Vaŝmakova, I. G.

Античные математические методы в работах учёных XVI-XVII веков

Organanon 4, 113-117

1967

И. Г. Башмакова (СССР)

АНТИЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАБОТАХ УЧЁНЫХ XVI—XVII ВЕКОВ

В центре внимания математиков XVI—XVII вв. было развитие инфинитезимальных методов, которое завершилось, в известной мере, созданием интегрального и дифференциального исчислений в трудах Ньютона и Лейбница. Выкованное ими орудие и до сих пор занимает основные место во всех приложениях математики.

Между тем, инфинитезимальные методы восходят к античности. Я попытаюсь оценить какую роль в процессе формирования этих методов в новое время сыграли труды античных математиков, а именно, Архимеда и Диофанта.

В историко-математической литературе хорошо исследована одна сторона вопроса, а именно, относящаяся к развитию интегральных методов. Теперь уже можно считать бесспорно установленным фундаментальное значение трудов Архимеда, которые внимательно изучали и старались переложить на новый язык все ученые, работавшие в этой области, от Галилея и Кеплера до Барроу.

Однако, принято считать, что в отношении методов определения касательных и экстремумов дело обстоит иначе. Сложилось мнение, что ученые XVII в. не нашли у древних общих дифференциальных методов и что эти методы были впервые развиты в XVI—XVII вв. Таким образом, дифференциальные методы считались «моложе» интегральных, по крайней мере, на 2 тысячи лет.

В статье *Les méthodes différentielles d'Archiméde* мною было показано, что Архимед владел общим методом для определения касательной (он пользовался тем же бесконечно малым характеристическим треугольником, что и мы), и умел сводить задачи на экстермумы к задачам на касательные. Он нашел необходимые условия для того, чтобы выражение $U(x) = f(x)g(x)$ имело экстермум M в точке X_0: для этого кривые $y_1 = f(x)$ и $y_2 = \dfrac{M}{g(x)}$ должны иметь в точке x_0 общую касательную, или, в соответственных терминах $y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$ что равновильно условию

$$f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) = 0.$$

Архимед применил свой метод для нахождения экстремума $x^2(a—x)$, рассмотрев кривые $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = \frac{M}{a—x}$

В древности никто не продолжил эти методы. Это было сделано, как показали исследования Л. А. Сорокиной и мои, в XVII в. Торричелли и Риччи. Вначале, этим путем, который Риччи называл методом конических сечений, был найден экстремум функции $M(x) = x^{3/2}(a—x)^{1/2}$, причем рассматривались кривые $y_1 = \frac{M}{x}$, $y^2 = \sqrt{x(a—x)}$. Затем Торричелли рассмотрел вопрос об экстремумах выражений вида $U(x) = x^m(a—x)^n$ где m и n — любые целые. При этом он усовершенствовал сам метод, приняв в качестве одной из вспомогательных кривых прямую $y_1 = a—x$. Это можно сделать, если искат экстремум $Z(x) = U^{1/n}(x) = x^{m/n}(a—x)$. Тогда $y_1 = a—x$, $y_2 = \frac{M}{x^{m/n}}$ Таким образом Торричелли сводит задачу к отысканию касательной и кривой $y = Mx^{-m/n}$, или $x^m y^n = k$. Далее, он дает несколько различных способов нахождения касательных к кривым указанного вида. Таким образом, он пришел к задаче нахождения касательной к кривой вида $x^m y^n + k$, путем обобщения задачи Архимеда и некоторого видоизменения его метода.

Итак, метод экстремумов Архимеда был известен ученым XVII в. и плодотворно применялся ими. Сами ученые этого времени хорошо понимали фундаментальное значение трудов Архимеда для формирования интегральных и дифференциальных методов, причем никогда не считали дифференциальные методы новым открытием.

Однако, для создания современных дифференциальных методов имели значение не только труды Архимеда. Известно, что в XVII в. были созданы два чисто алгебраические метода нахождения производной — метод Декарта и метод Ферма. Последний и теперь играет основную роль в алгебраической геометрии при рассмотрении кривых над произвольным полем.

Мы покажем, что истоки метода Ферма восходят к Диофанту.

Не может быть и речи о том, чтобы в таком кратком сообщении дать представление о значении *Арифметики* Диофанта в целом. Ведь к ней восходит вся новая алгебра, начиная с символов для обозначения неизвестной и ее степеней и кончая правилами оперирования с отрицательными числами. Недаром *Арифметика* Диофанта была настольной книгой и у Виеты и у Ферма. Ферма обращался к ней постоянно и читал ее с таким же вниманием и настойчивостью, с какими два столетия спустя Дирихле изучал *Disquisitiones arithmeticae* Гаусса. И та и другая книга определили проблемы арифметики и алгебры на столетия вперед.

Мы остановимся здесь только на узком вопросе о связи метода касательных и экстремумов Ферма с *Арифметикой* Диофанта.

Для этого я напомню метод, с помощью которого Диофант находил рациональные точки на кривой третьего порядка. Пусть дано уравнение

$$f(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — многочлен третьего порядка. Пусть существует рациональное решение a, b.

