

# Gaweł, Antoni

---

## Die Anfänge kristallographischer Erwägungen bei Johannes Kepler

---

Organon 9, 155-160

---

1973

Artykuł umieszczony jest w kolekcji cyfrowej Bazhum, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych tworzonej przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego.

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie ze środków specjalnych MNiSW dzięki Wydziałowi Historycznemu Uniwersytetu Warszawskiego.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.



*Antoni Gawel* (Polen)

## DIE ANFÄNGE KRISTALLOGRAPHISCHER ERWÄGUNGEN BEI JOHANNES KEPLER

An dem 400. Geburtstage J. Keplers sollten unter seinen feierlich geehrten Errungenschaften in der Astronomie und Mathematik auch Verdienste auf vielen anderen Gebieten der Wissenschaften nicht vergessen bleiben. Dies bezieht sich besonders auf seine Arbeiten, die gedankenvolle Einführung in die neuzeitliche Lehre der Kristallographie bildeten.

Die Untersuchung der geometrischen Formen, die den Mineralien und den anderen festen Körpern eigen sind, stützt sich zwar auf Mathematik, bleibt aber im engen Zusammenhang mit der Physik und Chemie, bedient sich jedoch zugleich beschreibender Methoden der Naturwissenschaften. Im Gegensatz zu fast allen Disziplinen der Wissenschaften findet man keine Anfänge der Kristallographie in der antiken Welt. Bei Homer bedeutet kristallos soviel wie Eis. Später wurden mit diesem Wort alle durchsichtigen, geometrisch gestalteten Mineralien bezeichnet, insbesondere der Quarz oder der Bergkristall, dessen sechseckige Säulen Plinius der Ältere beschrieb. Beobachtungen der kapriziös sich ändernden geometrischen Formen an den Mineralien konnten zu keinen wissenschaftlichen Folgerungen hinführen sogar bei den mathematisch geschulten Griechen, denen die Eigenschaften der regelmässigen Polyeder bekannt waren (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Pentagondodekaeder, Ikosaeder).

Mit diesen Polyedern in Bezug auf natürliche Formen von Mineralien befaßte sich im XVI. Jahrhundert der Nürnberger Goldschmied, Wentzel Jamitzer. Er versuchte die Vielartigkeit der Formen an den Kristallen mit dem Durchdringen und Zuschneiden dieser Polyedern untereinander zu erklären, wodurch Gebilde entstehen sollen, die reicher an Flächen sind, insofern diese anstatt der Kanten und Ecken auftreten. Er beschrieb auch die Verwachsungen der Polyeder auf die Art derjenigen der Zwillinge und Drillinge. Den physikalischen Bau der Kristalle versuchte er als Gebilde darzustellen, das sich aus dicht aneinander gelagerten kleinsten Polyedern zusammensetzt. Er mußte, jedoch erfahren, daß die

Nachbildung eines großen Oktaeders mit Hilfe kleiner Oktaeder auf diesem Wege nicht durchführbar ist, da zwischen diesen Bausteinen hohle tetraëdrische Räume entstehen. Beim Fehlen bzw. bei Ungenauigkeit naturwissenschaftlicher Beobachtung an Mineralien konnten Erwägungen, die aprioristischen mathematischen Konstruktionen entstammten, keine erfolgreiche Resultate bringen. So möchte er nur durch Beobachtung der Natur sich überzeugen, daß weder Pentagondodekaeder noch Ikosaeder jemals im Mineralreiche vorkommt. Mathematische Erwägungen und Folgerungen veröffentlichte W. Jamitzer als *Perspectiva Corporum Regularium*<sup>1</sup> im Jahre 1561, also drei Jahre vor der Geburt J. Keplers.

Zu Beginn des XVII. Jahrhunderts befaßte sich in ähnlicher Weise mit regelmäßigen Polyedern J. Kepler. Er fügte denselben das Rhombendodekaeder bei, der in der Natur an den Granatkristallen vorkommt, am Mineral, das J. Kepler nicht erwähnte, obwohl es schon aus den damaligen in Sachsen tätigen Zinngruben bekannt war. Keplers geometrische Studien über diese Polyeder, über ihr Durcheinanderdringen, ihre Symmetrieverhältnisse, sowie über ihre Rolle beim Bau der Materie veröffentlichte er in zwei Abhandlungen: *De Nive Sexangulari*<sup>2</sup> und *Harmonices Mundi*<sup>3</sup>.

