Boi, Luciano

Die neuen geometrischen Auffassungen von Riemann bis Poincaré

Organon 25, 13-38

1995

*Luciano Boi** (France)

DIE NEUEN GEOMETRISCHEN AUFFASSUNGEN VON RIEMANN BIS POINCARÉ

1. Einleitung

Diese Arbeit beinhaltet zwei verschiedene Teile, die miteinander in Beziehungen stehen: Ich habe die Absicht, einige Betrachtungen über die geometrischen Methoden und ihre Anwendungen bei Riemann und Poincaré vorzustellen wie auch eine kurze philosphische Analyse darüber darzulegen.

Bernhard Riemann[1] (1826–1866) und Henri Poincaré[2] (1854–1912) waren zwei große Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Sie haben die allgemeine Struktur der Mathematik umgewälzt und vollständig neue Gebiete für die Mathematik erschlossen. Die Bedeutung ihrer Arbeiten liegt nicht so sehr in der genaueren Abgrenzung und besseren Begründung schon bestehender mathematischer Betrachtungen, sondern in der Begründung einer neuen Theorie, die eine überragende philosopische und wissenschaftliche Bedeutung in der Mathematik erlangte.

Riemann und Poincaré waren nicht Praktiker, sondern in erster Linie Entdecker. Ihre Werke stellen einen Hauptbeitrag für verschiedene Gebiete der Wissenschaft dar: der Analysis, der Geometrie, der Topologie, der Physik, der Mechanik, der Astronomie und schließlich der Erkenntnistheorie. Man kann sagen, daß keines dieser Gebiete so geblieben ist, wie es voher gewesen war, nachdem Riemann und Poincaré ihre Arbeit aufgenommen

* Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales, École des Hautes Études en Sciences Sociales, 54, boulevard Raspail, 75270 Paris Cedex 06.

hatten. Nicht nur das; Riemann und Poincaré sind die Begründer der modernen Topologie, die man vor ihnen als "Analysis Situs" bezeichnet hatte. Riemann war der Entdecker des Teils der Geometrie, der sich mit der Mannigfaltigkeit der n-Dimension beschäftigte, und Poincaré war der Entdecker der "Fuchs'schen Funktionen" sowie der Hauptteile der Gruppentheorie.

Die erste grundlegende Abhandlung von Riemann ist aus dem Jahre 1851, "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse", vorgestellt in Göttingen als eine *Inauguraldissertation*. Was diese Abhandlung betrifft, darüber schrieb der Mathematiker Charles Hermite in der französischen Ausgabe der Werke von Riemann:

"Les principes de Riemann sont d'une originalité saisissante; ils donnent, comme instrument à l'Analyse, ces surfaces, auxquelles est attaché le nom de l'inventeur, qui sont à la fois une représentation et une force nouvelles; ils mettent en pleine lumière, par les notions profondes de classes et de genres, la nature intime, restée jusqu'alors inconnue, des fonctions algébriques..."[3]

Man kann sagen, daß in dem Fall der Entdeckung der oben angesprochenen Theorie die "geometrische Anschauung" und die "geometrische Erschaffung" eine entscheidende Rolle gespielt haben. Die Auffassung, die Riemann und Poincaré von der Mathematik hatten, was philosophisch begründet und reich an philosophischen Implikationen: Sie war nicht beschränkt auf eine deduktive und analytische Mathematikbetrachtung (wie die Logizisten gedacht hatten) und sah andererseits die Mathematik nicht mehr als einen Teil der Physik an, also wie eine Naturwissenschaft. Für Riemann und noch eindeutiger für Poincaré war die Mathematik eine abstrakte und exakte Wissenschaft, und wir werden im folgenden durch die Analyse ihrer geometrischen Auffasungen sehen, daß die Grundsätze der mathematischen Objekte vollständig verschieden sind von denen der Naturwissenschaft.

