Jan Konior

Oś liczbowa i jej rola w nauczaniu szkolnym matematyki

Nauczyciel i Szkoła 2 (9), 131-143

2000

Jan Konior

Oś liczbowa i jej rola w nauczaniu szkolnym matematyki

Nauczanie szkolne matematyki wykorzystuje szeroko układ współrzędnych w przestrzeni jedno-, dwu- i trójwymiarowej. W każdym z tych przypadków jego rola w szkolnym kursie jest inna. Najmniej bywa eksploatowany układ współrzędnych w przestrzeni. Daleko częściej występuje płaski układ współrzędnych, choć pozostaje on głównie środkiem w nauce o funkcji. Podstawowa i najbardziej dydaktycznie zróżnicowana rola w edukacji matematycznej przypada osi liczbowej. Zadaniem tego artykułu jest analiza niektórych aspektów jej wykorzystania w szkole, zwłaszcza na poziomie wczesnoszkolnym. Z uwagi na rozległość tematu należało dokonać wyboru. Padł on na zagadnienia dydaktyczne mniej omawiane w literaturze lub nie omawiane wcale. Rozważania w zasadzie pomijają kwestie typowo metodyczne, tj. dotyczące bezpośrednio sposobów organizowania pracy z uczniami. Opisy takich metod można znaleźć w literaturze przedmiotu, głównie w przewodnikach dla nauczyciela i nie tylko (por. np. czterotomową pozycję [7]).

1. Pojęcia bieżące i usługowe

Wśród pojęć opracowywanych w szkolnym nauczaniu matematyki występują takie, które po ich wprowadzeniu są poddawane dalszemu systematycznemu badaniu. Uczeń odkrywa i poznaje coraz to nowe ich własności, rozważa pozostające dotąd poza granicą obserwacji nowe związki z innymi pojęciami. Rozrasta się treść pojęcia; często podlega ono procesowi stopniowego uogólniania, zajmuje inne miejsce w zreorganizowanej bądź ciągle przestrukturowywanej całości. Takimi są niektóre podstawowe figury geometryczne. Początkowo ubogi we własności kwadrat obrasta później w bogactwo cech mniej widocznych „gołym okiem" lub niewidocznych, jak choćby niewspółmierność jego boku i przekątnej, a od prostych własności trójkąta przechodzi się z czasem do badania różnych punktów osobliwych z nim związanych (co może obfitować w rezultaty zaskakujące nawet dla tych, którzy etap matematycznych początków mają już dawno za sobą).

Ale są też pojęcia, którym w procesie edukacji matematycznej przypada odmienna rola — usługowa[1]; zajmują one inną pozycję. Pojawiają się w nim (bo nieraz trudno mówić o jakimś odrębnym akcie ich wprowadzania i wyraźnego kształtowania, porównywalnym z przypadkiem poprzednim) po to, aby mogły być wykorzystywane jedynie w roli narzędzi. Co prawda z uwagi na ścisłe związki logiczne w danej rodzinie pojęć matematycznych każde z nich gra w niej rolę w pewnym sensie usługową względem innych (na przykład służy do określenia innego pojęcia lub badania jego własności), ale te, które mamy na uwadze, są niemal wyłącznie środkiem lepszego poznania innych, konstruktem pomocniczym niezmiennie w ten sposób eksploatowanym. Jako przykłady mogą posłużyć: niektóre algorytmy działań, pojęcie zmiennej (por. [3]), w pewnym stopniu pojęcie systemu dziesiątkowo-pozycyjnego (nie dajemy wprost odpowiedzi na pytanie, co to jest system dziesiątkowo-pozycyjny, dość wcześnie uczymy raczej tylko reguł posługiwania się nim, aby zeń później uczynić praktyczne narzędzie w sposób niemal niewidoczny stale wykorzystywane) oraz pojęcie układu współrzędnych, w szczególności na prostej, która jest wtedy — zgodnie ze zwyczajem i żargonem szkolnym — nazywana osią liczbową[2]. Ten ostatni przypadek jest nieco bardziej złożony, ale zasadniczo nie odbiega od pozostałych, gdy za kryterium typizacji szkolnych pojęć matematycznych przyjmujemy — jak tutaj — rolę wyznaczoną im w procesie opracowywania treści programowych. Dla wygody i krótkości wysłowień nazywamy ją rolą usługową, a same te pojęcia — pojęciami usługowymi.

2. Obecność osi liczbowej w programach szkolnych i w nauczaniu matematyki

O znaczeniu osi liczbowej (płaskiego i przestrzennego układu współrzędnych) w kursie szkolnym decydują dwa powody: teoretyczny, którego źródłem w matematyce jest dokonanie Kartezjusza, oraz dydaktyczny. W nauczaniu oś liczbowa i układ współrzędnych (zwłaszcza płaski) były od dawna obecne. Jednak ostatnie dziesięciolecia przyniosły w tym zakresie dość istotne zmiany. Polskie programy nauczania matematyki do lat siedemdziesiątych przewidywały układ współrzędnych w nauczaniu systematycznym; był on wykorzystywany tradycyjnie przy wy-

---

[1] Rozróżnianie pojęć bieżących i usługowych nie oznacza zamiaru ich traktowania jako członów opozycji; nie powinno też być utożsamiane ze spotykanym nieraz w programach szkolnych podziałem na pojęcia (tematy) podstawowe i wspierające. Ten ostatni ma u podstaw charakter lokalny, to znaczy, że pojęcia wspierające w klasie poprzedniej mogą stać się podtawowymi w następnej, Natomiast status pojęć bieżących i usługowych w zasadzie nie zmienia się z biegiem lat nauki, raczej się utrwala.

