>9</sup>.

Przyjmując, że  $n_1$  ustalone jednostki energii (oznaczone jako  $a, b, c, \dots$ ) zawarte są w pierwszym naczyniu (I),  $n_2$  jednostki energii ( $f, g, h, \dots$ ) zawarte są w drugim naczyniu (II) i analogicznie  $n_N$  jednostki energii występują w  $N$ -tym naczyniu (N), itd., taki stan systemu Natanson nazywa „rodzajem asocjacji” („Zuordnungsart” lub „mode of association”) i oznacza go symbolicznie:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} I & II & III & \dots \\ a, b, c, \dots & f, g, h, \dots & i, j, k, \dots & \dots \end{array} \right\} \quad (4)$$

W. Natanson przyjmuje, że wielkość  $B(N_0, N_1, N_2, \dots, N_p)$  określa liczbę asocjacji (Anzahl der Zuordnungen) obejmującą układ (2).

<sup>8</sup> Tamże, s. 660.

<sup>9</sup> Tamże, s. 660.

Wartość wielkości  $B/N$  określona jest przez równanie:

$$B(N) \cdot \prod_{i=0}^{i=p} (i!)^{N_i} = n! \quad (4a)$$

Wprowadzona przez W. Natansona wielkość  $B/N$  określa liczbę wszystkich rozkładów (liczbę obsadzeń)  $n$  rozróżnialnych kwantów w  $N$  rozróżnialnych naczyniach (podpoziomach) energii.

Wartość  $B/N$  zależy jedynie od  $N_0, N_1, N_2, \dots, N_p$ , czyli – według Natansona – każdy rodzaj rozkładu (mode of distribution) obejmujący  $U$  układy energii (mode of collocation) zawiera  $UB$  asocjacji energii (mode of association)<sup>10</sup>.

Postępowanie Natansona prowadzi w końcu do sformułowania wyrażenia na prawdopodobieństwo jakiegokolwiek podanego rozkładu. Według niego, wyrażenia na prawdopodobieństwo zależą całkowicie od tego, jaką podstawę wybierze się dla przeprowadzonego rachunku. Dlatego też, aby obliczyć prawdopodobieństwo dla rozkładu (1) powinno się uwzględnić układy  $N$ , które spełniają równanie (3). Tak więc prawdopodobieństwo dla powyższego rozkładu jest następujące:

$$P_U = \frac{U}{\Sigma U} \quad (5)$$

Wyrażenie powyższe określa prawdopodobieństwo wystąpienia konkretnej energii dla całego systemu (przy ustalonej liczbie rozróżnialnych naczyń energii z konkretnymi ilościami nierozróżnialnych jednostek energii w każdym z nich). Z drugiej strony (wracamy do zagadnienia rozróżnialnych kwantów energii), jeśli za podstawę obliczeń przyjmie się układy asocjacji (mode of association), to aby wyznaczyć prawdopodobieństwa dla rozkładów, należy ustalić liczbę asocjacji, którą one zawierają. Wtedy prawdopodobieństwo dla rozkładu (1) jest:

$$P_B = \frac{U \cdot B}{\Sigma U \cdot B} \quad (6)$$

Z powyższego widać, że jest to prawdopodobieństwo wystąpienia konkretnej energii dla całego systemu (przy ustalonej liczbie rozróżnialnych naczyń energii z konkretnymi ilościami rozróżnialnych jednostek energii w każdym z nich), ponieważ układ zawierający  $n$  kwantów ma konkretną energię.

<sup>10</sup> Tamże, s. 661.

Procedura M. Plancka, która doprowadziła go do opracowania prawa promieniowania ciała doskonale czarnego, była oparta na zasadzie, według której prawdopodobieństwo dla ustalonego rodzaju rozkładu energii (dla rozkładu (1) powinno być zdefiniowane jako stosunek liczby  $U$  kolokacji dla rozkładu korzystnych układów do liczby  $\Sigma U$  układów, która przy ustalonych warunkach dla  $n$  i  $N$  jest możliwa.

W. Natanson zwrócił uwagę na fakt, że wszystkie wywody (jakie ówczesnie przeprowadzano) dotyczące wzoru Plancka oparte są na powyższej zasadzie<sup>11</sup>. Jednakże – zauważa on – podniesiono wobec tej zasady szereg zastrzeżeń. Widocznie nie jest wystarczające – według Natansona – określać liczby układów, lecz należałoby również dowieść, że różne układy mają równe szanse realizacji. Zakłada się w procedurze obliczania prawdopodobieństwa, że naczynia energii (podpoziomy) mogą być traktowane jako zidentyfikowane oraz jednostki energii (które pod każdym względem są sobie równe) mogą być potraktowane jako niezidentyfikowane (nierozróżnialne). W. Natanson proponuje przyjąć powyższe założenie jako podstawowe dla statystycznej teorii promieniowania<sup>12</sup>.