Чтобы найти другое рациональное решение, Диофант полагает

$$y = k(x-a)+b \tag{2}$$

или

$$y = k\xi+b, \ x = \xi+a$$

Если воспользоваться более наглядным языком геометрии, то это означает, что через точку (a, b) кривой (1) он проводит прямую (2) и ищет другие ее точки пересечения с кривой. Он приходит к уравнению

$$f(\xi+a, \ k\xi+b) = 0 \tag{3}$$

которое можно представить в виде:

$$f(\xi+a, \ k\xi+b) = f(a, \ b)+\xi A_1(a, \ b)+k\xi \ B_1(a, \ b)+$$
$$+\xi^2 A_2(a, \ b)+K\xi C_2(a, \ b)+K^2\xi \ B_2(a, \ b)+\ldots = 0. \tag{3'}$$

Но $f(a, b) = 0$, поэтому, после сокращения на ξ получается уравнение второй степени. Для того, чтобы оно имело рациональное решение, Диофант приравнивает нулю его свободный член, иначе говоря, коэффициент при ξ в уравнении (3'):

$$A_1(a, \ b)+K \ B_1(a, \ b) = 0 \tag{4}$$

или, в современных обозначениях

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ (a, \ b)+K \ \frac{\partial f}{\partial y} \ (a, \ b) = 0$$

т. е. требует, по существу, чтобы результирующее уравнение имело кратный корень. Это равносильно требованию, чтобы прямая (2) касалась кривой (1) в точке a, b. Из (4) он получает:

$$K = -\frac{A_1(a, \ b)}{B_1(a, \ b)} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \ (a, \ b).$$

При этом $A_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $B_1 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ определяются чисто алгебраически.

Поскольку теперь прямая (2) касается кривой (1), то она будет иметь с ней еще одну точку пересечения, которая определится из уравнения первой степени с рациональными коэффициентами, а потому, будет рациональной.

Так, например, задачу 24 кн. IV (нумерация проводится по изданию P.Tannery, по изданию Wertheim это зад. 25), Диофант сводит к решению неопределенного уравнения:

$$x(a—x) = y^3—y.$$

Одно из его рациональных решений будет (0, —1). Диофант полагает: $y = kx—1$ и приходит к результирующему уравнению

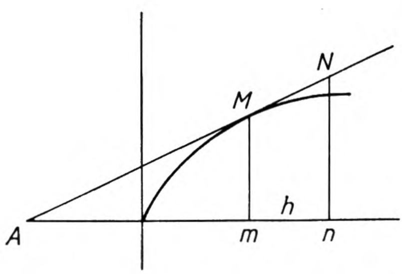
$$k^3x^3—(3k^2+1)x^2+(2k—a)x = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при x, он получает $k = \frac{a}{2}$ после чего находит рациональное значение x.

В своих замечаниях на полях книги Диофанта Ферма явно формулирует этот метод и принимает его для решения задачи о представлении суммы двух кубов суммой двух других кубов (замечания к задачам 1 и 2 книги IV и зад. 24 книги VI).

Этот же метод позволил Ферма построить общий алгоритм для решения задач на определение экстремумов и касательных для класса алгебраических функций. Этот алгоритм и дает возможность находить производную чисто алгебраическим путем, не прибегая к рассмотрениям топологического характера.

Пусть требуется определить касательную MA и кривой $F(x, y = 0$ в точке $M(x_0, y_0)$. Если N — производительная точка касательной, $N \neq M$, и $h = x—x_0$, то уравнение касательной будет



$$k = \frac{y_0}{S} \neq \frac{y}{S+h}$$

или

$$y = \frac{y_0}{S}\left(S+h\right) = y_0\left(1+\frac{h}{S}\right) = y_0+kh.$$

Представляя новое значение x и y в уравнение кривой и развертывая $F(x, y)$ по степени h, Ферма получает:

$$F(x_0+h, y_0+kh) = F(x_0, y_0)+hA_1(x_0, y_0)+khB_1(x_0, y_0)+h^2Q(x_0, y_0, h, k) = O.$$

Это уравнение имеет n корней h_1, h_2, ..., h^n, которые отвечают n точек пересечения касательной AM с кривой $F(x, y) = O$. Так как $F(x_0, y_0) = O$, то $h_1 = O$ является одним из корней (ему соответствует сама точка M). Но, так как AM касательная, то $h = O$ является корнем кратности 2, и, значит

$$A_1(x_0, y_0)+kB_1(x_0, y_0) = O.$$

Этот метод, очевидно, совпадает с Диафантовым. Впрочем, излагая его для простейшего случая нахождения экстремума функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — многочлен, Ферма сам говорит о приравнивании по Диофанту.

Таким образом, мы обязаны древним двумя важнейшими в современной математике методами определения производной. Сказанное далеко не исчерпывает результаты древних в развитии дифференциальных методов. Думаю, что исследование этого вопроса в истории науки только начинается.