[2] Ze względu na tradycję i łatwość porozumienia się na gruncie obiegowego języka szkolnego bedziemy tej nazwy, a także pojętej w sensie szkolnym nazwy „układ współrzędnych" używać, konfrontując je później z uściślonymi terminami wprowadzonymi w punkcie 4. To samo dotyczy używanej nieraz obiegowo nazwy „prosta liczbowa".

kresach funkcji, zaś oś liczbowa służyła głównie do geometrycznego przedstawiania przedziałów liczbowych, w szczególności do ilustrowania rozwiązań nierówności. W okresie burzliwych reform 1960–1980 w różnych krajach w nauczaniu pojawiło się wiele nowych pojęć matematycznych, zmian i śmiałych koncepcji. Życie zweryfikowało później zbyt daleko idące zamierzenia, ale część wytrzymała próbę czasu. Naszą szkołę ominęły radykalne reformy. W tym czasie jednak na rodzimym gruncie wyrosły różne idee; niektóre z nich okazały się później korzystne. Należy do nich idea dotycząca obecności osi liczbowej od początku szkolnej edukacji matematycznej oraz inna niż dotąd — daleko bardziej zróżnicowania — koncepcja jej dydaktycznego wykorzystywania w tym nauczaniu. Począwszy od lat siedemdziesiątych oś liczbowa pojawia się więc w rodzimych projektach i programach już na poziomie nauczania wczesnoszkolnego.

3. Perspektywa historyczna

Mnogościowe pojmowanie figur geometrycznych — w tym prostej, od której wychodzimy, konstruując oś liczbową — jest wytworem nowszych czasów i ma głównie motywy teoretyczne (we współczesnej matematyce tworzy się systemy nadbudowywane z reguły nad klasyczną logiką i teorią mnogości). Przez całe stulecia figury geometryczne nie były traktowane wprost jako zbiory punktów. Konsekwentne podejście do figur jako zbiorów przyjęte w szkole od samego początku nie wynikałoby więc z racji historycznych. Nie byłoby też motywowane względami psychologicznymi, gdyż synkretyczny charakter wczesnego myślenia i tendencja do holistycznego traktowania poznawanych obiektów niezupełnie przystają do mnogościowego ujęcia (dlatego też takiego, w pełni konsekwentnego podejścia realizowanego od samego początku w nauczaniu się nie zaleca). Odcinek — rozumiany przez młodszych uczniów jeszcze bardzo konkretnie — jest początkowo czymś jednym, nie wyróżniają oni w nim systematycznie cząstek — punktów. Ten sam sposób myślenia odnosi się w tym okresie do prostej. Ale na prostej można „umieszczać" punkty, o których mówimy, że na niej leżą. Myśl, iż można by z nią kojarzyć zbiór punktów, powoli jednak przestaje być zupełnie obca. Stopniowo — wraz z rozwojem zdolności do abstrakcyjnego myślenia — prosta nabiera „charakteru mnogościowego" i może być tak traktowana lub nie, w zależności od potrzeby i okoliczności. Jest to droga długa, znaczona wieloma trudnościami i charakteryzująca się w szkole naiwnym, ale ciągle ewoluującym rozumieniem. Linia prosta, podobnie jak przestrzeń i czas, jest continuum, którego pojęciowe opanowanie i wgląd w jego strukturę nie są łatwe nawet dla dojrzałych umysłów. Dylemat, czy prosta „składa się" z punktów (i w jaki sposób — bo przecież nie na wzór sznura koralików, gdzie każdy ma z obu stron sąsiada), jest jedną z trudności, które umysł ludzki napotyka w stopniowym opanowywaniu prostej jako continuum i z którymi borykano się od zarania systematycznej działalności poznawczej. Ta pojęciowa ewolucja u dziecka, wykraczająca jeszcze daleko poza okres młodszoszkolny, przypomina w uproszczeniu pewne wątki historycznego procesu, co jest argumentem na rzecz tzw. zasady paralelizmu w dydaktyce matematyki (por. [1]). Spójrzmy z tej perspektywy na początki geometrii, sięgające głębokiej starożytności i na wybrane, charakterystyczne ścieżki późniejszego jej rozwoju. Starożytni Grecy podnieśli geometrię — początkowo praktyczną dziedzinę — do rangi dyscypliny naukowej. Jej przedmiotem stały się obiekty myślowe, tj. abstrakty, wśród nich oderwane pojęcie punktu. W danym zagadnieniu dla Greków istniały tylko te punkty, które można było w jego ramach oddzielnie skonstruować środkami klasycznymi, tj. przy pomocy cyrkla i linijki. Takie stanowisko wynikało konsekwentnie z filozofii platońskiej: figury geometryczne miały egzystować ponadczasowo jako pozaprzestrzenne idee, były całościami. Ale skonstruowane punkty — na przykład punkt styczności prostej do okręgu — leżały na prostej. W ten sposób Grecy — jak poglądowo mówi Lebesgue[3] — rozpoczęli historyczny proces „obsadzania" prostej punktami. Już pitagorejczycy odkryli — mówiąc dzisiejszym językiem — istnienie luk na prostej; koniec przekątnej kwadratu jednostkowego odłożonej na osi od punktu zerowego wskazuje taką lukę. Rozwój różnych dyscyplin matematycznych, w szczególności algebry, pozwalał przez wieki kontynuować „nasycanie" prostej różnego rodzaju punktami — liczbami, które były klasyfikowane ze względu na odsłaniające się nowe potrzeby tych dziedzin. Wśród wielu matematyków mających tu epokowe zasługi wymienimy jedynie Kartezjusza, Lindemanna, Cantora i Dedekinda. W dzisiejszym rozumieniu linię prostą charakteryzuje aksjomatyka euklidesowej geometrii opracowana u schyłku poprzedniego stulecia przez Hilberta. Wśród innych aksjomatem charakteryzującym prostą jest aksjomat zupełności. W ten sposób prosta ostatecznie została — mówiąc obrazowo — opisana jako twór pełny, do którego nie można już włączyć nowych obiektów bez naruszania postulowanych własności.