2. Erläuterungen zu Riemann

Mehrere Autoren haben besonders den empirischen Charakter der Riemann'schen Auffassung herausgehoben. So Richard Courant in einem Artikel von 1926, "Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten Hundert Jahre". Er schrieb:

"Riemanns Funktionstheorie ist ihren inneren Motiven nach, wie wir sahen, auf engste mit den Vorstellungen der mathematischen Physiker verknüpft; aber auch in ganz anderen Gebieten und noch direkter hat Riemanns vielseitiger Geist die mathematische Physik mächtig vorwärts getrieben. Es liegt natürlich heute nahe, dabei zunächst an die jetzt als "Riemann'sche Geometrie" bezeichnete Disziplin und ihre Zusammenhänge mit der Relativitätstheorie zu denken. In seinem Habilitationsvortrag "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" hat Riemann diese großartigen

Gedanken entwickelt, denen erst nach Jahrzehnten volle Wirksamkeit beschieden war. Schon das Wort "Hypothese" im Titel verrät den physikalischen Untergrund der Ideenbildungen. Die Geometrie erscheint nicht im Kantischen Sinne als Lehre von der reinen Anschauung, sondern als Wissenschaft, deren Zusammenhang mit der Erfahrung für ihren Aufbau entscheidend sein soll. Es ist hier nicht der Ort, diese Riemann'sche Auffassung vom philosophischen Standpunkt zu diskutieren."[4]

Als noch viel bedeutungsvoller stellte sich die Interpretation der Riemann'schen Auffassung von dem Mathematiker Felix Klein heraus. – Es ist in diesem Zusammenhang vielleicht notwendig zu bemerken, daß Klein lange Studien- und Lehrtätigkeitsaufenthalte nach dem Tode von Riemann in Göttingen verbrachte, und daß ein Teil seiner mathematischen Arbeiten ausdrücklich auf die Fortführung dessen Werkes ausgerichtet war. Klein fühlte sich daher nicht nur in der wissenschaftlichen Interessensgemeinschaft mit dem Autor, sondern auch in Übereinstimmung mit einigen seiner wichtigsten philosophischen Gesichtspunkte. – In einer Gedenkrede an Riemann "Riemann et son influence sur les mathématiques modernes", gehalten am 27. September 1894 in Wien, drückte sich Klein folgendermaßen aus:

"Elevé dans la grande tradition dont les noms réunis de Gauss et Wilhelm Weber sont le symbole, influencé d'autre part, par la philosophie de Herbart, il a toujours, et à maintes reprises, travaillé *à la recherche d'une forme mathématique sous laquelle pourraient être exprimées, d'une manière unique, les lois auxquelles tous les phénomènes naturels sont soumis.* Ces recherches, paraît-il, ne sont jamais arrivées à terme déterminé et l'on ne trouve sur ces sujets que de courts fragments dans l'oeuvre posthume de Riemann. Il y est question de quelques principes qui n'ont en commun que cette idée aujourd'hui bien généralement adoptée, du moins par la nouvelle école de physiciens qui suit la trace de Maxwell dans sa théorie électromagnétique de la lumère. C'est l'hypothèse d'après laquelle l'espace est rempli d'un fluide répandu d'une manière continue et qui est, en même temps, le véhicule des manifestations de la lumière, de l'électricité et de la gravité. Je ne m'arrêterai pas sur ces points qui n'ont aujourd'hui qu'un intérêt historique. Mais je veux faire observer, en y insistant, *que c'est dans cet ordre d'idée qu'il faut chercher la source des développements mathématiques purs dus à Riemann...*"

Und an weiterer Stelle, wo die geometrische Anwendungstheorie von Riemann in seiner Theorie der Flächen zur Sprache kommt, schreibt Klein noch:

"... Aussi, n'en ajouterai-je que plus volontiers ceci: ces méthodes, que Riemann a tirées de l'intuition physique pour les appliquer aux Mathématiques pures, sont devenues vice versa de la plus haute importance pour l'étude de la Physique mathématique."[5]