Die Absicht eine Abhandlung zu schreiben und diese als Neujahrs-geschenk (strena) dem kaiserlichen Hofrat Wakher von Wakherfels anzubieten fiel dem Gelehrten während eines winterlichen Spazierganges im Schneewebter.

Während Jamitzer die Abhängigkeit der geometrischen Gestalt der Kristalle mit ihrem innerlichen physikalischen Bau zu erklären versuchte, bestand bei Kepler der Zusammenhang der oben genannten Polyedern mit den chemischen bzw. alchemistischen Beschaffenheiten der Naturgegenstände. Den einzelnen regelmäßigen Polyedern schrieb er nämlich die Eigenschaften der vier Elemente zu, die seit Empodocles aus Akragas (in Sizilien, 490–430 J. vor unserer Zeitrechnung) angenommen wurden. Demnach symbolisierte das Hexaeder (Würfel) — die Erde nach Kepler, das Oktaeder, — die Luft, das Ikosaeder — das Wasser, das Tetraeder — das Feuer. Das Pentagondodekaeder sollte in den Substanzen das himmlische, das ist die *Quinta Essentia* oder ihre wesentliche Eigenschaft darstellen, die mit ihrer Schöpfung ihnen beigegeben wurde. Die himmlische

<sup>1</sup> *Perspectiva Corporum Regularium*. Das ist: Eine fleysige Fürweisung, wie die Fünf Regularitn Körper, darvon Plato in Timäo, und Euclides in sein *Elementis* schreibt und durch einen sonderlichen, neuen, behenden und gerechten weg, der vor nie in gebrauch gesehen worden, gar künstlich in die *Perspectiva* gebracht, Und darzu eine schöne Anleytung, wie auss denselbigem Fünff Körpern ohne Endt, gar viele andere Körper, mancherley Art oder Gestalt gemacht und gefunden werden mögen. Allen Liebhabern der freyen Kunst zu Ehrn, durch Wenzel Jamitzer, burgern und Goldtschmid in Nürnberg mit Göttlicher hülf an tag geben. Anno MDLXVIII.

<sup>2</sup> Joannis Kepleri S. C. Maiest. Mathematici *Strena Seu de Nive Sexangula*. Cum privilegio S. Caes. Maiest. ad annos XV Francofurti ad Moenum apud Godefridum Tumbach. Anno MDCXI. Zweite Ausgabe: Jo. Kepleri *Strena seu de Nive sexangulari* (in C. Dornavii Amphiteatr. Sapient. Socrat. joco-seriae). Hanov. 1619.

<sup>3</sup> Joannis Kepleri *Harmonices Mundi*, Lincii Austriae, 1619.

Korrelation zwischen dem Pentagondodekaëder und jener *Quinta Essentia* leitete Kepler aus der Zahl der Flächen des genannten geometrischen Körpers, die den zwölf himmlischen Tierkreiszeichen entsprechen: *Dodekaëderon vero relinquitur corpori coelesti, habens eundem planorum numerum quem Zodiacus coelestis signorum*. Mit einem ähnlichen Gedankengang begründete er ebenfalls andere alchemistische Allegorien, wie z. B. das Hexaëder oder das Tetraëder: *Nam in Cubo rectitudo super basi quadrata stabilitatis quandam adumbrationem habet, quae eadem proprietates est et Materiae terrestres gravitatis momentis in medio Mundi quiescere* (Da nämlich im Hexaëder die Stellung senkrecht über der quadratischen Grundfläche gewisse Nachahmung einer Stabilität besitzt, welche gleich der Eigenschaft der Erdschubstanz ist, vermittels der Schwerkraft zum Innern gerichtet, wenn man auch als gewöhnlich annähme, daß die ganze Erdkugel im Mittelpunkt der Welt ruhe). So schrieb der entschiedene Kopernikaner, wahrscheinlich zu Gunsten der weiten Kreise der damaligen Leser seiner *Harmonices Mundi*: *...In Tetraëdri acumine ab una basi surgente, vis Ignis penetrativa et divisoria videtur adumbrata esse* (In der Ecke des Tetraëders, die über eine Grundfläche emporsteigt, scheint die durchdringende und zerteilende Kraft des Feuers aufgewiesen werden) <sup>4</sup>.