4. Matematyczne pojęcia osi i układu współrzędnych oraz ich odpowiedniki poglądowe w nauczaniu szkolnym

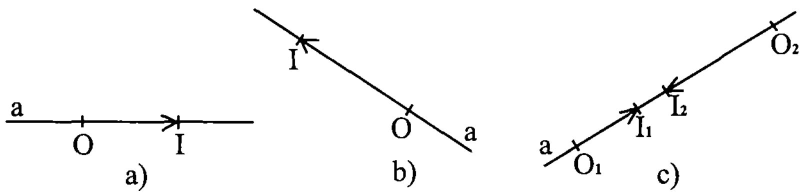
Dalsze uwagi z konieczności nie mają charakteru systematycznego wykładu; dążenie do pełnej ścisłości i dopracowywanie formalnych szczegółów pozostaje na drugim planie, chodzi jedynie o zaakcentowanie istotnych etapów w matematycznej konstrukcji pojęć stanowiących przedmiot niniejszej analizy oraz stworzenie właściwego tła dla dydaktycznych rozważań.

Niech dana będzie prosta a; obieramy na niej punkt O i zaczepiamy w nim niezerowy wektor $\overrightarrow{OI}$ tej prostej, który będziemy też oznaczać krócej przez $\vec{e}$. Osią zbudowaną na prostej a lub krótko osią nazywamy układ czyli parę $(a, \vec{e})$ złożoną z prostej a oraz wektora $\vec{e}$; punkt O zwie się wówczas początkiem osi, wektor $\vec{e}$ wersorem tej osi, zaś zwrot wersora $\vec{e}$ jej zwrotem.

---

[3] H. Lebesgue: *Leçons sur les constructions géométriques*, Paris 1950 (przytaczam za artykułem [5]).

Z przyjętego określenia wynika, że na tej samej prostej można zbudować wiele osi, ustalając dowolnie początek oraz wybierając w różny sposób wersor.



Rys. 1

Graficznie przedstawiamy oś jak na rys. 1a. zbliżonym do tradycyjnych ilustracji podręcznikowych. Powielanie w podręcznikach konfiguracji w tym usytuowaniu jest podyktowane względami praktycznymi; równie poprawne układy przedstawiają rysunki 1b oraz 1c (ten ostatni sygnalizuje w sposób umowny możliwość zbudowania wielu osi na tej samej prostej). Dysponując osią $(a, \vec{e})$, obierzmy na prostej $\boldsymbol{a}$ dowolny punkt P. Wiadomo, że istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x, przy której spełniony jest warunek $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OI}$ czyli $\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{e}$. W ten sposób każdemu punktowi P prostej $\boldsymbol{a}$ możemy przyporządkować jednoznacznie liczbę rzeczywistą x. Takie przyporządkowanie jest funkcją, którą nazywamy zbudowanym na prostej $\boldsymbol{a}$ układem współrzędnych o początku O i wersorze $\vec{e}$. Na oznaczenie tej funkcji przyjmiemy symbol u i zapiszemy ją wzorem $x = u(P)$; w szczególności mamy wtedy $u(O) = 0$ i $u(I) = 1$. Liczba x nosi nazwę współrzędnej punktu P w układzie współrzędnych u na prostej $\boldsymbol{a}$. W ten sposób

— każdemu punktowi prostej $\boldsymbol{a}$ odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista,

— każdej liczbie rzeczywistej odpowiada tylko jeden punkt na prostej $\boldsymbol{a}$.