Die Urteile von Courant und Klein, auch wenn sie nur einen Hauptaspekt der Werke von Riemann herausstellen, belegen in der Tat, daß eine der

Aufgaben der mathematischen Theorie diejenige ist, ein vertiefendes Wissen der physikalischen Natur der Dinge zu ermöglichen, wobei klar ist, daß man in diesem Wissen nich voranschreiten kann, wenn die mathematische Theorie nicht zunächst eine exakte Wissenschaft wäre. Auch wenn die Probleme der Physik die mathematische Arbeit beeinflussen können, bedeutet es nicht, daß der eigentliche Inhalt der Mathematik das Ergebnis einer Verallgemeinerung solcher Probleme ist.

In der Realität hat der Begriff "Hypothese" (Rieman verwendet "Voraussetzung") eine viel tiefergehende Bedeutung, als einen nur für die Naturwissenschaften benutzbaren Begriff. Es ist bekannt, daß Riemann den Begriff "Hypothese" in einen bestimmten Zusammenhang eingeführt hat, nämlich in seiner berühmten Habilitationsarbeit über die Grundlagen der Geometrie. Es ist notwendig darüber hinaus festzustellen, daß das Verständnis von dieser Art Begriff nur aus dem Verständnis des gesamten mathematischen Konzepts von Riemann resultieren kann.

Am Anfang seiner Habilitationsarbeit merkte Riemann an, daß die einfachen Grundbegriffe der Geometrie und ihre Beziehungen untereinander nicht geklärt seien, also man nicht verstehen könne, welches ihre Natur sei und ihre Verbindungen seien. Was war der Grund dafür?

"Es hatte dies seinen Grund wohl darin, daß der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Größen, unter welchem die Raumgrößen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe aus allgemeinen Größenbegriffen zu konstruieren. Es wird daraus hervorgehen, daß eine mehrfach ausgedenhnte Größe verschiedener Maßverhältnisse fähig ist, und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Größe bildet. Hiervon aber ist eine notwendige Folge, daß die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen, sondern, daß diejenigen denkbaren dreifach ausgedehnten Größen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Tatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Maßverhältnisse des Raumes bestimmen lassen – eine Aufgabe, die der Natur der Sache nach nicht völlig bestimmt ist; denn es lassen sich mehrere Systeme einfacher Tatsachen angeben, welche zur Bestimmung der Maßverhältnisse des Raumes hinreichen; am wichtigsten ist für den gegenwärtigen Zweck das von Euklid zu Grunde gelegte. Diese Tatsachen sind wie alle Tatsachen nicht notwendig, sondern nur von empirischer Gewißheit, sie sind Hypothesen."[6]

Diese Ausführungen stellen schon einige wesentliche Punkte der Auffassung von Riemann vor. Zuerst präsentiert Riemann einen neuen methodologischen Gesichtspunkt, der aber den mathematischen Entdeckungsprozeß betrifft. Wir müssen mit einem abstrakten Begriff beginnen, – in diesem Fall handelt es sich um allgemeine Begriffe mehrfach ausgedehnter Größen, oder, um eine modernere Ausdrucksweise zu gebrauchen, um die Mannigfaltigkeit der *n*-fachen Dimension – um die besonderen Fälle bestimmen zu können, in unserem Beispiel eine Raumgröße. Die allgemeinen Begriffe mehrfach ausgedehnter Größen sind fähig, die unterschiedlichen Maßverhältnisse zu bestimmen, wobei der Raum nur einen besonderen Fall einer dreifach augedehnten Größe bildet. Das Konzept des Raumes in dieser neuen Art und Weise beinhaltet eine bedeutende Verallgemeinerung bezogen auf die Auffassungen der Vergangenheit. Der Raum ist nicht mehr der Ort, wo es möglich ist, die Figuren so zu konstruieren wie sie in der euklidischen Geometrie erscheinen, denn in den Auffassungen von Riemann (beeinflußt von Gauß) gibt es eine innere Geometrie des Raumes, die auch in der Fläche abbildbar ist. Diese innere Geometrie ist durch eine sogenannte differenzielle Methode definiert.

