Wójcik, Wiesław

Filozofia matematyki na przełomie XIX i XX wieku

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 40/4, 49-74

1995

Wiesław Wójcik
(Sosnowiec)

FILOZOFIA MATEMATYKI NA PRZEŁOMIE XIX I XX WIEKU

WPROWADZENIE

Druga połowa XIX wieku była okresem znaczącego rozwoju matematyki. Powstały teorie, niosące ze sobą nowe rozumienie matematyki poprzez wprowadzenie jej na nieznane obszary badań i dostarczenie nowych metod badawczych. Rozbudowywujący się gmach wiedzy matematycznej stracił pierwotną jedność i zaczęły powstawać sprzeczności (np. antynomie teorii zbiorów).

To wszystko skłaniało uczonych do poszukiwania nowych filozoficznych interpretacji rozwoju i struktury matematyki oraz podjęcia badań w ramach samej matematyki, w celu usunięcia nawarstwiających się sprzeczności. Wielu ówczesnych matematyków, oprócz działalności *stricte* matematycznej, zajmowało się refleksją nad strukturą matematyki i mechanizmami jej rozwoju. Wyniki tych filozoficznych refleksji bardzo często miały wpływ na tworzone przez tych uczonych teorie matematyczne. Tak było, między innymi, w przypadku Cantora, Poincarégo, Brouwera czy Hilberta.

Przełom wieków XIX i XX był zarazem okresem pogłębiającego się rozdziału między matematyką a refleksją filozoficzną. Wizja świata, jaką daje matematyka, przestała być podstawą budowanych koncepcji ontologicznych praktycznie od początku XX wieku[1]. Ten „triumf" pozytywizmu dotyczył również rozdziału pomiędzy filozofią matematyki a historią matematyki. W tej pracy chciałbym zająć się analizą epistemologicznych aspektów filozofii wyżej wymienionych matematyków, aby dostrzec **formalne** przyczyny tego rozdziału. Skoncentruję się na wskazaniu miejsca i roli elementów apriorycznych w strukturze teorii matematycznych i pokażę, że elementy aprioryczne, przyjmowane przez każdego

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 40: 1995 nr 4 s. 49–74

z tych matematyków były odmienne i pełniły nieco inne funkcje. Te aprioryczne elementy były przyjmowane przy pomocy odpowiednio rozumianego „intuicyjnego oglądu" i pochodziły z pozamatematycznych źródeł, mimo że posiadały wyraźne odpowiedniki w strukturach matematycznych. Zobaczymy to dokładniej w przypadku analizy konkretnych koncepcji filozoficznych.

Konstrukcja tego artykułu (ukazuje ona zarazem schemat pewnej metody badań w ramach historii nauki) wygląda następująco. W oparciu o wybrane elementy z historii nauki konstruuje się pewien (uproszczony) model epistemologiczny budowy i rozwoju wiedzy. Następnie, analizowane koncepcje filozofii nauki „przycina się" do tak otrzymanego modelu – dzięki temu możliwe staje się porównanie tych koncepcji ze sobą w ramach zarysowanych preferencji historycznych, bez potrzeby wchodzenia w nieistotne w tych rozważaniach szczegóły. Analizowane koncepcje filozofii nauki pozwalają zarazem na pełniejsze zrozumienie wcześniej zarysowanego modelu epistemologicznego.

Analizy przeprowadzane w tym artykule opierają się na założeniu, że leżące u podstaw danej teorii naukowej struktury aprioryczne są decydujące dla uchwycenia istoty filozofii budowanej w oparciu o tę teorię – istotne jest przy tym wskazanie w przypadku danej koncepcji konkretnych struktur apriorycznych. Tym samym struktury aprioryczne są miejscem kontaktu nauki i filozofii. Szczególnie wyraźnie widać to na przykładzie filozofii nauki Poincarégo. Dla Poincarégo, na przykład, struktury te są utworzone przez matematyczne pojęcie grupy oraz tzw. zasadę indukcji apriorycznej – tak w jego refleksji filozoficznej, jak również w tworzeniu nowych teorii matematycznych i fizycznych pojęcie grupy i zasada indukcji apriorycznej tworzą podstawową metodę heurystyczną oraz są istotnym składnikiem koncepcji (dzięki nim powstają pojęcia, twierdzenia i prawa naukowe wchodzące w skład danej teorii naukowej). Okazuje się, że struktury aprioryczne są odpowiedzialne za kontakt teorii naukowej z szeroko rozumianą rzeczywistością i wręcz umożliwiają ten kontakt. W konsekwencji, w przeprowadzanych w tej pracy analizach, nie tyle istotne są fakty z historii matematyki czy koncepcje filozoficzne, co obszar styku filozofii i historii nauki, to miejsce „iskrzenia" pomiędzy faktami a filozofią. Sądzę, że dokładniejsze zbadanie tych spraw byłoby rzeczą bardzo interesującą. Ten artykuł jest raczej próbą naświetlenia tego problemu i pretenduje co najwyżej do cząstkowych „rozwiązań".

PODSTAWOWE STRUKTURY POZNANIA

Na początku chciałbym przedstawić pewną ogólną koncepcję epistemologiczną (nazwę ją teorią podstawowych struktur poznania), która posłuży mi do uchwycenia i przeanalizowania roli elementów apriorycznych w różnych systemach filozofii matematyki. Za „podstawę empiryczną" budowanej teorii posłużą mi pewne elementy z historii nauki.

Zaczniemy od matematyki pitagorejczyków, w której kluczową rolę pełniło pojęcie liczby, jako miary wszechrzeczy, tzn. według pitagorejczyków każda rzecz jest określona przez liczbę (lub układ liczb) natomiast funkcjonowanie świata (wszelkie związki pomiędzy rzeczami) określają stosunki i proporcje liczbowe. Metoda, którą stosowali pitagorejczycy opierała się na możliwości przejścia od „zamkniętego" świata liczb, mającego przyczynę w jedności, do świata zmysłowego (i na odwrót). Metoda ta pozwalała przypisywać pewnym obiektom (stanom fizycznym) ustalonych liczb (stosunków liczbowych) oraz zakładała, że liczbom i stosunkom liczbowym, cechującym się doskonałą harmonią, muszą odpowiadać obiekty świata zmysłowego mające odpowiednio dużą rangę i znaczenie[2].

Pięknym przykładem pochodzącym ze szkoły pitagorejskiej jest złoty podział odcinka. Wyraża się on następującą proporcją: stosunek długości odcinka do długości części większej podziału jest równy stosunkowi długości części większej do mniejszej. Zgodnie z metodą pitagorejską temu podziałowi muszą odpowiadać w przyrodzie pewne obiekty. Odnajdywanie realizacji tego podziału w przyrodzie stanowi potwierdzenie słuszności tej metody – jest to patrzenie na świat i dostrzeganie jego piękna poprzez harmonię pojawiającą się pomiędzy liczbami. Jeśli pewna liczba ma szczególnie ciekawe własności, a jakiś stosunek liczbowy cechuje się pięknem i harmonią, to wówczas ta liczba czy ten stosunek ujmuje istotę jakiegoś obiektu ze świata zmysłowego.

Zawartość rzeczywistości pokrywa się dokładnie, w metodzie pitagorejczyków, z zawartością arytmetyki, jako nauki o liczbach i proporcjach między nimi. Dlatego nie może istnieć żadne zjawisko (czy struktura), któremu nie dałoby się przypisać jakiegoś stosunku liczbowego. I tak pojawienie się w geometrii odcinków niewymiernych (a więc nie dających się wyrazić przy pomocy proporcji liczbowych) uderzało, zgodnie z metodą pitagorejską, w sens uprawiania geometrii, chyba że przyjmie się, iż podstawą matematyki, a więc i całej rzeczywistości, jest nie arytmetyka lecz np. geometria. Zauważmy, że właśnie tą drogą poszli później pitagorejczycy oraz inni matematycy greccy budując arytmetykę geometryczną (a nie jak wcześniej geometrię arytmetyczną)[3].

Jeśli w tym ujęciu świat staje się częścią matematyki, a badanie świata można sprowadzić do badania modelu świata, jaki daje matematyka, a ponadto, jeśli między strukturami świata a strukturami rzeczywistości istnieje ścisły izomorfizm – oznacza to w konsekwencji, że w teorii poznania pitagorejczyków nie występują żadne aprioryczne struktury poznawcze. Do całej rzeczywistości mamy bezpośredni dostęp poprzez intuicyjny ogląd „świata liczb".

Można natomiast mówić już o apriorycznych strukturach poznania w przypadku konstrukcji wiedzy matematycznej przez Euklidesa; dokładniej na te elementy aprioryczne wiedzy wskazuje metoda aksjomatyczno-dedukcyjna, stosowana przez tego matematyka (oraz przez większość później żyjących matematyków). Metoda ta była w dużym stopniu oparta na filozofii Platona. Według Platona jedynie istniejący jest świat idei, a świat zmysłowy jest tylko jego niedoskonałą kopią. Tylko rozum jest w stanie poznać świat idei – poznanie to jednak jest fragmentaryczne, bowiem tylko niektóre idee są „wychwytywane" przez rozum. I właśnie te nieliczne idee, które są przyjmowane przez rozum w sposób bezpośredni, stają się podstawą matematyki, a więc wiedzy, która odtwarza niepoznawalną wprost pozostałą część świata idei. Te wprost poznawalne przez rozum idee oraz pewne zależności między nimi zostają ujęte w formie pojęć pierwotnych, aksjomatów i postulatów teorii. Następuje ścisłe określenie liczby tych podstawowych elementów, na których opiera się cała konstrukcja matematyki. Stosując dedukcję możemy z przyjętych aksjomatów i postulatów otrzymać twierdzenia i nowe pojęcia, które dają dostęp do nowych obiektów świata idei i ukazują zależności pomiędzy tymi obiektami. Dzięki tej metodzie jesteśmy w stanie odtworzyć ukryty przed bezpośrednią percepcją świat idei.