Mówi się, że taka odpowiedniość jest funkcją wzajemnie jednoznaczną (bijekcją) odwzorowującą zbiór punktów prostej $\boldsymbol{a}$ na zbiór R liczb rzeczywistych. Bijekcja u zależy od parametrów O i $\vec{e}$. Lecz wszystkie takie bijekcje są izomorficzne. Stąd też jest obojętne, gdzie na prostej $\boldsymbol{a}$ obierzemy punkt O i któremu z jej niezerowych wektorów przypadnie rola wersora osi. Warto przy tym pamiętać, że taki wybór jest wyróżnieniem punktu O i wektora $\vec{e}$ na prostej $\boldsymbol{a}$ nie wynikającym w naturalny sposób z samej jej struktury i zbioru wektorów na niej leżących. O każdym takim indywidualnym wyróżnieniu decydują względy pozamatematyczne. Posługując się pojęciem układu współrzędnych na prostej, można w podobny sposób zdefiniować układ współrzędnych na płaszczyźnie oraz w przestrzeni. Określone wyżej pojęcia osi i układu współrzędnych zbudowanego na prostej są różne; oś jest parą złożoną z prostej i wybranego na niej wersora, układ współrzędnych jest funkcją. Podobnie na płaszczyźnie (w przestrzeni) można by sam układ dwóch (trzech) osi nazywać układem odniesienia, zaś przez układ współrzędnych rozumieć bijekcję określoną przy pomocy tego układu odniesienia, ustalającą wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami płaszczyzny (przestrzeni) a parami (trójkami) uporządkowanymi liczb rzeczywistych. To matematyczne rozróżnienie nie występuje w szkole. Tutaj do końca operuje się nie sprecyzowanym ściśle pojęciem osi liczbowej. Poglądowe traktowanie pojęcia osi powoduje, że uczniowie przez oś liczbową rozumieją rysunek, który znamy z kart podręczników szkolnych. Podobnie z nazwą układ współrzędnych na płaszczyźnie kojarzy się w szkole nie funkcję, lecz rysunek przedstawiający dwie prostopadłe osie liczbowe rozumiane poglądowo. Usprawiedliwieniem może być m.in. to, że pojęcia, które omawiamy, mają głównie charakter usługowy. Próby ich uściślania w klasach początkowych byłyby oczywiście niecelowe; formalizm użyty w podanych definicjach wymaga odpowiedniego zaawansowania odbiorcy.

5. Identyfikacja struktur poprzez układ współrzędnych i wynikający stąd jego sens dydaktyczny

Dysponując osią $(a, \vec{e})$, rozważmy zbiór wszystkich wektorów prostej a, zaczepionych w punkcie O. Wektory te możemy dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste, co wolno traktować jako dodawanie punktów (końców tych wektorów) i mnożenie ich przez liczby. W ten sposób na prostej pojawia się algebraiczna struktura przestrzeni wektorowej (oznaczmy ją symbolem $\{a; +, \bullet\}$). Z drugiej strony zbiór wszystkich liczb rzeczywistych ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem także ma strukturę przestrzeni wektorowej (tę strukturę algebraiczną oznaczamy symbolem $\{R; +, \bullet\}$). Można udowodnić, że układ współrzędnych u na prostej a spełnia następujące warunki:

(1) $u(A + B) = u(A) + u(B)$ dla każdych punktów $A, B \in a$,

(2) $u(v \bullet A) = v \bullet u(A)$ dla każdego punktu $A \in a$ i każdej liczby $v \in R$.

Znak + występujący po lewej stronie równości (1) oznacza dodawaniepunktów A,B (wektorów $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$), po prawej — dodawanie liczb; po lewej stronie wzoru (2) występuje mnożenie punktu A (wektora $\overrightarrow{OA}$) przez liczbę rzeczywistą v, zaś po prawej mnożenie liczby $u(A)$ przez liczbę v. Związki (1) i (2) oznaczają, że bijekcja u jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych $\{a; +, \bullet\}$ oraz $\{R; +, \bullet\}$, czyli izomorfizmem zbioru punktów prostej a z ich dodawaniem i mnożeniem przez liczby oraz zbioru R liczb rzeczywistych ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem.

Izomorfizm struktur algebraicznych oznacza, że są one pod pewnym względem podobne: działania w nich określone mają te same własności (wynikające z aksjomatów przestrzeni wektorowej). „Struktury izomorficzne (...) [określone w dwóch zbiorach — JK] identyfikujemy ze sobą w następującym sensie. Zarówno w pierwszym zbiorze, jak i w drugim interesują nas z punktu widzenia algebry tylko określone w nich działania i wynikające z nich związki i własności elementów tych zbiorów, a nie indywidualne cechy tych elementów. W strukturach izomorficznych własności te i związki między elementami są identyczne, nie ma więc potrzeby rozpatrywać ich osobno w pierwszym zbiorze i osobno w drugim. Wprawdzie najczęściej zbiory te są zupełnie od siebie różne, ale ich algebraiczna organizacja jest całkowicie jednakowa" ([6], str. 64).