Ich will jetz kurz erklären, was diese innere Geometrie bedeutet[7].

3. Die differenzielle Methode von Riemann

Riemann ließ sich direkt von den schon von Gauß erzielten Ergebnissen inspirieren, unter anderem auch von der differenziellen Geometrie über die Flächen. Diese Ergebnisse wurden in dem berühmten Werk "Disquisitiones generales circa superficies curvas" von 1827 veröffentlicht. Mit diesem Werk stellte Gauß eine völlig neue Richtung der differenziellen Geometrie vor, die darin bestand, daß er den Eigenschaften einer Fläche den Vorrang gab. Gewisse Verfahren der geodätischen Dreiecksmessungen haben Gauß dazu veranlaßt, auf eine beliebige Fläche zwei beliebige Gruppen von Kurvenkoordinaten einzuführen, um die verschiedenen Punkte zu finden. Desweiteren haben sie ihn dazu geführt, die differenzielle Geometrie der Fläche unter Berücksichtigung zweier Parameter "u" und "v" zu begründen, welche ihrerseits die Kurven der zwei Gruppen definieren. Diese Parameter werden wie Koordinaten angesehen, bezogen auf den Punkt der Fläche oder als Teilstück der Fläche betrachtet, wo sich die korrespondierenden Kurven teilen. Die erste dieser zwei Figuren stellt das Quadrat der Entfernung "ds" der zwei unendlich benachbarten Punkte "M" (u, v) und "M'" (u + du, v + dv) der Fläche "$ds = Edu^2 + 2\,Fdudv = Gdv^2$) dar (E, F, G gehören zu den Funktionen von "u" und "v"). Von diesem Ausdruck hängen alle Probleme ab, die die Maßverhältnisse der Längen, der Flächen und der Winkel betreffen, die für die Fläche angenommen werden können, wenn man sie schon wie einen völlig flexiblen, nicht dehnbaren Schleier ansieht, wobei man nur jene Eigenschaften in Erwägung zieht, die unabhängig von besonderen Formen sind, die für die Flexion genommen werden können (sogenannte unveränderbare Eigenschaften infolge der Verformung).

Der fundamentale Lehrsatz, auch "Theorema egregium" genannt, aufgestellt von Gauß in seinem Werk, sagt aus, daß die *totale Krümmung* eine Unveränderliche der Verformung einer Fläche "S" ist. Anders ausgedrückt: *die totale Krümmung einer Oberfläche ändert sich nicht in einem Punkt für eine beliebige Flexion der selben Fläche.* Diesen Lehrsatz kann man auch folgendermaßen ausdrücken: Wenn zwei Oberflächen abwickelbar sind, haben sie notwendigerweise gleiche Krümmungen in übereinstimmenden Punkten. D. h.: Die geodätische Krümmung einer Linie, die über eine Fläche gezeichnet ist, behält in jedem Punkt der Fläche den gleichen Wert, wenn die Fläche sich durch Flexion verbiegt. Während also die Fläche sich im allgemeinen ändert, wenn sie sich beugt, und deshalb die zwei Krümmungen der Kurve sich ändern, verbleibt die geodätische Krümmung unverändert.

In seiner Abhandlung aus dem Jahre 1854 legte Riemann die Grundlagen für eine Verallgemeinerung des Raumbegriffs, der sich durch eine beliebige Anzahl von Dimensionen (*n*) definiert, abgeleitet von einer willkürlich quadratischen differenzielle Form:

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{1,\dots,n} a_{ij}\, dx^i dx^j$$

Die Formel bestimmt die Distanz zweier beliebiger unendlich benachbarter Punkte (x_i) und ($x_i + dx_i$) und begründet so (wie es Gauß für die Fläche eines gewöhnlichen euklidischen Raumes getan hatte) die ganze differenzielle Geometrie des Raumes in Hinblick auf diese differenzielle Form.