Metoda aksjomatyczno-dedukcyjna wyraźnie, w istocie swojej, odróżnia się od metody pitagorejskiej, w której przez bezpośredni ogląd obiektów matematycznych otrzymywało się wiedzę na temat całej rzeczywistości. Natomiast w metodzie aksjomatyczno-dedukcyjnej bezpośredni ogląd dotyczy wyłącznie pewnej małej liczby obiektów matematycznych. Pozostałe obiekty rozum odkrywa dopiero w połączeniu z metodą dedukcyjną. Pojawiają się więc struktury aprioryczne poznania – są to struktury, w oparciu o które funkcjonuje metoda aksjomatyczno-dedukcyjna. Oznacza to, że aby poznać całą rzeczywistość trzeba posiadać struktury aprioryczne. Te platońskie struktury aprioryczne określę mianem *a priori* formalnego. W dalszej części pojawi się uzasadnienie tej nazwy.

W odróżnieniu od Platona, filozofia poznania Arystotelesa, a w konsekwencji budowana przez niego logika, zakłada istnienie dodatkowych struktur apriorycznych. Struktury te działają w ramach metody abstrakcji, odpowiedzialnej za powstawanie pojęć ogólnych, które ujmują istotę konkretnych jednostkowych rzeczy, poznawanych przez zmysły (w ramach tej koncepcji nie docieramy więc bezposrednio do żadnych bytów, w odróżnieniu od koncepcji Platona). Dzięki tak rozumianym strukturom poznawczym umysł nasz otrzymuje pojęcia określające istotę wyabstrahowaną z rzeczy jednostkowej. Te kolejne struktury aprioryczne, w odróżnieniu od wcześniej wprowadzonego *a priori* formalnego, określę mianem *a priori* intuicyjnego.

Dalsze rozwijanie osiągniętej już wiedzy jest możliwe dzięki strukturze sylogizmu – ta struktura funkcjonuje w ramach opisanego wcześniej *a priori* formalnego.

Kolejną rozbudowę struktur apriorycznych możemy zaobserwować w nauce okresu nowożytnego.

W zakresie struktur poznawczych zasadniczy zwrot następuje u Kartezjusza. Między strukturą świata a naszym umysłem pojawia się przepaść – nie możemy więc poznać struktury świata bezpośrednio. Pojawia się więc kolejna struktura aprioryczna, która umożliwia poznanie świata pozaumysłowego – ta struktura określona jest poprzez fakt pierwotnego (względem całej rzeczywistości) istnienia *cogito* i pewnych struktur poznawczych tego *cogito*.

U Leibniza natomiast te nowe struktury aprioryczne wiążą się z wprowadzonym przez tego filozofa pojęciem harmonii przedustawnej. Ta właśnie harmonia przedustawna umożliwia wszelkie poznanie, gdyż substancja w ujęciu Leibniza, to monada „bez okien", która nie ma możliwości dotarcia wprost do innej monady. Harmonia przedustawna wyraża się między innymi w prawach logiki, w zasadzie najmniejszego działania czy w zasadzie maksimum (to, co istnieje, jest najlepsze z tego, co może istnieć). Zauważmy, że projekt Leibniza budowy kombinatoryki uniwersalnej opiera się na założeniu istnienia apriorycznych struktur poznawczych. Dzięki tym strukturom otrzymujemy narzędzie, pozwalające odtworzyć w sposób czysto analityczny cały świat (według Leibniza każdy problem w ramach kombinatoryki uniwersalnej będzie można rozwiązać w sposób czysto logiczny i formalny) – umysł ludzki ma więc do dyspozycji pewne struktury aprioryczne, które pozwalają poznać (uchwycić) strukturę świata.

Aprioryczne struktury poznawcze pełnią centralną rolę w systemie Kanta. Zauważmy, że kategorie intelektu, dzięki którym budujemy wszelką wiedzę, pełnią rolę *a priori* intuicyjnego, natomiast forma doświadczenia (czas i przestrzeń) tworzą nową strukturę aprioryczną, umożliwiającą poznanie struktury świata.

Przyjrzyjmy się tym nowym strukturom apriorycznym, powstałym w nauce nowożytnej, wnikając w mechanizm ich działania na przykładzie programu z Erlangen F. Kleina. Sądzę, że ten program w idealny sposób realizuje wspomnianą wcześniej rozbudowę struktur apriorycznych okresu nowożytnego.

W 1872 roku niemiecki matematyk F. Klein ogłosił program w geometrii[4], który rzucał nowe światło na matematykę. Przyjrzyjmy się dokładniej *Rozważaniom porównawczym o nowszych badaniach geometrycznych*, gdzie Klein przedstawia swoją koncepcję.

Klein wychodzi od spostrzeżenia, że istnieją przekształcenia, które nie zmieniają własności pewnych figur geometrycznych. Za podstawowe uznaje własności geometryczne, tzn. własności niezależne od położenia, wielkości bezwzględnej i od porządku. Istnieją pewne przekształcenia (przesunięcia, obroty, symetrie, podobieństwa), które nie zmieniają własności geometrycznych. Co więcej, przekształcenia te tworzą grupę, którą Klein nazywa grupą główną. Można więc traktować geometrię elementarną jako teorię badającą te własności figur geometrycznych, które nie zmieniają się pod działaniem grupy głównej przekształceń.

Zauważmy co dzieje się, gdy zamiast grupy głównej będziemy rozpatrywać pewną jej podgrupę, np. podgrupę wszystkich przekształceń zachowujących długość odcinków (tzn. izometrii). Oczywiście, większa liczba własności figur jest zachowywana przy izometriach, niż przy przekształceniach grupy głównej (obszerniejszej od grupy izometrii). Oznacza to, że struktura przestrzeni względem grupy głównej jest uboższa (badamy mniej własności), niż struktura przestrzeni względem grupy izometrii. Można jednak sztucznie wzbogacić strukturę przestrzeni, rozpatrywanej względem grupy głównej, o dodatkowy element, który jest zarazem elementem stałym grupy izometrii (w tym przypadku tym elementem stałym jest odcinek o ustalonej długości, określający strukturę metryczną przestrzeni). Otrzymujemy tym samym dwie równoważne sytuacje:

„Jest jedno i to samo, czy utwory przestrzenne badamy ze względu na grupę główną i dołączamy do nich punkt dany czy też, gdy nie dołączając nic danego, zastępujemy grupę główną przez grupę w niej zawartą, a której przekształcenia punkt ten pozostawiają bez zmian”[5].

Powyższe rozważania prowadzą do tego, że geometria zostaje sprowadzona do teorii niezmienników danej grupy przekształceń.

„Jak długo podstawą badania geometrycznego jest ta sama grupa przekształceń, treść geometrii pozostaje niezmienną”[6].

Oznacza to, że dana ustalona grupa przekształceń jednoznacznie ustala daną geometrię, niezależnie od własności przestrzeni na której działa, np. niezależnie od wymiaru przestrzeni. F. Klein podaje jako przykład równoważność geometrii rzutowej na krzywej stożkowej oraz geometrii rzutowej na płaszczyźnie.

„Przyjmijmy na stożkowej za element parę punktów, zamiast punktu. Można ustanowić odpowiedniość między ogółem par punktów stożkowej a ogółem prostych płaszczyzny, przyporządkowując każdą tej parze punktów, w której przecina stożkową. Przy tym odwzorowaniu przekształcenia liniowe, odtwarzające stożkową, przechodzą na przekształcenia liniowe płaszczyzny (uważanej za złożoną z prostych), pozostawiające bez zmiany stożkową”[7].

Tego typu równoważności można ustalać między istotnie różnymi przestrzeniami. W tym ujęciu istotna staje się ogólna struktura (grupa danych przekształceń), którą narzucamy na badaną przestrzeń. Sama możliwość narzucenia takiej struktury determinuje już własności tej przestrzeni.

Nowy obszar struktur apriorycznych pojawia się, w przypadku programu Kleina, w ramach struktury grupy. Myślę, że po tym, co wcześniej przedstawiłem, widoczne jest, że pojęcie grupy można określić mianem *a priori* epistemologicznego. Zobaczmy z czym, w ramach przedstawionej koncepcji, ma do czynienia umysł w procesie poznania. Z pewną strukturą epistemologiczną, która jest syntezą struktury „rzeczywistości” i struktury grupy. Z całego bogactwa różnorodnych struktur pojęcie grupy wychwytuje tylko ich część. Pozostałej części rzeczywistości nasz umysł nie jest w stanie dostrzec – struktura ontologiczna świata w swojej czystej formie jest więc przed nami zakryta. To właśnie oznacza stwierdzenie Kleina, że jak długo podstawą badania geometrycznego jest ta sama grupa przekształceń, treść geometrii pozostaje niezmienną. Mamy więc do czynienia wyłącznie z pewną mieszaniną struktury ontologicznej świata i struktury *a priori* epistemologicznego. Można powiedzieć, że *a priori* epistemologiczne umożliwia racjonalny odbiór realnego świata – preparując rzeczywistość dostosowuje ją do naszych możliwości poznawczych.

Zauważmy, że *a priori* formalne oraz *a priori* intuicyjne są „oczywistymi" składnikami nauki proponowanej przez Kleina. Dzięki *a priori* intuicyjnemu możliwa jest konstrukcja pojęć ogólnych i formułowanie ogólnych praw nauki. Natomiast *a priori* formalne daje możliwość skutecznego poruszania się w świecie teorii. Oznacza to, że teoria może funkcjonować i rozwijać się niezależnie od bazy empirycznej, a następnie wykazywać zgodność z tą bazą. Zauważmy, że *a priori* epistemologiczne wyjaśnia fenomen ujmowalności świata przez rozum tzn. to, dlaczego świat w pewnej swojej strukturze staje się jawny dla umysłu. Analogicznie *a priori* intuicyjne wyjaśnia fenomen możliwości ciągłego uzgadniania budowanej teorii ze światem empirycznym.