To podobieństwo zbioru punktów na prostej a i zbioru R liczb rzeczywistych ze względu na określone w nich własności działań (wynikające z postulowanych aksjomatów przestrzeni wektorowej) stanowi matematyczną podstawę zabiegów w klasie, polegających na ilustrowaniu niektórych własności działań na liczbach za pomocą osi liczbowej. Wykorzystujemy wówczas układ współrzędnych. Zbiór punktów na prostej a — gdy bierzemy pod uwagę tylko podane wcześniej działania i wspomniane ich własności — ma bowiem podobną organizację jak zbiór R. Badając te własności, możemy punkty zastępować liczbami i vice versa, bez obawy, że zajmując się punktami uzyskamy coś, co dotyczy punktów, a nie dotyczy liczb.

Podobieństwo pod względem niektórych własności algebraicznych działań nie wyczerpuje analogii między zbiorem punktów prostej, a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Jeśli zainteresujemy się porządkiem i odległością w każdym z nich, to okaże się, że mają one taką samą budowę porządkową i metryczną przy odpowiednio określonych relacjach porządkujących i metrykach. Wyrażamy to dokładniej, stwierdzając izomorfizm ich struktur porządkowych i fakt, że jedną z tych przestrzeni metrycznych można przeprowadzić na drugą za pomocą izometrii. W sytuacjach lekcyjnych i zadaniowych wykorzystujemy tę analogię w różnych zakresach (algebraicznym, porządkowym, metrycznym), nie zastanawiając się nieraz nad tym, ze względu na intuicyjność występujących tu pojęć, jaki izomorfizm w danym ogniwie naszego rozumowania naprawdę interweniuje. Wartość dydaktyczna tego izomorfizmu polega na tym, że uczeń — poznając nowe fakty — może zamiennie operować punktami na prostej bądź liczbami, w zależności od tego, co w danej chwili przyniesie lepsze efekty lub co okaże się dlań wygodniejsze[4].

[4] W związku z przeprowadzoną analizą sformułujmy jeszcze uwagę uzupełniającą. Kolejność opracowywania pojęć w nauczaniu jest podyktowana przede wszystkim względami psychologicznymi, a materiał szkolny nie jest zorganizowany ściśle według struktur wyodrębnionych w matematyce. Na przykład dość wcześnie dziecko poznaje — obok innych własności — przemienność mnożenia (która bywa rozważana również jako dodawanie jednakowych składników). Z punktu widzenia strukturalnej organizacji matematyki rozważa więc uporządkowany półpierścień przemienny z jednością (por. [2], str. 118), podczas gdy w charakterystyce roli układu współrzędnych mówiliśmy najpierw o przestrzeni wektorowej, nadmieniając dalej o strukturze porządkowej i metrycznej. W materiale szkolnym przenikają się różne — nie tylko wymienione — struktury matematyki, stanowiąc w praktyce jego realizacji naturalne całości metodyczne. Natomiast formalizmy w matematyce nakazują te struktury rozdzielać oraz inaczej porządkować: według kryteriów obowiązujących w teorii.

W szkolnym języku i zresztą w samej matematyce te analogie znalazły wyraz w zamiennym używaniu określeń „punkt” i „liczba”(„para liczb” bądź „trójka liczb” — odpowiednio na płaszczyźnie lub w przestrzeni), gdy posługujemy się układem współrzędnych, choć liczba i punkt są — co do swej natury — zupełnie innymi obiektami matematycznymi. To postępowanie nie od początku edukacji matematycznej ma taki pełny, formalny charakter. Czasem bowiem z różnych powodów (na przykład z uwagi na wiek uczniów, którzy jeszcze nie „wyposażyli” prostej w punkty tak, jak byłoby to konieczne w rozważanym zagadnieniu, bądź też biorąc pod uwagę specyfikę bieżącego problemu) operujemy odcinkami, traktując je na prostej *a* podobnie jak odcinki skierowane (wektory).