Aber folgen wir weiter dem Riemann'schen Gedankengang. Gehet man von einer elementaren Mannigfaltigkeit von 3 oder mehr Dimensionen aus, in der ein Koordinatensystem x_1, x_2 $x_3,\dots,x_n$ als gegeben vorausgesetz wird, so kann man eine Maßbestimmung in der Mannigfaltigkeit aufstellen und dann auf ihr eine differenziale Maßgeometrie definieren, indem man als Ausdruck für die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte nimmt:

$$ds = \sqrt{\sum a_{ik} dx_i dx_k},$$

wo $\sum a_{ik} dx_i dx_k$ eine wesentlich positive quadratische Form bezeichnet.

Dieses Prinzip (das später auch von H. v. Helmholtz der verallgemeinerte Pythagoräische Satz genannt wurde) bietet sich als das Einfachste dar, wenn man die Maßbegriffe in einer $n = (x_1, x_2, x_3,\dots,x_n)$ durch Difinition der Länge einer Linie $x_i = x_i(t)$ festsetzen will, die in einem von Null verschiedenen Intervall durch stetige und derivierbare Funktionen in der Weise dargestellt wird, daß sie

a) einen wesentlich positiven Wert hat,

b) stetig und derivierbar von den Endpunkten und von der Gestalt der Linie abhängt,

c) die additive Eigenschaft besitzt.

Auf Grund dieser Bedingungen erhält man die Funktion, die die Länge einer Linie darstellt, durch Integration des Linienelementes *ds*, und der Ausdruck von *ds* hängt nur von den Koordinaten x_i, $x_i + dx_i$ zweier unendlich benachbarter Punkte ab.

Der Ausdruck für *ds* darf jedenfalls keine lineare Funktion der x_i, dx_i sein, weil er dann infolge der Stetigkeit negative Werte annehmen müßte, wenn man eine Linie um einen Punkt stetig so weit variieren läßt, bis sie wieder mit sich selbst zusammenfällt, und damit ihren Sinn umkehrt. Dagegen ist ds^2, ds^4 und überhaupt jede von ds^2 eindeutig abhängende Funktion als Grundlage für die Bildung eines Ausdrucks für das Linienelement zulässig. Wenn man nun voraussetzt, daß ds^2 so weit derivierbar sein soll, als für die Entwicklung der Maclaurin'schen Reihe bis zum dritten Gliede nötig ist, und unendlich klein von der zweiten Ordnung in den Differentialen dx_i, so erhält man gerade

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Macht man dagegen irgend welche anderen Annahmen hinsichtlich der Derivierbarkeit von ds^2 im Anfangspunkt, so kann man auf andre und höhere Art eine Maßbestimmung in unserer Mannigfaltigkeit festsetzen, indem man z. B. als Ausdruck für ds^4 eine wesentlich positive Form vierten Grades in den dx_i annimmt, die sich nicht auf ein vollkommenes Quadrat reduziert. Die Möglichkeit solcher Fälle ist bereits von Riemann hervorgehoben worden, der dann aber seine Betrachtungen auf den einfachsten und wichtigsten Fall eingeschränkt hat, in dem der verallgemeinerte Pythagoräische Satz gelten soll.

Wie bei den Flächen, so kann man auch bei den Mannigfaltigkeiten von *n* Dimensionen, in denen eine Maßbestimmung durch den Ausdruck für ds^2 definiert ist, die geodätischen Linien oder Linien kürzester Länge betrachten, von denen jeden in geeignet begrenzten Gebieten durch zwei Punkte völlig bestimmt ist.