Die hier zitierten Folgerungen Keplers besitzen jene charakteristische Merkmale scherzhaft ernster sokratischer Klugheit und Ironie, auf welche I. I. Schafranovskij in seiner eingehenden Besprechung des Traktates Keplers über den Schnee aufmerksam machte <sup>5</sup>.

Die eigentliche kristallographische Abhandlung über den hexagonalen Schneeflocken beginnt Kepler mit der Übersicht solcher natürlichen Gebilde, die ebenfalls eine sechsfache Symmetrie besitzen. Er richtet seine Aufmerksamkeit auf die Zellen der Honigwabe, welche bei möglichst sparsamer Anwendung von Wachs jenen Raum ausfüllen, die den Bienen zur Verfügung steht. Der Boden einer jeden Zelle besteht aus drei Flächen, die sich so zueinanderneigen, wie jede drei Flächen im Rhombendodekaëder ringsum der Diagonalen, welche die Rolle dreizähliger Symmetrieachsen spielen. Diese drei Flächen des Bodens einer Zelle sind zugleich Grenzflächen der drei Zellen, die sich in der gegenüberliegenden unteren Schicht der Honigwabe befinden. Die säulenförmige Gestalt der Zelle entsteht, indem sechs Flächen des Rhombendodekaëders in der Richtung einer hexagonalen Achse ausgezogen sind. Kepler bemerkte richtig, daß man den Raum dicht mit den Rhombendodekaëdern ausfüllen kann, so wie es mit den Würfeln oder mit den Paralleloëdern gelingt. Dies ist aber nicht durchführbar mit regelmäßigen Tetraëdern, Oktaëdern, Pentagondodekaëdern und Ikosaëdern. Dem scharfsinnigen Beobachter, wie es Kepler war, entging jedoch, daß die Lage der Fläche des Rhombendodekaëders sich nicht untereinander ändert, wenn dieser

<sup>4</sup> Lateinische Zitate aus der *Geschichte der Mineralogie*. Franz v. Kobell, München, 1864.

<sup>5</sup> I. I. Schafranovskij, *Kristallograficzeskie predstavlenija I. Keplera i ego traktat „O Šestjugoľnom snege“*. Moskva, 1971.

Körper infolge der Ausdehnung längs einer Symmetrieachse die Tracht einer Wabenzelle annimmt. Die Bewahrung der Neigungen der Flächen im Kristall bei Änderung seiner Gestalt, *non mutatis angulis*, wie es 50 Jahre später Nikolaus Steno<sup>6</sup> geäußert hatte, bildet den Inhalt des ersten kristallographischen Gesetzes der Konstanz der Kanten- und Flächenwinkel. J. Kepler befand sich schon sehr nahe der Entdeckung dieses Gesetzes.

Um die innerliche Struktur des Kristalls zu veranschaulichen, erwog Kepler das Problem einer gleichmäßigen Einordnung von kleinen gleichgroßen Kugelchen im Raume. So kam er damit einer der heutigen Untersuchungsmethode der Kristallstruktur zuvor, die sich auf dem Prinzip dichtester Raumanordnung (*closest packing*) stützt und zum Begriff der Ionen- und Atomradien führt. Kepler überzeugte sich, daß Kugelchen von gleicher Größe sich am dichtesten nebeneinander ordnen, wenn sie entweder in den Ecken eines Würfels oder zugleich noch inmitten der Würfelflächen den Platz nehmen (einfach primitiver und flächenzentrierter Würfel) oder endlich sechs- und dreieckige Paralleloëder bilden. Als Erasmus Bartolinus<sup>7</sup> die Doppelbrechung des Lichtes im isländischen Kalkspat entdeckte, erklärte Christian Huygens<sup>8</sup> in ähnlicher Weise wie Kepler den Bau dieses Minerals, mit Hilfe jedoch der dichtest nebeneinander gepackten Ellipsoiden anstatt der Kugelchen.

Hätte Kepler zum Ausgangspunkt seiner mathematischen Überlegungen die Mittelpunkte der Kugelchen angenommen, so würde er ein geometrisches Gebilde erhalten haben, welches in der Kristallographie unter dem Begriff des Ruamgitters eine große Rolle spielt (Aug. Bravais 1850; C. Jordan und A. Schoenflies 1868, 1891).