6. Wybrane kwestie dydaktyczne dotyczące wykorzystania osi liczbowej w edukacji matematycznej

Ideę związaną z obecnością osi liczbowej od początku nauczania można by scharakteryzować, nawiązując do wspomnianego wcześniej (por p. 3) historycznego procesu „obsadzania” prostej liczbami. Rozpoczynając od liczb pierwszej dziesiątki, dziecko umiejscawia na osi te liczby, które aktualnie poznaje. W tym permanentnym procesie „nowe” liczby ciągle znajdują miejsce na prostej, niejako ją wzbogacając. Jednocześnie stale jest na niej jeszcze miejsce i ten intuicyjny fakt od początku obecny w postępowaniu nauczyciela i w konkretnych działaniach ucznia ma znaczenie poznawczo-motywujące (wynika stąd choćby taki szczegół metodyczny, że punkt reprezentujący liczbę 0 warto obierać nie na końcu kreski, lecz w pewnym odstępie od niego). Prosta liczbowa nie jest więc od razu „pełną” osią liczbową w sensie używanym w matematyce dorosłej. Można by powiedzieć, że na początku — a tak naprawdę aż do momentu poprzedzającego formalne zamknięcie nauki o liczbie w szkole — występuje ona jako obiekt o charakterze potencjalnym. Tak wczesne wprowadzanie osi liczbowej nie może nawiązywać wprost do gotowego pojęcia prostej, czy nawet odcinka, gdyż zorganizowany proces kształtowania tych pojęć jeszcze się w pełni nie rozpoczął. Dobrze modelują prostą liczbową takie przedmioty, jak linijka, termometr, szlaczki liczbowe itp., od których zaczynamy i z których dzieci mogą wyabstrahować potrzebny im obraz. Na przykład na termometrze zaokiennym mają okazję zetknąć się spontanicznie z liczbami wyrażającymi temperatury poniżej zera, co można wykorzystać do umotywowania wspomnianego już położenia początku osi. Prosta liczbowa pojawia się więc początkowo jako schemat odwzorowujący zasadnicze cechy tych przedmiotów, skonkretyzowany w rysunku. Nanoszenie liczb *0, 1, 2, 3, ... , n* na prostą odbywa się w różnych sytuacjach, które nauczyciel stwarza na lekcji. Wśród nich warto zorganizować ćwiczenia polegające na szeregowym układaniu — od punktu mającego spełniać rolę początku osi — klocków jednakowej długości z jednoczesnym zaznaczaniem przez dzieci na niej punktów o współrzędnych będących kolejnymi liczbami naturalnymi, gdy bierzemy klocki jednostkowe bądź niekolejnymi, gdy klocki są dłuższe. Na tę sytuację zwracamy tu uwagę, gdyż ma ona znaczenie nie tylko techniczne, jak mogłoby się powierzchownie wydawać; służy nie tylko skalowaniu osi. Powtarzając takie ćwiczenie, otwieramy dziecku drogę prowadzącą do odkrycia i stopniowego opanowywania ważnego faktu ogólnego, wyrażającego się w tzw. zasadzie Archimedesa, która głosi, że:

> Odkładając kolejno od pewnego punktu na prostej odcinek tak, aby koniec odłożonego już odcinka był początkiem następnego, przekroczymy za którymś krokiem zadany z góry punkt tej prostej.

Jest to wersja geometryczna tej zasady ogólnej; dla liczb może ona być wypowiedziana tak:

> Jeśli $a, b \in R_+$ i $a \neq 0$, to istnieje liczba naturalna n taka, że $n \cdot a > b$ (symbol R_+ oznacza tu zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych).

Wprawdzie zasada ta okaże się podstawowym twierdzeniem dopiero w zaawansowanym kursie szkolnym, ale nauczanie początkowe ma już tutaj okazję wypełnić swą rolę perspektywiczną, przygotowując pierwociny pojęć i twierdzeń matematycznych oraz tworząc zalążki, bez których myślenie ucznia nie mogłoby osiągnąć pełni dojrzałości. Odkładanie klocków wzdłuż prostej jest pierwszym zorganizowanym doświadczeniem na temat zasady Archimedesa, która ma spontaniczne zastosowania w życiu codziennym, ale bez której nie można także udowodnić wielu istotnych twierdzeń matematycznych.

Główne zadanie edukacji matematycznej wczesnego okresu szkolnego — ukształtowanie zrębów pojęcia liczby naturalnej — bynajmniej nie sprowadza się wyłącznie do opanowania pojedynczych liczb naturalnych, na przykład w ramach monografii takich liczb, nawet gdy jest powiązane z umiejętnością poprawnego liczenia i wyraża się w dostatecznie sprawnym operowaniu notacją w systemie dziesiątkowym. Pojęcie to kształtuje się i pogłębia także przez poznawanie relacji i działań na liczbach naturalnych. Ogólniej: poznanie liczby naturalnej to poznanie struktury zbioru liczb naturalnych.

Zbiór ten ma fundamentalną własność, bez której pełne opanowanie pojęcia liczby naturalnej nie byłoby możliwe. Zasada indukcji matematycznej — bo o niej tu mowa — określa w pewnym sensie budowę tego zbioru: po każdej liczbie naturalnej jest bezpośrednio następna. Oznacza to, że każdą można osiągnąć przez kolejne dodawanie jedynki. Dziecko powinno mieć wiele okazji do poglądowego przeżywania tego i podobnych faktów poprzez „przeskakiwanie" z liczby na liczbę na osi liczbowej, co może być symulowane w różny sposób, na przykład przez kolejne odkładanie ustalonego odcinka. Chodzi m.in. również o ćwiczenia angażujące zmysł słuchu, mające charakter rytmiczny itp., typu: jedno z dzieci kolejno wskazuje i odczytuje głośno liczby naturalnego ciągu na osi, pozostałe orzekają chórem — lub „wyklaskują" zgodnie z umową — czy wymieniono liczbę parzystą, czy też nie; w kolejnych edycjach zabawy uwzględnia się oba zwroty na osi i rozpoczyna w różnych jej punktach odpowiadających liczbom naturalnym.