W ramach struktur apriorycznych pojawia się „obiektywność" teorii – niezależność od struktury umysłu i od empirii. Dokładniej chodzi o to, że w oparciu o pewne ogólne pojęcia i pierwotne zasady możemy w sposób czysto (mniej lub bardziej) formalny rozbudowywać teorię abstrahując w dużym stopniu od intuicji oraz od doświadczenia. Na pytanie Kanta – jak są możliwe sądy syntetyczne *a priori*? – można odpowiedzieć wskazując na elementy aprioryczne tworzące podstawowe struktury poznania.

ELEMENTY APRIORYCZNE W FILOZOFII CANTORA

TEORIA MNOGOŚCI

Aby zrozumieć rolę elementów apriorycznych w filozofii G. Cantora, zobaczmy najpierw jakie idee leżą u podstaw teorii mnogości, stworzonej przez tego matematyka pod koniec XIX wieku.

Zacznijmy od „definicji" zbioru podanej przez Cantora:

„Przez zbiór rozumiemy zgrupowanie w jedną całość wyraźnie różnych przedmiotów naszej intuicji lub naszej myśli"; lub: „Każdy zbiór dobrze odróżnionych rzeczy może być traktowany jako jednolita rzecz dla siebie"[8].

Definicje te wydają się bardzo nieprecyzyjne. Jednak zawierają pewien istotny element. Dla Cantora do tego, aby utworzyć z pewnych elementów jakiś zbiór wystarczy mieć kryterium pozwalające rozdzielić te elementy („wyraźnie różne przedmioty naszej intuicji") – i to w zupełności wystarczy. Te elementy nie muszą mieć wspólnej własności, zezwalającej dopiero na tworzenie z nich pewnej całości. Tym samym nie znane są *a priori* własności zbioru, który otrzymamy w wyniku pewnej operacji. Te własności trzeba dopiero poznać, analizując sam zbiór i jego konstrukcję. Nowo skonstruowany zbiór może zawierać w sobie cały świat nowych, nieznanych uprzednio, własności.

Zobaczmy jak w tym ujęciu powstaje zbiór liczb naturalnych. Jeśli przyjmujemy zasadę, że do utworzenia jakiegoś zbioru trzeba znać własności jego elementów, to wtedy pojęcie zbioru (wszystkich) liczb naturalnych nie ma sensu. Wynika to z tego, że z powodu nieskończonej ilości liczb naturalnych nie możemy znać własności ich wszystkich. Stąd brało się odrzucenie nieskończoności aktualnej, jako takiego pojęcia, które przeczyło tej zasadzie. Zgodnie z definicją Cantora nie ma przeszkód dla utworzenia zbioru liczb naturalnych – są rozróżnialne i to wystarczy. Fakt rozróżnialności liczb naturalnych wynika z tego, że każda z nich „składa się" z różnej liczby jedynek. Mimo tego, że nie znamy własności wszystkich liczb naturalnych, to jednak znamy zasadę tworzenia kolejnych dowolnie dużych liczb. Liczby naturalne tworzą więc pewną strukturę – tę strukturę możemy traktować jako obiekt matematyczny, będący nową jakością w stosunku do tworzących go elementów.

Spójrzmy jak dalej działa „zasada Cantora" konstrukcji zbiorów. Otrzymawszy, zgodnie z powyższą zasadą, całą rodzinę zbiorów szukamy najprostszego kryterium, które umożliwiałoby rozróżnienie zbiorów należących do pewnej klasy, nie koniecznie wskazując na własności tych zbiorów. Tym kryterium okazuje się odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne pomiędzy zbiorami, tzn. dwa zbiory A i B zaliczamy do tej samej klasy, jeśli istnieje funkcja f wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca zbiór A na zbiór B. Zauważmy, że funkcja o takiej własności nie domaga się żadnych konkretnych własności zbiorów A i B, jednak jest w stanie je rozróżnić – zbiory A i B są różne, jeśli nie istnieje funkcja tożsamościowa f z A na B.

Tak otrzymane klasy nazywa Cantor liczbami kardynalnymi. Oczywiście, kryterium rozróżniające zbiory A i B może wskazywać (lecz nie musi) na pewne własności tych zbiorów. Tak jest w przypadku liczb porządkowych, które powstają analogicznie jak liczby kardynalne, jednakże funkcja wzajemnie jednoznaczna, będąca podstawą otrzymania tych liczb, musi zachowywać porządek istniejący na zbiorach A i B.

Jeśli więc istnieje kryterium rozróżnienia pomiędzy pewnymi elementami, to jest to warunek wystarczający, aby te elementy traktować jako jednolitą całość. Brak takiego kryterium uniemożliwia natomiast tworzenie takiej całości. I tak np. nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów, bo nie jest możliwe wskazanie kryterium, które by rozróżniało wszystkie możliwe zbiory. Cantor uważa, że również w przypadku tworzenia zbiorów skończonych nie można wskazać innego kryterium, oprócz kryterium wyraźnego rozróżniania elementów, tworzących dany zbiór, tzn.

zbiory nieskończone mają co najmniej takie same prawo do istnienia, jak zbiory skończone. Zobaczmy, co pisze sam Cantor na temat „wielości nieskończonych" (tzn. liczb kardynalnych nieskończonych).

„Czy nie byłoby do pomyślenia, że już te wielości są „sprzeczne" i że sprzeczność przyjęcia tego, iż wszystkie te elementy tworzą pewną całość jeszcze tylko nie zwróciła na siebie uwagi? Moja odpowiedź na to brzmi, że pytanie to należy również rozszerzyć na wielości skończone i że dokładne rozważanie prowadzi do następującego wyniku: nawet dla wielości skończonych nie da się przeprowadzić „dowodu" ich „niesprzeczności". Innymi słowy: fakt „niesprzeczności" wielości skończonych jest prostą, niedowodliwą prawdą, jest „aksjomatem arytmetyki" (w starym sensie tego słowa). Tak samo „niesprzeczność" wielości, którym przypisuję alefy jako liczby kardynalne jest aksjomatem rozszerzonej arytmetyki pozaskończonej"[9].

Co więcej, istniejące aktualnie zbiory nieskończone stanowią podstawę teorii mnogości, w rozumieniu Cantora. Zbiory skończone są to twory umysłu konstruowane w oparciu o istniejące idealnie zbiory nieskończone.

FILOZOFIA CANTORA

Widzimy więc, że w teorii mnogości Cantora centralną rolę pełni pojęcie zbioru, a w szczególności zbioru nieskończonego. Przyjrzyjmy się jakie są epistemologiczne i ontologiczne konsekwencje roli, jaką pełni pojęcie zbioru (nieskończonego) w teorii Cantora.

Jak pisałem już wcześniej, Cantor traktował zbiór jako ogół określonych elementów, które na mocy pewnego prawa mogą być złączone w jedną całość. Tak określonemu pojęciu zbioru przypisywał obiektywne istnienie na wzór platońskich idei. Powołując się na platońskie rozumienie pojęcia idei sądził, że pojęcie zbioru jest „uporządkowaną mieszaniną" pojęcia *apejron* (to znaczy czegoś nieokreślonego i nieograniczonego) oraz pojęcia granicy[10].

Zobaczmy więc czym jest zbiór będący, według Cantora, elementem świata platońskich idei. Jako „uporządkowana mieszanina" *apejronu* i granicy musi posiadać te cechy obu tych pojęć, które nawzajem niwelują chaotyczność i nieuporządkowanie, jakie te pojęcia, brane oddzielnie, posiadają.

Pojęcie granicy zawiera w sobie dwa charakteryzujące je składniki:

1. Granicą elementów a_n jest taki element a, że dla dostatecznie dużych n, elementy a_n są dowolnie blisko a.
2. Granica a elementów a_n jest najmniejszym elementem (lub największym) ograniczającym elementy a_n z góry (lub z dołu).

Zauważmy, że pierwszy składnik pojęcia granicy jest wyeliminowany przez pojęcie *apejronu*, gdyż element a w pierwszym przypadku nie może być nieskończony. Natomiast drugi składnik pojęcia granicy doprowadza do odrzucenia nieokreśloności *apejronu*. Otrzymujemy tym samym kryterium istnienia zbiorów:

„Każdy zbiór dobrze odróżnionych rzeczy może być traktowany jako jednolita rzecz dla siebie, której tamte rzeczy są częściami składowymi lub elementami konstytutywnymi”[11].

Zbiór istniejący w świecie idei, oprócz tego, że jest „jednolitą rzeczą” składającą się z dobrze odróżnionych konstytuujących ją elementów, musi być jeszcze nieskończony.

Jako podstawę całej swojej teorii przyjmuje Cantor istnienie, w sensie platońskim, nieskończonych zbiorów. Nieskończoność aktualna (tzn. wielkość stała, która jest większa od każdej wielkości skończonej tego samego rodzaju) jest więc dla niego czymś w pełni realnym – i tak naprawdę jedynie realnym, w odróżnieniu od nieskończoności potencjalnej tzn. od wielkości, która może przekraczać dowolnie dużą wielkość skończoną danego rodzaju. Nieskończoność potencjalna (jak również wielkości skończone) jest wyłącznie konstrukcją opartą o jedynie realną nieskończoność aktualną.

To, co przede wszystkim konstruujemy w oparciu o zbiory nieskończone, są to liczby kardynalne oraz typy porządkowe. Gdy abstrahujemy od jakości elementów, tworzących dany zbiór oraz od porządku w jakim występują, to otrzymujemy liczbę kardynalną. Gdy natomiast abstrahujemy od jakości elementów, uwzględniając jednak ich porządek, to w zależności od rodzaju porządku otrzymujemy dany typ porządkowy. „Liczby kardynalne jak i typy porządkowe są prostymi, niezłożonymi tworami pojęciowymi; każde z nich jest prawdziwą jednością, ponieważ w każdym z nich pewna wielkość i rozmaitość jednostek jest połączona w jedną całość”[12]. Oznacza to, że liczby kardynalne i typy porządkowe są konstrukcjami umysłu, tworzonymi w oparciu o obiektywnie istniejący zbiór.