An den Polyedern, welche Kepler aus den regelmäßigen Kugelhäufungen konstruierte, kommen vier- oder sechszählige Symmetrieachsen vor, dagegen gibt es keine fünfzähligen, die so charakteristisch für Apfelblüten z.B. sind. Aus dem Vergleich der Symmetrieelemente an den Mineralien und an lebendigen Wesen konnte Kepler seine Beobachtungen verallgemeinern, indem er behauptete, daß an den Kristallen Drehungsachsen als Elemente der Symmetrie gelten, in der lebendigen Welt dagegen die Spiegelebenen überwiegen. Die letzteren sowie auch die fünfzählige Drehungsachse seien — nach seiner Meinung — das Kennzeichen der Keimkraft der Natur, Kepler erwähnte nicht zweizählige Achsen, er ahnte jedoch, daß auf den Kristallen mehrere Elemente der Symmetrie

<sup>6</sup> Nikolaus Steno [Stenonis (sc. filius), Niels Stensen], *De solido intra solidum naturaliter contento dissertationis prodromus*, Firenze, 1669. Den Titel übersetzt man gewöhnlich: Über manches Festes (konstantes, notwendiges), enthaltenen auf natürlicher Weise in einem festen Körper. K. Mieleitner übersetzt dagegen eher dem Inhalt gemäß: „Über eine feste Substanz als Einschluß enthalten auf natürliche Weise in einem festen Körper“.

<sup>7</sup> Erasmus Bartolinus [Bartelsen], *Experimenta Crystalli Islandici disdiacastici*, Hafniae, 1670.

<sup>8</sup> Christian Huygens [Hugenius], *Traité de la lumière où sont expliquées les causes de ce qui arrive dans la réflexion et dans la réfraction. Et particulièrement dans l'étrange réfraction du cristal d'Islande*, par C.H.D.Z., Leide, 1690.

vorkommen möchten, das heißt Drehungsachsen und Spiegelebenen, vielleicht auch das Symmetriezentrum. Das Gesetz der Symmetrie formulierte Just René Haüy erst im Jahre 1815 (*Sur une loi de cristallisation appelée loi de symétrie*). Die Anzahl der Symmetrieachsen, ihre Zähligkeit, ihre gegenseitige Stellung zueinander wurde von S. Kreutz<sup>9</sup> errechnet auf Grund einer geometrischen Formel, mit welcher die dichte Bedeckung der Kugeloberfläche vermittels der gleichgroßen regelmäßigen sphärischen Vielecken gelöst werden kann.

Infolge der Überlegungen, die den Übergang des formlosen Wasserdampfes in eine geometrisch ausgebildete Schneeflocke betreffen, nahm Kepler das Vorhandensein von drei Wachstumsrichtungen in Kristallen an, als möchte er Anisotropie des Wachstums der Kristalle geahnt zu haben. Diese drei Richtungen betrachtete er aber im Sinne späterer kartesischen Bezugsachsen und bemerkte zugleich, daß im Oktaëder die Ecken ihnen zugeordnet sind, im Hexaëder dagegen die Flächen, welche senkrecht zu diesen Richtungen stehen. Unklar bleibt ihm jedoch weiterhin, warum diese drei Richtungen in den Schneeflocken in einer Ebene liegen; aller Wahrscheinlichkeit nach war die Ausbildung der flachen Form der Schneeflocken die Ursache, daß diese Richtungen, gleichmäßig einander zugeneigt, die Gestalt eines Sternes von sechs Strahlen annehmen. Der Punkt, von dem die Strahlen entspringen, spielt die Rolle des Keimlings, welches vom Anfang an durch seine Gestalt das Wachstum des Kristalls reguliert.

Der wichtigste Faktor für die flache und strahlenförmige Tracht der Schneeflocken scheint jedoch — nach der Meinung Keplers — die ungleiche Verteilung der Kälte rund um wachsendes Schneekristall zu sein. Diese Folgerungen erinnern an ein Experiment, welches von Prof. P. Niggli (1943) in Zürich durchgeführt wurde; er schloß eine Schneeflocke in einem Exsikkator, wo konstante Bedingungen von Temperatur und Druck herrschten. Nach einigen Tagen bemerkte er, daß die Schneeflocke ihre Strahlen verloren und sich in ein Klümpchen umgewandelt habe. Die Rekristallisation war die Folge von Unterschieden in der Einstellung der Dampfdruckgleichgewichte über den einzelnen geometrischen Elementen des Kristalls (Anisotropie des Verdampfens). Diesen wechselnden Druckbedingungen folgten sicherlich auch minimale Temperaturunterschiede über den Kristallflächen — im Übereinstimmung mit den Voraussetzungen von Kepler.