Samo sformułowanie zasady indukcji matematycznej i jej formalne wykorzystywanie będzie przedmiotem nauczania dopiero w klasach licealnych. Można ją wypowiedzieć następująco:

Jeżeli

1^0 liczba *0* ma pewną własność *w(n)* dotyczącą liczb naturalnych

i

2^0 z tego, że ma tę własność liczba naturalna *k*, wynika, że posiada ją również liczba *k+1*, to każda liczba naturalna posiada własność *w(n)*.

Struktura logiczna tego twierdzenia oraz forma językowa są trudne nawet dla starszych uczniów, choć wyraża ono intuicje, nad rozwojem których pracujemy w nauczaniu od początku. Najbardziej elementarne i podstawowe fakty nieraz wymykają się świadomości i trudno je zauważyć; nie dostrzegli też bezpośrednio zasady indukcji starożytni Grecy.

Warunek 2^0 zwany jest nieraz warunkiem dziedziczenia; postuluje on bowiem, aby własność *w(n)* dziedziczyła się, tj. „przechodziła" z liczby naturalnej *k* na liczbę *k+1*, bezpośrednio następującą po liczbie *k*. W kontekście całego twierdzenia wyraża on przez to w matematycznej formie intuicje dotyczące przeprowadzania tzw. rozumowań rekurencyjnych (od *recurrere* — biec z powrotem). Rozumowanie rekurencyjne stosuje się również poza matematyką. Polega ono na znajdowaniu i określaniu nie znanych stanów aktualnych przez znane stany poprzednie dzięki regularności szeregu owych wcześniejszych zdarzeń. Tak rozumuje dziecko, jeśli przewiduje, iż przeskakując na osi co drugą liczbę naturalną (gdy rozpoczęło od zera) z pewnością napotka liczbę parzystą, choćby zechciało szukać bardzo daleko. Jest to oczywiście rozumowanie nieformalne i nieuświadomione, ale oparte na rozwijającej się intuicji rekurencji.

Warunkiem tego rozwoju w nauczaniu jest planowe organizowanie stosownych ćwiczeń. Jednym z nich mogłaby być na przykład sytuacyjna zabawa „wiewiórka zagrzebuje orzechy". Wiewiórka, skacząc po osi, trafia tylko na liczby 1, 2, 3 itd. Pod wybraną liczbą — weźmy liczbę 5 — chowa pewną ilość orzechów, a pod każdą następną o dwa więcej. W swej wędrówce dochodzi do punktu odpowiadającego liczbie 8. Na pytanie, ile orzechów należy dołożyć pod piątkę, aby było tyle samo, co pod ósemką wiele młodszych dzieci — jak wskazują przeprowadzone w podobnych okolicznościach badania psychologiczne (por.[7], tom 1, str.187) — nie potrafi dać odpowiedzi; dla rozwoju intuicji rekurencji potrzebne są rozmaite doświadczenia. Intuicje związane z rekurencją uważa się z kolei za konieczne w procesie kształtowania pojęcia liczby naturalnej. B. Russel podkreślał, że indukcja matematyczna jest częścią charakterystyki liczby naturalnej, wręcz jej konstytutywnym składnikiem. Dla pełności obrazu dodajmy jednak, że poglądy na niektóre omawiane kwestie nie zawsze są zbieżne. Część badaczy sądzi, iż rekurencja jest predyspozycją człowiekowi daną, preegzystuje w jego świadomości, inni akcentują konieczność jej kształtowania.

Wykorzystując racjonalnie oś liczbową w opracowywaniu pojęć i twierdzeń matematycznych, otwieramy młodemu umysłowi drogę do matematycznego rozwoju w dwóch uzupełniających się kierunkach. Weźmy dla przykładu jeden z nich: arytmetyczne prawo przemienności dodawania. Z jednej strony, przechodząc od liczb do prostej lub na odwrót, uczeń stale zamienia w sytuacjach myślowych jedne obiekty na drugie: zastępuje liczby punktami (odcinkami, wektorami) i vice versa. Taka transformacja daje mu okazję do stopniowego wyabstrahowywania (por. [4]) i utrwalania najogólniejszego schematu obecnego zarówno w czynności dodawania określonego na punktach, jak i w dodawaniu liczb, gdy obiekty dodawane bierze w dowolnej kolejności: schematu binarnej operacji komutatywnej. Dla osiągnięcia tej ogólności ważne jest, by myśl ucznia niejako ignorowała to, iż w jednym przypadku dodaje się liczby, a w drugim punkty; powinna się od treściowych aspektów rozważanej sytuacji stopniowo uwalniać. Co jest istotne w początkowych etapach, to próba — zapewne daleka od pełnego powodzenia — abstrakcyjnego ujęcia przemienności, a przede wszystkim okazja do kontaktu z metodycznie zorganizowaną sytuacją.