Matematyk stwarza świat bytów, które są bytami w sensie substancji Arystotelesa. „W pewnym sensie każdy typ porządkowy można pojmować jako całość złożoną z materii i formy; zawarte w nich jednostki, które są pojęciowo różne stanowią materię, podczas gdy istniejący między nimi porządek odpowiada formie”[13]. Matematyk więc w oparciu o idealny, obiektywnie istniejący świat idei (zbiory nieskończone) stwarza świat konkretnych bytów (w sensie Arystotelesa), którymi są np. typy porządkowe (skończone lub nieskończone).

Zauważmy, że Cantor nie uznawał wielkości nieskończenie małych, istniejących aktualnie. Zgodnie z koncepcją Cantora pojęcie wielkości aktualnie nieskończenie małej jest sprzeczne samo w sobie. Rzecz polega na tym, że wielkość taka musiałaby być wielkością stałą mniejszą od każdej wielkości dowolnego rodzaju (przyjęcie założenia, że wielkość ta jest wielkością stałą mniejszą od wielkości ustalonego rodzaju powodowałoby, że wielkość ta stałaby się po prostu wielkością skończoną; zauważmy, że takie wnioskowanie nie ma miejsca w przypadku wielkości aktualnie nieskończenie dużych) – musiałaby być więc również mniejsza od samej siebie, co jest niemożliwe. Intuicja sprzeczności w powyższym rozumowaniu opiera się na założeniu, że podstawą konstrukcji danych wielkości jest zbiór nieskończony jako „jednolita całość dobrze odróżnionych elementów".

Kryterium istnienia zbiorów podane przez Cantora eleminuje istnienie zbioru wszystkich zbiorów oraz zbioru wszystkich liczb porządkowych. W przypadku zbioru wszystkich typów porządkowych, zbiorowi temu musiałby odpowiadać typ porządkowy „dowolnie duży" tzn. większy od wszystkich typów porządkowych, również od samego siebie, co jest niemożliwe. Sprzeczność jest więc analogiczna jak w przypadku wielkości aktualnie nieskończenie małych.

To kryterium Cantora jest jednak mało precyzyjne i nie wskazuje w ogólnym przypadku w sposób jednoznaczny, które zbiory nieskończone istnieją, a które nie. Po ukazaniu się prac Cantora, tworzących teorię mnogości, odkryto wiele paradoksalnych zbiorów. Jeden z nich był odkryty przez Russella w 1901 r.[14].

Ten paradoksalny zbiór (nazwijmy go *Z*) składa się z tych zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. W tym przypadku jednak rozstrzygnięcie kwestii, czy zbiór *Z* jest swoim własnym elementem, nie jest możliwe. Jeśli *Z* jest swoim elementem, to *Z* nie jest swoim elementem, na podstawie definicji zbioru *Z*, gdy natomiast *Z* nie jest swoim elementem, to znów *Z* jest swoim elementem. Paradoks ten, zwany antynomią klas niezwrotnych, nie tylko zachwiał programem logicyzacji matematyki (prowadzonym przez Fregego, Russella i Whiteheada), lecz przede wszystkim ukazał potrzebę uściślenia podstaw teorii mnogości. Sądzono, że platońska interpretacja teorii mnogości jest odpowiedzialna za te problemy i paradoksy. Stąd próba budowy matematyki w oparciu o inne założenia:

1. Z jednej strony była to próba Hilberta oparcia matematyki na intuicyjnie osiągalnych pozalogicznych obiektach skończonych (wiązała się z odwoływaniem się do intuicji geometrycznych, a więc z propagowanym przez Hilberta programem geometryzacji matematyki);
2. Z drugiej strony intuicjonizm Brouwera (związany ściśle z programem arytmetyzacji matematyki) chciał oprzeć matematykę na intuicji liczby skończonej (mówiąc nieprecyzyjnie).

Dokładniej o tych próbach będzie mowa w dalszej części artykułu. Obie te próby wiązały się z chęcią ocalenia choćby części teorii mnogości (szczególnie formalizm Hilberta). Jednak mimo napotykanych problemów i nie zważając na różnorodne interpretacje filozoficzne, teoria mnogości rozwijała się intensywnie w XX wieku, stając się jedną z centralnych teorii matematycznych.

Wracając do filozoficznych podstaw teorii mnogości w ujęciu Cantora zauważmy, że w ramach tej filozofii obiekty matematyczne istnieją na dwa sposoby:

1. Jako idee platońskie (zbiory nieskończone).
2. Jako byty jednostkowe w sensie Arystotelesa.

Obiekty pierwszego rodzaju są podstawą konstrukcji dalszych obiektów matematycznych. W tym ujęciu nie istnieje *a priori* epistemologiczne. Gdyby nie platońska interpretacja zbiorów nieskończonych, to właśnie one takie *a priori* mogłyby stanowić. Można natomiast mówić o istnieniu *a priori* intuicyjnego (oczywiście o istnieniu *a priori* formalnego również) – jest nim zasada, na której oparty jest proces abstrakcji prowadzący do otrzymania z danego zbioru na przykład liczby kardynalnej, gdy abstrahujemy zarówno od jakości elementów, jak i od porządku w jakim występują. To wskazuje na empiryczny rys filozofii Cantora (obiekty istniejące niezależnie od umysłu stają się bezpośrednią podstawą i składnikiem wiedzy). Sam Cantor zresztą nazywał swoją koncepcję umiarkowanym realizmem arystotelesowskim.

STRUKTURY APRIORYCZNE W FILOZOFII POINCARÉGO

Francuski matematyk, fizyk i filozof Henri Poincaré był pod silnym wpływem programu Kleina. Uważał, że pojęcie grupy oraz niezmiennika ma podstawowe znaczenie dla matematyki[15]. Tym pojęciom przypisywał zasadniczą rolę we wszelkim poznaniu. Sądził, że pojęcie grupy „preegzystuje w umyśle ludzkim" i określa pewną aprioryczną strukturę umysłu. Ta aprioryczna struktura stanowi formę poznania.

Poznanie, a więc wszelkie świadome ujęcie struktury świata, możliwe jest wyłącznie w ramach pojęcia grupy. Przedstawiony wcześniej program Kleina ukazuje, jak dzięki pojęciu grupy wyłania się dana struktura geometryczna (dana geometria powstaje jako teoria niezmienników określonej grupy przekształceń). Zauważmy, że pojęcie grupy oraz niezmiennika stanowią dla Poincarégo centralny element podstawowych struktur poznania.

W swoich pracach Poincaré analizuje znaczenie indukcji matematycznej dla powstawania wiedzy matematycznej. Z tych analiz wynika, że pojęcie indukcji matematycznej jest przez niego używane w znaczeniu bardzo ogólnym i nieprecyzyjnym i praktycznie pełni rolę zasady, dzięki której powstają „istotne" pojęcia matematyczne. Tę zasadę, która jest drugim elementem apriorycznych struktur poznawczych, nazwę zasadą indukcji apriorycznej – nadbudowywuje się ona nad elementem pierwszym. Funkcjonowanie tej zasady polega, między innymi, na uświadomieniu sobie przez umysł możliwości wykonania danej operacji nieskończenie wiele razy. Przykładem działania tej zasady są: zasada indukcji matematycznej i wszelkiego typu definicje rekurencyjne. Dzięki tym dwóm wskazanym elementom, konstytuującym podstawowe struktury poznania, powstają pojęcia ogólne, odpowiadające pewnym konkretnym strukturom, jak również ogólne prawa, które są opisem własności danej struktury[16].

Przyjrzyjmy się, jak w ramach przedstawionej koncepcji powstaje pojęcie przestrzeni euklidesowej. Punktem wyjścia jest grupa przekształceń „sztywnych" tzn. grupa izometrii. Grupa ta jest w pewnym sensie podstawowa, gdyż wiąże się bezpośrednio z podstawową strukturą doświadczenia (istnienie ciał sztywnych i możliwość kompensacji ich ruchów) i określona jest wyłącznie przy pomocy tej podstawowej struktury. Stąd przestrzeń euklidesowa, której własności są niezmiennikami grupy izometrii, musi mieć najbardziej podstawową i najprostszą strukturę geometryczną. Można oczywiście rozszerzać doświadczenie o nowe elementy i tym samym otrzymamy szerszą grupę (jak również odpowiadającą tej grupie bogatszą strukturę geometryczną). Na tym przykładzie widoczna jest niezbędność elementów doświadczenia przy powstawaniu wszelkiej wiedzy. Jednak w przypadku powstawania pojęć geometrycznych doświadczenie pełni tylko jedną rolę: pobudza do działania podstawową strukturę umysłu, wyrażającą się w pojęciu grupy. Oznacza to, że w umyśle preegzystuje ogólne pojęcie grupy, które pod wpływem danego zbioru doświadczeń staje się grupą konkretnych przekształceń (w przypadku grupy izometrii zbiór tych doświadczeń jest w pewnym sensie minimalny).

Przestrzeń euklidesowa jest więc najprostszą przestrzenią, nadającą się do opisu przestrzeni naszego doświadczenia, co nie oznacza, że nie można przyjąć innej grupy przekształceń, określającej inną geometrię. Ta inna geometria będzie jednak bardziej skomplikowana od geometrii euklidesowej (bo będzie oparta na szerszej grupie przekształceń). Nie można więc mówić o prawdziwości geometrii. Geometria nie jest prawdziwa, tylko mniej lub bardziej dogodna. W tym ujęciu twierdzenia geometrii nie pochodzą z doświadczenia (doświadczenie ma wpływ wyłącznie na wybór danej grupy przekształceń), jak sądzili empiryści. Jednak ten związek z doświadczeniem występuje i wyraża się on w, trudnym do zdefiniowania, kryterium prostoty danej geometrii (geometria jest prostsza, jeśli bardziej odpowiada podstawowym elementom struktury rzeczywistości)[17].