Zauważa on, że sytuacja, w której omawianym okolicznościom nie nadano dostatecznego znaczenia, doprowadziła do braku głębszego, teoretycznego uzasadnienia procedury Plancka, stosowanej do obliczania prawdopodobieństwa<sup>13</sup>. Procedura Plancka nie miała innego uzasadnienia, poza powołaniem się na wyniki doświadczeń, stanowiące podstawę dla wywodów rachunkowych. M. Planck przyjął jako punkt wyjścia, całkowicie ustalone prawo dla oceny szans i w wyniku szczegółowego powołania się na doświadczenia stwierdził a posteriori, że założenie jest słuszne. Jednakże nie podejmowano ówczesnie prób udowodnienia słuszności tego założenia przez przyjęcie ogólniejszej podstawy rozważań. Tak więc procedura Plancka nie miała własnego filozoficznego kontekstu uzasadnienia. W sytuacji, gdy przyjmuje się, że indywidualne jednostki energii nie posiadają właściwości „nierozróżnialności” przestaje obowiązywać prawo ustalone przez Plancka, które jednak zostało przyjęte przez ogół fizyków zajmujących się tym zagadnieniem.

Przyjęcie wspomnianego założenia, czyli określenie prawdopodobieństwa na podstawie wyrażenia (6) nie prowadzi do wzoru Plancka.

11 Tamże, s. 662.

12 Tamże, s. 662.

13 Tamże, s. 662.



Wykazanie *explicite* przez W.Natansona powyższej konsekwencji z założenia o „rozdzielności” jednostek energii (kwantów), miało zasadnicze znaczenie dla posunięcia badań nad ugruntowaniem uzasadnienia procedury Plancka, a jednocześnie wskazywało na okoliczności dlaczego procedura Plancka musi różnić się od procedury klasycznej Boltzmanna<sup>14</sup>.

Ponieważ prawdopodobieństwa są różne, czyli inaczej uzależnione od  $N_i$ , przeto (5) prowadzi do prawa Plancka, natomiast (6) nie prowadzi do tego prawa. W.Natanson przedstawił na konkretnym przykładzie i pokazał w jakim stopniu te prawdopodobieństwa różnią się co do wartości.

W.Natanson pierwszy wskazał na istotną rolę nierozróżnialności elementów energii i podał *explicite* formuły na prawdopodobieństwo statystyczne (rozumiane jako częstość występowania w zbiorze jednakowych kwantów) rozkładu  $n$  kwantów na  $N$  podpoziomach (naczyniach) energii w dwóch przypadkach:

a) gdy kwanty są nierozróżnialne a naczynia (podpoziomy) energii są rozróżnialne;

b) gdy kwanty są rozróżnialne i naczynia energii (podpoziomy) są rozróżnialne.

W.Natanson opierał się niewątpliwie na matematycznych wywodach Plancka z lat 1900-1910, prowadzących do jego formuły na promieniowanie. M.Planck nie pisze jednak wprost o roli i znaczeniu nierozróżnialności kwantów w uzasadnieniu tejże procedury. Różni się Planck od Natansona także i tym, że nie odróżnia on „kolokacji” od „asocjacji”. Natanson bowiem bardzo wyraźnie podkreśla w omawianej pracy odmiennosć tych układów i wynikające z tego konsekwencje. Tak więc, dokonana przez W.Natansona analiza semantyczna teorii Plancka jest ważnym wkładem w interpretację filozoficzną fizyki kwantowej.

M.Planck przedstawił nieco później (na I Kongresie Solvayowskim w 1911 r.) pracę, w której omówił założenia i procedurę jaką zastosował w badaniach nad promieniowaniem. Następnie zreferował on sposób w jaki należało zmienić klasyczną mechanikę statystyczną przy rezygnacji z prawa Rayleigh’a – Jeans’a i wprowadzeniu jego prawa promieniowania<sup>15</sup>.

14 Zob. H.Kangro: *Early history of Planck's radiation law*, London 1976, s. 219.

15 M.Planck: *Die Gesetze der Wärmestrahlung und die Hypothese der elementaren Wirkungsquanten*, (w:) *Die Theorie der Strahlung und der Quanten Verhandlungen auf einer von E.Solvay einberufenen Zusammenkunft*, Halle 1914, s. 77-94. Zob. też P.Langevin: *M.de Broglie, La Théorie du Rayonnement et les Quanta*, Paris 1912. Szerzej o tym: J.Mehra: *The Solvay Conferences on Physics*, Dordrecht — Boston 1975, s. 24-40.

Warto dodać tu uwagę wyrażoną przez wybitnego znawcę genezy i rozwoju teorii kwantów P.Hunda, że: „Podstawy obliczeń Plancka ujawnione zostały przez niego samego w 1906 r. i przez W.Natansona w 1911r.”<sup>16</sup>. Trzeba jednak pamiętać o tym, że problem nierozróżnialności kwantów pojawia się po raz pierwszy w cytowanej pracy Natansona.

Do tak postawionego problemu nierozróżnialności kwantów Planck ustosunkował się na wspomnianym I Kongresie Solvayowskim. W wystąpieniu swoim Planck wskazał na doniosłość analizy przeprowadzonej przez Natansona: „Diese Berechnung ist vollkommen eindeutig und enthält insbesondere nichts mehr von der Unbestimmtheit, welche L.Natanson neuerdings mit Recht zur Sprache gebracht hat”<sup>17</sup>.

---

16 F.Hund: *The History of Quantum Theory*, London 1974, s. 27.

17 M.Planck: dz. cyt., s. 85.