In diesem Sinne zeigt der Raumbegriff eine seiner Eigenschaften und ist nich mehr ein leerer Sammelpunkt, nicht mehr ohne Inhalt. Die Einführung der Maßverhältnisse diente dazu, analytisch und mathematisch den Raumbegriff zu bestimmen, ansonsten wäre der Raum eine amorphe Entität. Nun, der Raum ist nur ein besonderer Fall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Trotzdem reicht die Metrik allein nicht aus, um vollständig den Raum zu kennzeichnen, insofern er auseinanderlaufende Eigenschaften besitzt, bezogen auf irgend eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Um nur diese Eigenschaften kennenzulernen, ist es notwendig, auf eine physikalische Untersuchung zurückzugreifen.

Wir haben deshalb zu diesem Problem folgenden Aspekt: Er besteht in der Bestimmung der Maßverhältnisse des Raumes, insofern er eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist, d. h., man muß die einfachsten Prinzipien suchen, durch die sich die Maßverhältnisse des Raumes bestimmen können, und diese Prinzipien werden mathematisch bestimmt. Sie sind insofern notwendig, da wir mit ihrer Hilfe alle weiteren Sätze und Folgen ableiten können. Aber sie sind nicht absolut notwendig, weil wir verschiedene Maßverhältnisse aufstellen können. In diesem Sinne sind sie nur logisch notwendig. Sie haben eine empirische Gewißheit, nicht, weil sie der Erfahrung entspringen, sondern, weil, wie Riemann sagte, der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei. Dieses

"ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Außenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes konstruiert werden und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine größere empirische Gewißheit, als irgend eine äußere Erfahrung."

Die Annahme, daß der Raum eine unbegrenzte dreifache Mannigfaltigkeit sei, ist eine Annahme, die durch die Erfahrungen möglich gemacht wird; sie ist eine abstrakte Annahme, eine Art vorausgehende Bedingung, um die Geometrie darzustellen. Aber sie ist nicht in jedem Fall eine wissenschaftliche Annahme. Aus der Annahme, daß der Raum unbegrenzt sei, kann nicht geschlußfolgert werden, daß der Raum unendlich ist, wie intuitiv gedacht werden könnte. Im Gegenteil: Vielmehr würde der Raum, wenn man die Unabhängigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also ein konstantes Krümmungsmaß zuschreibt, notwendig endlich sein, so bald dies Krümmungsmaß einen noch so kleinen positiven Wert hätte. Man würde, wenn man die in einem Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, eine unbegrenzte Fläche mit konstantem positivem Krümmungsmaß, also eine Fläche erhalten, welche in einer ebenen, dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die Gestalt einer Kugelhälfte annehmen würde und welche folglich endlich ist.

4. Der Grundsatz der Riemann'schen Hypothese

Wir können mindestens drei verschiedene Eigenschaften herausstellen, die die Annahmen von Riemann untersuchen: Die ersten, verbunden mit seiner sehr abstrakten Theorie wie die Oberflächentheorie und die "Analysis Situs", sind von theoretischer Natur. Sie sind verbunden mit den grundlegenden intellektuellen Anschauungen, mit gewissen Voraussetzungen der Begriffe (wie das Maßverhältnis) und mit der Entwicklung der topologischen Lehrsätze. Wie z. B. solche Annahmen, die wir, da sie notwendig sind, heraussuchen, um die Maßverhältnisse zu bestimmen. Sie erfordern die Unabhängigkeit der Größen von den Orten, und diese Unabhängigkeit kann man auf verschiedene Weisen realisieren. Z. B. auf der Grundlage, daß das Maßverhältnis eine mögliche Wahl darstellt, um analytisch die Amorphität des Raumes zum Ausdruck zu bringen.

Im folgenden wollen wir nun einfache und allgemeine Prinzipien der differenzierten Maßverhältnisse von Riemann vortragen, angewandt auf den Raum. Die erste Hypothese, die er betrachtet und entwickelt, ist diejenige, gemäß der die Länge der Linien unabhängig von ihrer Position ist. Damit ist jede Linie durch alle anderen meßbar.