Twierdzenia sformułowane w ramach danej geometrii są jednak przekładalne na twierdzenia wyrażone w języku innej geometrii (przynajmniej część tych twierdzeń). Na podstawie programu Kleina można zauważyć, że analizując dane własności z punktu widzenia szerszej grupy przekształceń musimy wzbogacić strukturę przestrzeni geometrycznej o dodatkowe elementy. Na przykład geometria euklidesowa zawiera się jako przypadek szczególny w strukturze geometrii nieeuklidesowej. Aby móc badać geometrię euklidesową z punktu widzenie geometrii nieeuklidesowej trzeba wprowadzić pojęcie krzywizny – wówczas przestrzeń euklidesowa jest po prostu przestrzenią o krzywiźnie równej zero. Ponieważ w różnych geometriach możemy wyrażać te same treści, więc treści te są niezmiennikami przejść pomiędzy różnymi geometriami. **Treść ta musi się wiązać z pewnymi obiektywnymi własnościami przestrzeni fizycznej**. Mimo tego, że twierdzenia geometrii są umowami (czy zamaskowanymi definicjami), to jednak posiadają pewną obiektywną treść – jest nią niezmiennik przy przejściu pomiędzy różnymi geometriami. W koncepcji Poincarégo związek geometrii z doświadczeniem jest więc wyraźny, występuje on jednak na bardzo podstawowym poziomie – na poziomie struktury grupy (a więc na poziomie podstawowych struktur poznania).

Jak wspomniałem wcześniej, pojęcie grupy jest aprioryczną formą poznania, istnieje więc w umyśle przed wszelkim doświadczeniem; jednak pojęcie grupy wraz z kryterium prostoty prowadzi do powstania konkretnej grupy przekształceń, która jest już ściśle związana ze strukturą doświadczenia. Oznacza to, że geometria posiada pewien element syntetyczny *a priori* (jest to zarazem element empiryczny) – wiąże się on z tymi elementami struktury przestrzeni, które są określone przez podstawowe struktury poznania, a więc między innymi z tymi treściami, które nie zmieniają się przy przejściu od jednej geometrii do drugiej. Dlatego też Poincaré uważa zasadę indukcji matematycznej za prawdziwy sąd syntetyczny a priori (nie twierdzenia, które otrzymuje się dzięki zasadzie indukcji matematycznej, lecz samą tę zasadę – w tym miejscu zwróćmy uwagę na opozycję Poincarégo względem Kanta, dla którego np. pewniki geometrii są sądami syntetycznymi *a priori*). Zauważmy, że właśnie zasada indukcji matematycznej jest przykładem ogólnej zasady indukcji apriorycznej będącej elementem podstawowych struktur poznania.

Podsumowując zwróćmy szczególnie uwagę na różnice między filozofią Poincarégo a koncepcją Kanta[18]:

1. Centralnymi sądami nauki są dla Poincarégo konwencje, a nie sądy syntetyczne *a priori*.
2. W koncepcji Poincarégo sądy syntetyczne *a priori* stanowią podstawę budowy wszelkiej istotnej wiedzy; na ich podstawie formułujemy na przykład pewniki geometrii czy zasady fizyki będące konwencjami, którym nie przysługuje ani cecha prawdy, ani fałszu. Kant natomiast przyjmuje za struktury aprioryczne wiedzy kategorie intelektu, a sądy syntetyczne *a priori* pojawiają się dopiero jako efekt działania kategorii intelektu.
3. Rola intuicji w budowie nauki jest u Poincarégo znacznie większa, niż u Kanta – precyzyjnie „wyliczone" kategorie intelektu, w dużym stopniu ograniczają u Kanta rolę czystej intuicji.
4. Dla Kanta pojęcia czasu i przestrzeni stanowią formę doświadczenia (zauważmy, że te pojęcia pełnią rolę *a priori* epistemologicznego). Poincaré przyznaje doświadczeniu znacznie większą rolę, niż czyni to Kant. Świat, według Poincarégo, ma swoją własną, obiektywną, niezależną od umysłu, strukturę, która przyjmowana jest przez umysł w sposób przedrefleksyjny. Pojęcie grupy istnieje w umyśle przed wszelkim doświadczeniem, jednak taka a nie inna struktura doświadczenia powoduje, że to pojęcie zaczyna

funkcjonować. Dokładniej, do tych elementów struktury doświadczenia należą:
- istnienie ciał sztywnych;
- możliwość kompensowania ruchu ciał sztywnych, dzięki zdolności poruszania się.

5. Nauka w swojej strukturze jest dla Poincarégo „mieszaniną" obiektywnej struktury rzeczywistości (poznawanej w sposób przednaukowy) oraz struktur poznania; natomiast wg Kanta nie mamy dostępu bezpośredniego do struktury rzeczywistości.

PODSTAWOWE STRUKTURY POZNANIA A NURTY FORMALISTYCZNE

Twórca logicyzmu Bertrand Russell uważał, że „u podstaw wszelkich pojęć i sądów matematycznych tkwią czyste formy logiczne (stałe logiczne). Każde twierdzenie matematyczne możemy więc wyrazić w formie zdania logiki tzn. takiego zdania, które można uznać *a priori* nie badając rzeczywiście istniejącego świata. (...) Stała logiczna jest czymś co pozostaje stałe w zdaniu nawet wówczas, gdy się zmieniają wszystkie jego składniki"[19]. Zdania, które można utworzyć wyłacznie przy pomocy stałych logicznych, są zdaniami logiki. Program Russella polegał na określeniu podstawowych stałych logicznych i na zbudowaniu, w oparciu o te stałe, całej czystej matematyki. Ale chociaż wszystkie zdania logiki mogą być wyrażone przy pomocy stałych logicznych, nie zachodzi sytuacja przeciwna, że wszystkie zdania, które mogą być wyrażone w ten sposób są zdaniami logiki.

Nie analizując trudności, jakie napotkał Russell w realizacji swojego programu (program ten w konsekwencji upadł) zauważmy, że czyste formy, o których mówi Russell, stanowią *a priori* epistemologiczne (zgodnie z przyjętą przeze mnie terminologią). Zdania logiki, jako takie, mogą być znane *a priori* bez badania aktualnie istniejącego świata. Posiadając to *a priori* możemy według Russella już bezpośrednio, w sposób czysto formalny budować matematykę. Nie istnieje więc w koncepcji logicyzmu a priori intuicyjne, gdyż według Russella można zdefiniować pierwotne idee przy pomocy wyrażeń, w których wszystkie idee matematyki mogą być zdefiniowane.

Dla Poincarégo na przykład nie jest możliwe, aby całą matematykę można było otrzymać wprost z *a priori* epistemologicznego. Do otrzymania twierdzeń matematyki, które rzeczywiście rozszerzają naszą wiedzę, potrzebna jest zasada indukcji apriorycznej (a więc *a priori* intuicyjne).

Jednak, jak sądzi Russell, nie posiadamy pierwotnych zdań, z których wszystkie zdania matematyki mogłyby być wydedukowane, czyli musi istnieć *a priori* formalne odpowiedzialne za ten proces. Russell podaje jako przykład aksjomat nieskończoności, który, chociaż może być wyrażony przy pomocy wyrażeń logicznych, to jednak nie można stwierdzić przy pomocy logiki jego prawdziwości.

W odróżnieniu od logicyzmu Russella, formalizm Davida Hilberta posiada bardziej skomplikowaną strukturę *a priori* epistemologicznego. Według Hilberta „matematyka posiada treść pewną i niezależną od jakiejkolwiek logiki i w związku z tym nigdy nie może zostać ugruntowana w oparciu o samą tylko logikę. Dlatego też próby Fregego i Dedekinda nie doprowadziły do niczego. Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś w przedstawieniu: mianowicie pewne pozalogiczne, konkretne obiekty, które jawią się jako doświadczalne bezpośrednio przed wszelkim myśleniem. [...] W szczególności, w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt, zgodnie z naszą teorią, jest bezpośrednio jawny i rozpoznawalny”[20].

W oparciu o przedmioty, które stają się bezpośrednio jawne w przedrefleksyjnym przedstawieniu, możemy w sposób czysto formalny zbudować całą matematykę. Formalizacji matematyki chciał więc Hilbert dokonać w oparciu o te obiekty i prawdy matematyczne, które jawią się w bezpośrednim intuicyjnym oglądzie. Formalizacja ma się wobec tego dokonać wyłącznie w oparciu o metody finitystyczne, gdyż pojęcie nieskńczoności wymyka się bezpośredniej, jasnej intuicji (nie pochodzi również z doświadczenia).

Przyczyną, dla której Hilbert chciał sprowadzić matematykę do matematyki finitystycznej, były paradoksy teorii mnogości. Sądził on, że dzięki tym metodom będzie możliwa formalizacja matematyki, a w konsekwencji udowodnienie jej niesprzeczności (właśnie w tej finitystycznej postaci). Tym samym, do matematyki nie miałyby już dostępu żadne sprzeczności i paradoksy, jak na przykład odkryta przez Zermelo i Russella antynomia klas niezwrotnych, która wywołała ogromny wstrząs w matematyce.

Metoda finitystyczna Hilberta nie oznacza jednak, że pojęcie nieskończoności zupełnie eliminuje się z matematyki.

„Czy nie jest raczej jasne, że jeśli myślimy, iż rozpoznaliśmy w jakimś sensie nieskończoność, to czynimy to jedynie dlatego, że napotkaliśmy na skrajnie wielkie i skrajnie małe wymiary w rzeczywistości”[21].

Nieskończoność pojawia się u Hilberta jako idea regulatywna rozumu w sensie Kanta. Do pojęć i stwierdzeń finitystycznych dochodzą, w ramach konstrukcji matematyki, pojęcia i stwierdzenia idealne (stwierdzenia infinitystyczne). Już w ramach rachunków algebraicznych dokonywanych na literach pojawiają się stwierdzenia idealne np. $a + b = b + a$ (to ogólne równanie jest koniunkcją nieskończonej ilości równań, które wyrażają związek między konkretnymi liczbami). Jest to formalny zapis, który sam w sobie nie ma żadnego (pozaformalnego) znaczenia; z tego zapisu można wyprowadzić jednak formuły, które posiadają już (intuicyjne) znaczenie np. 1 + 2 = 2 + 1 (ta formuła jest już stwierdzeniem finitystycznym).