Z drugiej strony w każdym z dwu rozważanych modeli widać specyficzne cechy obiektów i zachodzących tam związków. Narzucają się one uczniowi z dużą siłą. Dodawanie w zbiorze R lub w jego podzbiorze jest dlań przemienne jako d o d a w a n i e l i c z b. Podobnie dodawanie odcinków (wektorów lub punktów na prostej — zależnie od interpretacji), które dla dziecka jest związane z treścią pojęcia „odcinek" (wektor, punkt), wykonuje ono, zmieniając ich porządek, gdyż to jest s k ł a d a n i e o d c i n k ó w. Można by to widzenie i związany z nim sposób myślenia chwilowo nazwać atrybutywnym. Oto sytuacja, w której takie „treściowe" składniki występują. Dziecko wykonuje dodawanie $3 + 4$. Zmiana porządku składników w tym przypadku nie daje mu specjalnych korzyści praktycznych. Już jednak przy obliczaniu sumy $2 + 7$ przez kolejne dodawanie jedynki warto z niej skorzystać. Natomiast na osi nawet w tym ostatnim przypadku zmiana kolejności dodawanych odcinków nie przyniesie podobnych efektów; tutaj fakt, że tę samą sumę można tworzyć, nie zwracając uwagi na kolejność danych składników, ma raczej tylko znaczenie teoretyczne. Dostrzeganie takich, w pewnym sensie specyficznych, cech każdego z rozważanych modeli jest ułatwione przy wielokrotnych konfrontacjach jednego modelu z drugim. Jest ono przede wszystkim dydaktycznie istotne jako element konstruowania tzw. pamięci modeli, która wydaje się niezbędna w myśleniu typu matematycznego. Zapewnia mu bowiem niezbędną elastyczność i możliwość twórczego funkcjonowania na każdym poziomie.

Ponad tą przemiennością, związaną w świadomości ucznia z naturą dodawanych obiektów, leży przemienność operacji w sensie ogólnym, o której była mowa wcześniej. Wydaje się, że w pełnym rozumieniu prawa przemienności dodawania liczb rzeczywistych, już na poziomie szkolnym zaawansowanym, partycypuje jedna i druga. Tak więc — podsumujmy ten fragment — racjonalne działania dydaktyczne dotyczące wykorzystania osi liczbowej mogą sprzyjać rozwojowi myśli ucznia w dwóch aspektach: ogólnym (co ma źródło m.in. w istnieniu i funkcjonowaniu izomorfizmu między strukturą zadaną na prostej, a odpowiednią strukturą w zbiorze liczb) i atrybutywnym (prowadzącym do kompletowania standardowych modeli, niezbędnych w operatywnym myśleniu matematycznym).

W rozważaniach metodycznych postulujących wykorzystywanie osi liczbowej na ogół mówi się o geometrycznej interpretacji pojęć i związków liczbowych na prostej. To jednokierunkowe przejście od liczb do osi jest w pewnym sensie usprawiedliwione. Ale trzeba z naciskiem podkreślić, że posługując się osią liczbową w nauczaniu, rozwijamy zarówno pojęcia arytmetyczne, jak i pojęcie prostej. Nie należy jednak w żadnym razie zakładać, że dzieje się to automatycznie. Poznawanie coraz większych liczb — przy ich odpowiedniej ekspozycji metodycznej na osi — ułatwi zapewne w przyszłości zrozumienie nieograniczoności prostej.

Obcowanie z osią liczbową jest też ważnym elementem ułatwiającym uczniowi stopniowe opanowywanie nieskończoności w zakresie i w formie dostępnej w szkole. Intuicje dotyczące tego trudnego pojęcia, z którym zmagali się matematycy (filozoficzny punkt widzenia pozostawiamy na uboczu) od starożytności, leżą u podstaw kształtowania wielu pojęć matematycznych z geometrii i arytmetyki szkolnej. W procesie formowania się samego pojęcia prostej są obecne zarówno przy rozważaniu jej nieograniczoności, jak i przy dokonywaniu permanentnego podziału, który występuje już we wczesnych okresach nauki o ułamkach i ich porównywaniu, a później pojawia się z okazji analizy pojęcia gęstości zbioru liczb wymiernych. Jako przykłady pochodzące z bardziej zaawansowanego poziomu można wskazać pojęcie kresu, granicy, ciągłości funkcji itp. Powodzenie w opanowaniu tych pojęć ma swe źródła m.in. w perspektywicznych i przemyślanych zabiegach metodycznych na poziomie wczesnoszkolnym.

Bibliografia

R. Duda: *Zasada paralelizmu w dydaktyce*. „Dydaktyka Matematyki" 1 (1982), str. 127–138.

A. Grzegorczyk: *Zarys arytmetyki teoretycznej*. PWN, Warszawa 1971.

J. Konior: *Budowa i lektura tekstu matematycznego. Podstawy nauki czytania tekstów matematycznych w szkole*. Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1998.

J. Konior: *Czym jest pojęcie matematyczne*. Prace Naukowe WSEW w Mysłowicach (zeszyt nr 3): *Szkoła polska u progu nadchodzącego wieku* (red. P. Kowolik), „Impuls", Kraków 1999, str. 163–177.

Z. Krygowska: *O pojęciach pierwotnych w kursie systematyczno-dedukcyjnym geometrii w szkole*. Rocznik Naukowo-Dydaktyczny Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie, nr 1, Matematyka, str. 115–126.

Z. Opial: *Algebra wyższa*. Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1964.

Z. Semadeni (red.): *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela*, tomy 1–4; WSiP, Warszawa 1984–1988.