Die Maßbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Größen vom Ort, die in mehr als eine Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme ist wohl die, daß die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede meßbar sei. Wird die Ortsbestimmung auf Größenbestimmungen zurückgeführt, also die Länge eines Punktes in der gegebenen n-fachen ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch n veränderliche Größen $x_1, x_2, x_3,...,x_n$ ausgedrückt, so wird die Bestimmung einer Linie darauf hinauslaufen, daß die Größen "x" als Funktion einer Veränderlichen gegeben werden. Die Aufgabe ist dann, für die Länge der Linien einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, zu welchem Zwecke die Größen "x" als in Einheiten ausdrückbar betrachtet werden müssen.

Riemann behandelte diese Aufgabe nur unter gewissen Einschränkung und arbeitete zu solchen Linien, in welchen die Verhältnisse zwischen den Größen "dx" – den zusammengehöringen Änderungen der Größen "x" – sich stetig ändern. Man kann sich dann die Linien in Elemente zerlegt denken, innerhalb deren die Verhältnisse der Größen "dx" als konstant betrachtet werden dürfen. Die Aufgabe ist folglich, daß für jeden Punkt ein allgemeiner Ausdruck des von diesem ausgedehnten Linienelements "ds" aufgestellt werden muß. Jeder Punkt wird also die Größe "x" und die Größe "dx" enthalten.

Riemann nahm zweitens an, daß die Länge des Linienelements, von Größen zweiter Ordnung abgesehen, unverändert bleibt, wenn dessen sämtliche Punkte dieselbe unendliche kleine Ortsänderung erleiden, worin zugleich enthalten ist, daß, wenn sämtliche Größen "dx" in demselben Verhältnis wachsen, das Linienelement sich ebenfalls in diesem Verhältnis ändert.

Unter dieser Annahme wird das Linienelement eine beliebige homogene Funktion ersten Grades der Größen "dx" sein können, welche unverändert bleibt, wenn sämtliche Größen "dx" ihr Zeichen ändern, und worin die willkürlichen Konstanten stetige Funktionen der Größen "x" sind. Um die einfachsten Fälle dafür zu finden, suchte Riemann zunächst einen Ausdruck für die $(n\text{-}1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, welche vom Anfangspunkt des Linienelements überall gleich weit abstehen, d. h. er suchte eine stetige Funktion des Orts, welche sie von einander unterscheidet. Diese wird vom

Anfangspunkt aus nach allen Seiten entweder ab- oder zunehmen müssen; man muß annehmen, daß sie nach allen Seiten zunimmt und also in dem Punkt ein Minimum hat. Es muß dann, wenn ihre ersten und zweiten Differentialquotienten endlich sind, das Differential erster Ordnung verschwinden und das der zweiten Ordnung darf nie negativ werden. Man nimmt an, daß es immer positiv bleibt. Dieser Differentialausdruck zweiter Ordnung bleibt dann konstant, wenn ds konstant bleibt, und wächst im quadratischen Verhältnis, wenn die Größe "dx" und also auch "ds" sich sämtlich in demselben Verhältnis ändern; er ist also = const. ds^2 und folglich ist "ds" – der Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Funktion zweiten Grades der Größen "dx", in welcher die Koeffizienten stetige Funktionen der Größen "x" sind. Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Koordinaten ausdrückt, $ds = \sqrt{\sum (dx)^2}$; der Raum ist also unter diesem einfachsten Fall enthalten.