Außer den thermischen Bedingungen und „der schöpferischen Formungskraft der Erde“ sollten nach Kepler auch Salze, insbesondere diejenigen mit ähnlichen, vielflächigen Formen auf bestimmte Tracht des Wachsenden Kristalls Einfluß ausüben. Domenico Guglielmini<sup>10</sup> entwic-

<sup>9</sup> Stefan Kreutz, *Elemente der Theorie der Krystallstrukturen*, Leipzig, 1915.

<sup>10</sup> Domenico Guglielmini, *Riflessioni Filosofiche dedotte dalle Figure de Sali*, Bologna, MDCLXXXIIX [1688]. Ins Deutsche übersetzt im Artikel Karl Miel-eitners, „Die Anfänge der Theorie über die Struktur der Kristalle“. *Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie*, B. 8, Jena, 1923.

kelte diesen Gedanken weiter, indem er eine Mitwirkung folgender Substanzen bei der Kristallisation annahm: Kochsalz für würfelige Formen, Salpeter für sechseckigen Säulen (Mutmaßung auch bei Kepler), Alaun im Falle von Oktaëdern, Vitriole für Parallelepipede. Es ist bemerkenswert, daß Karl Linné noch im Jahre 1779 dieselbe Meinung in Acht nahm.

Die Rolle der Temperaturen und der begleitenden Substanzen wird weiterhin bis heute untersucht, indem diese Bedingungen zu den wichtigsten Faktoren bei der Bildung verschiedener Trachten der Mineralien je nach ihrem Vorkommen in der Natur gehören.

Bemerkenswert ist es festzustellen, daß gewisse Substanzen beziehungsweise Prozesse ihrer Herstellung oder Verarbeitung besonders für die Entwicklung der kristallographischen Begriffe und Gesetze beigetragen haben. So war für Kepler Schnee als Untersuchungsobjekt, für Guglielmini der Alaun aus Tolfa in der Nähe von Cività Vecchia bzw. Eisen- und Kupfervitriol aus den dortigen Erzgruben; für N. Steno waren es Quarzkristalle, die durch „Strahler“ in den Alpen gefunden und in den Werkstätten Mailands und Florenz bearbeitet wurden; für Lomonosow der Salpeter, dessen Reinigung durch Kristallisation er wissenschaftlich bearbeitete.

Die Beobachtungen der kristallographischen Erscheinungen und die Feststellung mancher Gesetze erfolgten im Verlaufe des XVII. Jahrhunderts bevor die neue Wissenschaft ihren Namen erwarb (A. M. A. Cappeller<sup>11</sup>). Die Erkenntnisse aus diesem Zeitabschnitt gerieten größtenteils in Vergessenheit um später vom neuen wieder entdeckt zu werden, wie dies im Falle Keplers oder Stenos gewesen war. Stenos Gesetz der Winkelkonstanz wurde unabhängig von Lomonosow ausgesprochen und die Erwägungen Keplers über den innerlichen Bau der Kristalle fanden im Fedorow den genialen Begründer der Lehre „Über Figuren“.

Mit Keplers Abhandlung begann eine unzählige Literatur über Schnee und Eis. Auch in Polen wurde eine monographische Zusammenstellung der wissenschaftlichen Kenntnisse über diese Substanz von A. B. Dobrowolski<sup>12</sup> entworfen. In diesem Werke hat er auch seine eigenen Bearbeitungen veröffentlicht auf Grund der Beobachtungen, die er in Begleitung von Prof. H. Arctowski als Teilnehmer der antarktischen Expedition „Belgica“ in Jahren 1897–1898 gemacht hatte. In Anerkennung seiner Verdienste wurde die Bunker „Oase“, wo jetzt die polnische Station für Polarforschungen sich befindet, mit seinem Namen geehrt.

<sup>11</sup> A. M. A. Cappeller, *Prodromus Crystallographiae sive de Crystallis improprie sic dictis, commentarium*, Lucerna, 1723.

<sup>12</sup> Antoni Bolesław Dobrowolski, *Historia naturalna lodu* (Naturgeschichte des Eises). Im Verlage des Instituts für Unterstützung der Wissenschaftler „Kasa im. J. Mianowskiego“, Warschau, 1923, S. 900, 350 Figuren im Text; Literaturzusammenstellung.