Oczywisty jest sens wprowadzenia stwierdzeń idealnych – pozwalają zachować spójność i prostotę teorii, a tym samym wyprowadzić wiele związków niemożliwych do otrzymania metodami finitystycznymi. Tym samym „matematyka stanie się zbiorem formuł, po pierwsze takich, którym odpowiadają intuicyjne stwierdzenia wypowiedzi finitystycznych a po drugie dalszych formuł, które nic nie znaczą i które są idealnymi tworami naszej teorii”[22]. Widzimy więc, że możliwość formalizacji teorii, a więc m. in. możliwość wprowadzenia nic nie znaczących w sobie ogólnych symboli i formuł, jest uzależniona od pojęcia nieskończoności. Mówiąc inaczej, matematyki nie można ograniczyć do finitystycznych konstrukcji „poprzez poglądowe rozważania intuicyjne”. Aby jednak nie wprowadzać wprost do matematyki pojęcia nieskończoności (które jest w matematyce niezbędne, a którego pojawienie się prowadzi do sprzeczności) wprowadzamy formalne obiekty idealne (nie posiadające w sobie żadnego pozaformalnego znaczenia), które pełnią tę samą rolę co pojęcie nieskończoności; nie prowadzą jednak do sprzeczności, dzięki swojemu czysto formalnemu charakterowi.

W koncepcji Hilberta „nieskończoność” staje się centralnym elementem *a priori* epistemologicznego. Zauważmy, że do struktur *a priori* epistemologicznego należy jeszcze czysta forma pozalogicznych skończonych obiektów, która ujawnia się w intuicyjnym przedrefleksyjnym oglądzie np. jako kształt znaków czy ogólnie pewnych obiektów geometrycznych. Jednak „nieskończoność”, jako *a priori* epistemologiczne, pełni większą rolę, niż „czysta forma pozalogicznych skończonych obiektów”. O ile ta druga daje dostęp do struktury rzeczywistości, to ta pierwsza ponadto ujmuje i determinuje samą strukturę poznawania rzeczywistości. Dzięki *a priori* „nieskończoność”, operując tym co idealne poznajemy w ustalony sposób ten skończony, realnie istniejący świat.

W odróżnieniu od Poincarégo, dla którego *a priori* epistemologiczne (pojęcie grupy) jest strukturą czysto matematyczną, dla Hilberta *a priori* epistemologiczne jest czymś, co determinuje matematykę, lecz co jednak nie mieści się w ramach jej formalnych struktur.

Podsumowując widzimy, że w ramach koncepcji formalistycznych, podstawowe struktury poznania posiadają *a priori* epistemologiczne oraz *a priori* formalne. Brak jest natomiast *a priori* intuicyjnego (obiekty matematyczne istnieją niezależnie od wszelkich struktur apriorycznych, są dane w bezpośrednich przedstawieniach) – jest to charakterystycznym, nominalistycznym rysem tych koncepcji i w sposób jednoznaczny odróżnia je od filozofii Poincarégo oraz filozofii Cantora, w których *a priori* intuicyjne odgrywa istotną rolę.

PODSTAWOWE STRUKTURY POZNANIA A INTUICJONIZM

Intuicjonizm, którego twórcą był L. E. J. Brouwer (a głównym kontynuatorem był A. Heyting), wystąpił w opozycji do formalizmu i był próbą takiej interpretacji matematyki, która byłaby w stanie wyjaśnić zjawisko gwałtownych zmian w matematyce, jakie miały miejsce pod koniec XIX wieku. W sposób całkowicie świadomy i jawny Brower nawiązał do filozofii matematyki Kanta próbując przejąć z tej koncepcji te elementy, które, według niego, wytrzymały próbę czasu. W koncepcji Kanta czas i przestrzeń są apriorycznymi formami zmysłowości (w przyjętej terminologii stanowią *a priori* epistemologiczne). Aksjomaty geometrii i arytmetyki powstają w ramach czystej intuicji *a priori* tych form zmysłowości, są wobec tego sądami syntetycznymi *a priori* tzn. niezależnymi od doświadczenia, lecz posiadającymi pewną ogólną i obiektywną treść. Dla Kanta aksjomaty geometrii i arytmetyki są więc niezmienne.

Koncepcja Kanta nie wytrzymała jednak próby czasu. Została zakwestionowana przez rozwój matematyki: na przykład przez powstanie geometrii niearchimedesowych czy geometrii nieeuklidesowych.Okazało się, że zupełnie różne geometrie mogą równie dobrze opisywać dane zjawiska tak, jak czyniła to geometria euklidesowa. Ten okres rozwoju matematyki wydawał się ostatecznie odrzucać intuicjonizm Kanta, a przychylać się do interpretacji formalistycznych. Wydawało się, że pewne elementy aprioryczne czy intuicyjne (które mogłyby określać „prawdziwość" aksjomatów) są nieistotne dla matematyki, że jedynie ważna jest forma logiczna (lub quasi-logiczna). Zobaczmy, co proponuje w tym momencie Brouwer:

„Jakkolwiek słaba mogła się wydawać pozycja intuicjonizmu po tym okresie rozwoju matematyki, przyszedł on znów do siebie odrzucając kantowską aprioryczność przestrzeni, a podkreślając bardziej zdecydowanie aprioryczność czasu. Ten neointuicjonizm uznaje rozpadanie się momentów życia na jakościowo różne części, które rozdzielone przez czas mogą być na nowo połączone, za podstawowe zjawisko ludzkiego umysłu, przechodzące – dzięki abstrahowaniu od jego treści emocjonalnej – w podstawowe zjawisko myślenia matematycznego, w intuicję nagiej dwujedności. Ta intuicja dwujedności, ta praintuicja matematyki, stwarza nie tylko liczby jeden i dwa, ale także wszystkie liczby porządkowe i [...] prowadzi jeszcze dalej do skonstruowania najmniejszej nieskończonej liczby porządkowej ω"[23].

Wszystkie obiekty matematyczne powstają więc w oparciu o „intuicję nagiej dwujedności". Teoria matematyczna nie poddaje się formalizacji, należy całkowicie przy budowie matematyki odrzucić metodę aksjomatyczną. Żaden obiekt matematyczny nie istnieje *a priori* – należy najpierw dany obiekt skonstruować i dopiero później badać jego własności. Cała matematyka jest wolną grą umysłu. To, czego nie daje się zbudować w oparciu o tę pierwotną intuicję, nie istnieje w matematyce. Dla Brouwera zasada indukcji matematycznej jest po prostu metodą działania intuicji dwujedności, w połączeniu z apriorycznością czasu: czas rozdziela dane elementy, natomiast intuicja łączy je w całość – ten proces może postępować w nieskończoność. W ten sposób można skonstruować nieskończoną liczbę porządkową ω, jednak liczby tej nie można przyjąć w sposób aprioryczny, jak czynili na przykład formaliści.

W konsekwencji można sformułować tzw. zasadę konstruowalności, która mówi, że każde matematyczne stwierdzenie może być ujęte w formie: „Mogę zrealizować konstrukcję *A* w swoim umyśle". Matematyczną negację tego stwierdzenia można wyrazić następująco: „Mogę zrealizować w swoim umyśle konstrukcję *B*, z której wynika sprzeczność z założeniem, że konstrukcja *A* była doprowadzona do końca"[24]. Zauważmy, że powyższe stwierdzenie nie jest „faktyczną" negacją pierwszego stwierdzenia tzn. faktyczna negacja wygląda następująco: „Nie mogę zrealizować konstrukcji *A* w moim umyśle". Jednak to wyrażenie nie jest matematycznym wyrażeniem w sensie intuicjonizmu, ponieważ jest niezgodne z zasadą konstruowalności.

W tym kontekście, w całkiem naturalny sposób pojawia się zasada sprzeczności $(\sim (a \wedge \sim a))$: mogę zrealizować w swoim umyśle konstrukcję c, która prowadzi do sprzeczności z założeniem, że skonstruowaliśmy obiekt a i zarazem obiekt b, którego konstrukcja prowadzi do sprzeczności z założeniem o skonstruowaniu obiektu a. Powstanie wyrażenia $(\sim (a \wedge \sim a))$, jako obiektu matematyki intuicjonistycznej, dokonuje się w następujący sposób. Mając konstrukcję obiektu a, przy pomocy intuicji nagiej dwujedności tworzymy z tego obiektu pewną „bezwarunkową całość"– obiekt b – łączącą np. dwa elementy a_1 i a_2, przy czym $a_1 = a_2 = a$. W dalszym etapie rozdzielamy elementy tej „całości" (korzystając z apriorycznej struktury czasu) przeciwstawiając element a_2 elementowi a_1 – to przeciwstawienie jest równoznaczne z konstrukcją nowych obiektów a'_1 i a'_2. W tym momencie pojawia się negacja „~", jako „bezwarunkowe" przeciwstawienie elementu a'_1 elementowi a'_2 tzn. $a'_2 = \sim a'_1$. W kolejnym etapie łączę przeciwstawione sobie elementy w nową całość $a'_2 \wedge \sim a'_1$(nazwę ją obiektem c), która jest przeciwstawiona wcześniej utworzonej całości $a_1 \wedge a_2$, czyli obiektowi b. Sprzeczność pomiędzy konstrukcją obiektu b i obiektu c wyraża dokładnie intuicjonistyczną zasadę sprzeczności.

Jednak należy odrzucić zasadę podwójnego przeczenia $(\sim (\sim a)) \rightarrow a$, gdyż wyrażenie $(\sim (\sim a))$ oznacza wyłącznie możliwość konstrukcji obiektu c, z której wynika sprzeczność z założeniem o przeprowadzeniu konstrukcji obiektu b, która z kolei jest sprzeczna z możliwością konstrukcji obiektu a. Z powyższego stwierdzenia w ogólności nie wynika możliwość konstrukcji obiektu a. Zauważmy, że jako obiekt matematyki intuicjonistycznej pojawia się jednak wyrażenie $a \rightarrow (\sim (\sim a))$. Przy takim podejściu należy również odrzucić zasadę wyłączonego środka $(a \vee \sim a)$. Cała rzecz sprowadza się do tego, że skonstruowanie obiektu a nie musi pociągać za sobą możliwości konstrukcji obiektu *b*, która byłaby w sprzeczności z założeniem o skonstruowaniu obiektu *a*.

Myślę, że te przykłady są wystarczające do tego, aby zobaczyć sposób działania metody intuicjonistycznej przy konstrukcji matematyki. Matematyka intuicjonistyczna znacznie różni się od matematyki klasycznej nie tylko w zakresie ilości i rozumienia otrzymywanych obiektów matematycznych, lecz również tym, że odrzuca wszelką stałą formalizację i aksjomatyzację nauk. Dla wygody można oczywiście dopuszczać w danym okresie rozwoju matematyki do pewnej formalizacji, jednak ta formalizacja może zostać odrzucona przez wolną aktywność umysłu.

Istnieje jeden element aprioryczny struktur wiedzy w koncepcji Brouwera (można by sądzić, że pełni on rolę *a priori* epistemologicznego) – jest nim „naga dwujedność". Pojęcie czasu w koncepcji Brouwera nie pełni jednak tej samej roli co u Kanta, dla którego wraz z pojęciem przestrzeni stanowiło *a priori* epistemologiczne. Mimo, że Brouwer podkreśla aprioryczny charakter czasu (odrzucając zarazem aprioryczność przestrzeni), to jednak czas (który odpowiedzialny jest za rozpad danych w pierwotnym poznaniu elementów) dopiero w połączeniu z intuicją jedności rozdzielonych elementów, tworzy tę podstawę całej konstrukcji matematyki – „nagą dwujedność".

Intuicja „nagiej dwujedności" w sposób bezpośredni wytwarza konkretne obiekty i prawa matematyczne. Ta intuicja „nagiej dwujedności", stanowi *a priori* intuicyjne. Zauważmy, że pojęcie „nagiej dwujedności" nie jest u Brouwera pojęciem uprzednim względem intuicji (intuicja jedności jest składnikiem „nagiej dwujedności"), a więc to pojęcie nie tworzy *a priori* epistemologicznego – utożsamia się z *a priori* intuicyjnym. To odróżnia koncepcję Brouwera nie tylko od kantowskiej interpretacji matematyki, lecz również od koncepcji Poincarégo, gdyż pojęcie grupy jest dla Poincarégo uprzednie w stosunku do wszelkiej aktywności umysłu.

Z punktu widzenia teorii podstawowych struktur poznania intuicjonizm Brouwera najściślej łączy się z platonizmem Cantora, z powodu braku *a priori* epistemologicznego. Zauważmy, że w koncepcji Brouwera nie istnieje ponadto *a priori* formalne – struktura wszystkich obiektów matematyki zależy wyłącznie od twórczej intuicji (i oczywiście od „nagiej dwujedności"). Poza tym Brouwer uważa, że struktura matematyki odzwierciedla wyłącznie strukturę funkcjonowania umysłu, nie można więc powiedzieć, że matematyka zawiera w sobie jakieś elementy struktury rzeczywistości, istniejącej poza umysłem (a tak jest np. u Poincarégo).

Fakt istnienia w podstawowych strukturach poznania wyłącznie jednego obszaru elementów apriorycznych (w szczególności brak *a priori* formalnego) bardzo wyraźnie przeciwstawia koncepcję intuicjonistyczną pozostałym interpretacjom matematyki takim jak: formalizm Hilberta, platonizm Cantora czy konwencjonalizm Poincarégo. Interpretacje matematyki, związane z intuicjonizmem, nie uznają, aby matematyka była zbiorem raz na zawsze ustalonych twierdzeń. Zmieniające się procesy myślowe i zmienny obszar doświadczeń mogą odrzucić każdą teorię i spowodować powstanie i rozwój zupełnie innej. Istniejące jednak elementy aprioryczne wskazują na to, co rzeczywiście trwałego jest w strukturze matematyki. Dla Brouwera ten trwały element związany jest z mechanizmem „intuicji nagiej dwujedności" – ten mechanizm jest podstawą konstrukcji obiektów matematycznych. Na przykład w ramach tego mechanizmu działa zasada indukcji matematycznej czy zasada sprzeczności.

PODSUMOWANE I WNIOSKI

Przedstawiony w powyższyn artykule podział struktur apriorycznych wiedzy dokładnie na trzy obszary jest oczywiście pewnym uproszczeniem i przez to powoduje niemożność uchwycenia wielu istotnych różnic pomiędzy przedstawionymi koncepcjami. Jest jednak wystarczający do realizacji zapowiedzianych we wstępie celów, które można ująć w następujących punktach.

1. Próba zrozumienia rozdziału pomiędzy filozofią matematyki a historią matematyki na przykładzie przedstawionych koncepcji.
2. Uchwycenie roli elementów apriorycznych w strukturze teorii matematycznych.
3. Ukazanie związku między strukturami apriorycznymi a rzeczywistością.

W celu zrozumienia ahistoryczności przedstawionych koncepcji przyjrzyjmy się nieco dokładniej poglądom filozofa nauki Laszlo Kalmara, które w dość charakterystyczny sposób podkreślają konieczność badań historycznych dla zrozumienia istoty matematyki[25]. Filozof ten jest zwolennikiem empirycznej interpretacji pochodzenia obiektów i metod badawczych matematyki. Uważa on, że obiekty matematyczne powstały dzięki metodzie abstrakcji z rzeczywistości. Dzięki uproszczeniu własności empirycznych i stworzeniu prostych pojęciowo idei matematycznych można było w pełni stosować metodę dedukcyjną. Aksjomaty wyrażają więc związki między wyabstrahowanymi z doświadczenia obiektami idealnymi. Aksjomaty te zaczęto traktować od pewnego momentu jako intuicyjnie oczywiste, nie zastanawiając się nad tym, dlaczego wydawały się intuicyjnie oczywiste. Opierając matematykę na dedukcji z *explicite* wyrażonych zdań intuicyjnie oczywistych, matematycy wynaleźli metodę aksjomatyczną. U podstaw matematyki tkwią więc trzy metody: dedukcji, abstakcji oraz metoda aksjomatyczna.

Od pewnego momentu rozwoju zaczęto traktować matematykę jako naukę czysto dedukcyjną (a aksjomaty jako intuicyjnie oczywiste) zapominając o jej empirycznym pochodzeniu. Jednak niemal od początku zaczęły pojawiać się paradoksy i problemy, które pokazywały, że podstawy matematyki, jak i sama metoda dedukcyjna, nie są tak intuicyjnie oczywiste jak sądzono. Już paradoksy Zenona z Elei pokazywały, że albo coś nie tak jest z metodą dedukcyjną, albo pojęcia ciągłości i granicy są źle czy nieprecyzyjnie rozumiane. Rachunek różniczkowy Newtona i Leibniza wydawał się rozwiązywać te paradoksy, jednak sam wytworzył inne problemy, związane z wielkościami nieskończenie małymi oraz ze zbieżnością szeregów. Program uściślenia podstaw analizy, prowadzony między innymi przez Cauchy'ego i Weierstrassa, doprowadził w konsekwencji do powstania teorii mnogości oraz innych działów matematyki. Odrzucono wielkości nieskończenie małe, podano kryteria zbieżności, jednak podstawy teorii mnogości (na której chciano oprzeć matematykę) zaczęły znów rodzić sprzeczności i paradoksy. W celu rozwiązania tych problemów powstały nowe teorie matematyczne i nowe propozycje interpretacji podstaw matematyki, na przykład teoria typów Russella, matematyka intuicjonistyczna Brouwera czy matematyka finitystyczna Hilberta. Okazało się jednak, że teorie te nadmiernie ograniczały zakres matematyki, jeśli chciało się aby na ich gruncie nie pojawiały się więcej antynomie czy sprzeczności. Wyniki uzyskane na przykład przez Gödla, Löwenheima, Cohena i Skolema pokazywały bardzo ograniczone możliwości teorii formalnych (w zakresie dowodzenia metodami danej teorii ich niesprzeczności) i ich niejednoznaczność interpretacyjną.

Kalmar uważa, że niemożność rozwiązania podstawowych trudności wynika z błędnych założeń interpretacyjnych, dotyczących mechanizmu powstania i funkcjonowania matematyki. Zawsze zakładano, że matematyka jest czysto dedukcyjna i szukano jej trwałych podstaw, zapominając, że „aksjomaty każdej interesującej gałęzi matematyki zostały wyabstrahowane, mniej lub bardziej bezpośrednio z faktów empirycznych, zaś reguły wnioskowania przejawiały po raz pierwszy swoją uniwersalną słuszność w praktyce naszego myślenia"[26]. Przede wszystkim **faktem empirycznym jest niesprzeczność danej teorii matematycznej**. To, co w matematyce uważa się za intuicyjnie oczywiste zawsze pochodzi z doświadczenia – twierdzenia ogólne, dowiedzione przez indukcję na podstawie doświadczenia, mają ten sam stopień pewności i niepewności, co twierdzenia o istnieniu dowodzone dedukcyjnie. Ponieważ, wbrew nadziejom niektórych matematyków, nie można wykluczyć z matematyki twierdzeń egzystencjalnych, więc dopuszczalne jest stosowanie metod indukcyjnych. Oczywiście, przy podejściu empirycznym pojawia się potrzeba rozwiązania nowych problemów, jak na przykład, czym są zdania obserwacyjne w matematyce, jak testować teorie matematyczne itp. Stąd potrzeba badania historii matematyki, gdyż z samej istoty matematyki wynika, że zdaniami obserwacyjnymi muszą być w matematyce tworzące i rozwijające się teorie, co z konieczności wymaga dłuższego (historycznego) czasu. Zwrócił na tę kwestię uwagę inny przedstawiciel empiryzmu w matematyce Imre Lakatos[27].

W całej tej koncepcji jedna rzecz wydaje mi się szczególnie interesująca – chodzi o wskazanie dwóch źródeł, z których bierze swą siłę pewność matematyki. Po pierwsze, podstawowe prawdy matematyczne powstają na drodze abstrakcji, przy pomocy indukcji z faktów empirycznych. Po drugie, co jest szczególnie istotne, reguły wnioskowania (a więc między innymi konkretne metody badawcze) rodzą się z praktyki myślenia.

Istnieją więc w tej koncepcji dwa elementy aprioryczne: jeden z nich odpowiedzialny jest za możliwość otrzymania aksjomatów z faktów empirycznych, a drugi powoduje, że procesy myślenia formalizują się w postaci reguł wnioskowania. Te elementy stanowią *a priori* intuicyjne. Widzimy, że *a priori* formalne jest związane ze stosowaniem metody dedukcyjnej i tym samym składnik ten nie odgrywa zbyt istotnej roli (analogicznie jak w koncepcji intuicjonistycznej), gdyż metoda dedukcyjna ma również empiryczne pochodzenie. Zauważmy, że podobnie jak w intuicjonizmie czy w koncepcji Cantora nie istnieje *a priori* epistemologiczne. Możliwość ujęcia struktury poznawanego świata wynika wprost z dwóch pozaapriorycznych źródeł: z faktów doświadczalnych oraz z procesów myślowych.

Jednak w przypadku empiryzmu procesy myślowe formalizują się w postaci metod badawczych – można odkryć pewne metody, które tym procesem formalizacji kierują. Wskazywał na te metody i analizował ich funkcjonowanie Lakatos[28].

Otrzymujemy więc, że w przypadku empiryzmu *a priori* intuicyjne posiada pewną obiektywną, niezależną od intuicji strukturę. Możemy tym samym tę strukturę badać, analizując nie tylko proces twórczy matematyka, lecz również historię matematyki, która dostarcza całego bogactwa różnorodnych faktów. Jeśli chodzi o intuicjonizm, to mechanizm konstrukcji obiektów matematyki jest tak ściśle związany z intuicją, że nie można od niej abstrahować – w tym przypadku badanie historii matematyki nie ma więc większego sensu. W przypadku filozofii Poincarégo *a priori* intuicyjne, które określa zasada indukcji apriorycznej, posiadająca odpowiedniki w metodach ściśle matematycznych, w małym stopniu poddaje się procesowi formalizacji – jest w swojej istocie jakby nieuchwytne dla matematyki. Podobnie jest w przypadku filozofii Cantora.

Nieco inna sytuacja jest w koncepcji formalistycznej, gdzie brak jest *a priori* intuicyjnego. Stąd znaczenie historii matematyki, która staje się tym samym częścią matematyki, ogranicza się wyłącznie do badania faktów matematycznych w kontekście aktualnego stanu matematyki (metamatematyka Hilberta pełni rolę zwornika łączącego historię matematyki z filozofią matematyki oraz z samą matematyką). Nie ma miejsca na autonomiczne względem matematyki interpretacje jej rozwoju oraz analizę metod stosowanych w matematyce. Widać stąd, że, z punktu widzenia podstawowych struktur poznania,o konieczności uznania historii matematyki, jako autonomicznej dziedziny badań, mającej znaczenie dla matematyki, decyduje *a priori* intuicyjne oraz stopień jego obiektywności.

Po przeprowadzeniu powyższych rozważań chciałbym przypomnieć i zarazem pełniej opisać czym są struktury aprioryczne i jaki jest ich związek z szeroko rozumianą rzeczywistością. Przede wszystkim sądzę, że powyższe analizy pokazały, że struktury aprioryczne nie są strukturami umysłu, mimo, iż w pewnych koncepcjach filozoficznych (np. u Kanta czy u Poincarégo), takie przyporządkowanie wydaje się pojawiać. Te struktury nie są również strukturami realnego świata – mają one pewien rodzaj istnienia idealnego. Z jednej strony wzbogacają struktury poznawcze umysłu, a z drugiej, dzięki nim, rzeczywistość rozszerza się, tworząc w ten sposób świat poznawalny. Myślę, że idea metamatematyki Hilberta ujmuje tę kwestię w odpowiedni sposób.

Dzięki *a priori* formalnemu świat, który konstruujemy, jest zgodny z tym rzeczywiście istniejącym. Zauważmy, że w momencie pojawienia się *a priori* formalnego odpada możliwość (wykorzystana przez pitagorejczyków) wyjaśnienia prawdziwości wiedzy, przez uznanie umysłu za niczym nie wyróżniający się element realnego świata.

A priori intuicyjne „wyposaża" umysł w pojęcia ogólne i w ogólne prawa, będące elementami konstrukcji wiedzy, przez dostarczanie umysłowi „uniesprzeczniających" pojęć – tym samym uzgadnia pracę umysłu z funkcjonowaniem świata. Taka jest rola zasady indukcji apriorycznej Poincarégo, „nagiej dwujedności" Brouwera czy zasady Cantora, pozwalającej z istniejącego idealnie zbioru nieskończonego otrzymywać różne obiekty matematyczne.

I wreszcie *a priori* epistemologiczne (to *a priori* epoki nowożytnej) kwestionując bezpośredni dostęp do struktury rzeczywistości, daje jednak możliwość poznania tej struktury. Leibnizowska harmonia przedustawna niesie ze sobą ideę tego *a priori*, a dokładniej jego funkcjonowanie pokazują: struktura grupy Poincarégo, czyste formy Russella czy nieskończoność Hilberta.

Tym samym w miarę rozwoju nauki rozszerza się świat idealnych bytów (struktur apriorycznych), które z jednej strony „oddzielają" umysł od rzeczywistości, dają jednak w zamian możliwość abstrakcyjnego jej odtwarzania. Myślę, że refleksje matematyków (omawiane w tej pracy), mimo deklaracji odcięcia się od metafizycznych rozważań, w sposób pełny dotyczyły tych „czysto" filozoficznych problemów. W konsekwencji ukazywały w istocie jedność (i zarazem pewną autonomię) pomiędzy matematyką, jej filozofią oraz historią.

Przypisy

[1] Sądzę, że ostatnim filozofem spekulatywnym, budującym swoją filozofię w oparciu o matematykę, był G. Frege. Późniejsze systemy metafizyczne np. filozofia procesu A. N. Whiteheada, jeśli wykorzystywały wyniki nauk szczegółowych, to były to w znaczącej mierze teorie fizyczne lub biologiczne – czysta matematyka przestała inspirować rozważania metafizyczne.

[2] A. P. Juszkiewicz (red.): *Historia matematyki.* Warszawa 1975 T. 1 s. 73–77.

[3] Tamże s. 85–90.

[4] F. Klein: *Rozważania porównawcze o nowszych badaniach geometrycznych.* „Mathematische Annallen" 1893 R. 43. Tłumaczenie S. Dicksteina. „Wiadomości Matematyczne" 1900 T. 4 s. 27–61.

[5] Tamże s. 32.

[6] Tamże s. 37.

[7] Tamże s. 37.

[8] G. Cantor: *Gessammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Red. E. Zermelo. Berlin-Heidelberg-New York 1980 s. 282, Springer-Verlag.

[9] Tamże s. 249.

[10] Tamże s. 282.

[11] Tamże s. 282. Tekst polski w tł. R. Murawskiego. W: *Filozofia matematyki (antologia tekstów klasycznych).* Poznań 1987 s. 160.

[12] Tamże s. 162.

[13] Tamże s. 162.

[14] J. van Heijenoort (red.): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic.* Harward University Press 1967 s. 124–125.

[15] H. Poincaré: *La science et l'hypothese. Paris 1902. Przekład M.H. Horwitza. Warszawa 1908 rozdział 4.*

[16] W. Wójcik: *Pewna interpretacja konwencjonalizmu Poincarégo.* „Kwartalnik Filozoficzny" 1993 z. 3 s. 21–43.

[17] A. Lubomirski: *Henri Poincarégo filozofia geometrii.* Warszawa 1974 PWN.

[18] I. Dąmbska: *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku.* „Archiwum Historii Filozofii i Myśli Społecznej" 1978 T. 24 s. 167–213.

[19] B. Russell: *Introduction to mathematical philosophy.* London 1919. Tłum. Czesław Znamierowski. Warszawa 1958 PWN s. 299.

[20] D. Hilbert: *Über das Unendliche.* „Mathematische Annalen" R. 1926 T. 95. Tekst polski w tł. R. Murawskiego. W: *Filozofia matematyki,* s. 297.

[21] Tamże s. 297.

[22] Tamże s. 301.

[23] L. E. J. Brouwer: *Intuitionisme en formalisme.* Amsterdam 1912. Tekst polski w tł. R. Murawskiego. W: *Filozofia matematyki,* s. 174.

[24] A. Heyting: *Intuitionism. An introduction.* Amsterdam 1966 North-Holland Publishing Company s. 19.

[25] I. Lakatos (ed.): *Problems in the Philosophy of Mathematics.* W: *Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science.* London 1965. Amsterdam 1967 North-Holland Publishing Company s. 187–194.

[26] Tamże s. 188.

[27] Tamże s. 199–202.

[28] Tamże.

W. Wójcik

THE PHILOSOPHY OF MATEMATICS AT THE BREAK OF THE 19TH AND 20TH CENTURIES

The article brings an attempt to approach the major currents in the philosophy of matematics at the break of the 19th and 20th centuries from the perspective of the theory of basic knowledge (cognitive) structures. The theory has been developed using elements of the history of science, and especially ideas contained in F. Klein's Erlangen programme. The structure of the article and the analyses it brings show that it is indespensable to combine historical research and philosophical reflection to understand the analyzed scientific or philosophical theories. Moreover, the analyses presented in the article are aimed at explaining how the conception of *a priori* knowledge (cognitive) structures allows science to free itself from interpretations which overestimate the role of sensory (perceptual) data in the construction of scientific knowledge.