Ein Beispiel für die zweite Hypothese, die Riemann in seiner Habilitationsarbeit machte, behandelt die Unterschiede zwischen "Unbegrenztheit" und "Unendlichkeit". Es handelt sich dabei um folgendes: Wenn man die Bestimmungen des Raumes auf das "Unmeßbargroße" bezieht, ist es notwendig, eine Unterscheidung zwischen der Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu machen, wobei die erstere zu dem Ausdehnungsverhältnis und die zweite zu dem Maßverhältnis gehört. Daß der Raum eine unbegrenzte dreidimensionale Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, die bei jeden Auffassung der Außenwelt angewandt wird. Nach ihr wird in jedem Augenblick das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes konstruiert, wobei sie sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine größere empirische Gewißheit, als irgend eine äußere Erfahrung. Man könnte sagen, daß die oben genannte Hypothese die grundlegende Eigenschaft hat, zugleich eine theoretische Annahme zu sein, die uns nützt, über die Naturerscheinungen und die physikalischen Erscheinungen nachzudenken, d. h. wie ein geometrisches Substrakt, welches die wesentlichen Eigenschaften der Festkörper gestaltet. Anders ausgedrückt, solche Annahmen, auch wenn sie nicht in die Erfahrungen eingehen, werden trotzdem auf sie angewandt und ermöglichen so eine rationale Erkenntnis. – Wir werden auf solche Probleme in Kürze zu sprechen kommen. – Jedoch können wir solche Art von Annahmen nicht brauchen, um davon Behauptungen mit mathematischen Inhalt abzuleiten. Aus der Tatsache, daß in unserem Fall der Raum eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit ist, folgt in keiner Weise, daß er auch unendlich ist, wie bis dahin der größte Teil der Mathematiker und Philosophen geglaubt hatte. Im Gegenteil: Wenn man vermutet, wie Riemann erklärte, daß die Körper unabhängig vom Ort seien, und man dem Raum ein konstantes Krümmungsmaß zuschreibe, dann würde er notwendig endlich werden, sobald dieses Krümmungsmaß einen noch so kleinen positiven Wert hätte. Man würde, wenn man die in einem Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, eine unbegrenzte Fläche mit konstantem positiven Krümmungsmaß, also eine Fläche erhalten, welche in einer ebenen, dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die Gestalt einer Kugelfläche annehmen würde und welche folglich endlich ist.

Schließlich gibt es noch eine dritte Art von Hypothesen, die die Form von wissenschaftlichen Vermutungen annehmen können, wenn man vermutet, daß die Bedingungen, ins Verhältnis zu den ausgedehnten Mannigfaltigkeiten und zu den Maßverhältnissen ins Unmeßbargroße gesetzt, nicht notwendigerweise weiter gültig seien. Die Hauptbedingung war, daß die Körper unabhängig vom Ort bestanden und daß deshalb das Krümmungsmaß überall konstant war. Aber, wenn diese Unabhängigkeit zwischen den Körpern und den Orten nicht besteht, dann können wir nicht die bekannten Maßverhältnisse des Makrokosmos übertragen. Also, es kann dann in jedem Punkt das Krümmungsmaß in drei Richtungen einen willkürlichen Wert annehmen, vorausgesetzt, daß die totale Krümmung in jedem meßbaren Teilschnitt des Raumes nicht merklich von Null verschieden ist. Es ist außerdem möglich, daß noch kompliziertere Maßverhältnisse eintreten können, wenn man nicht weiter voraussetzt, daß das Linienelement durch die Quadratwurzel eines Differentialausdrucks zweiten Grades darstellbar sei.

Nach dem, was wir jetzt besprochen haben, verlieren die empirischen Begriffe, auf welche die Verhältnisbestimmungen der ausgedehnten Mannigfaltigkeit begründet sind, d. h. der Begriff des Festkörpers und des Lichtstrahls, ihre Gültigkeit im Unendlichkleinen. Gemäß Riemann ist es legitim vorauszusetzen, daß die Maßverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen nicht mehr den Hypothesen der Geometrie entsprechen, die man auf unseren gewöhnlichen Raum anwendet. Dazu schrieb Riemann:

"Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Maßverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raum gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Maßverhältnisse schon in dem Begriff dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raum zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden." (Riemann, S. 285–286)

5. Schlußbemerkungen zu Riemann

Wir wollen im folgenden die wesentlichen Punkte von Riemanns Auffassungen zusammenstellen. Denen zufolge können wir über den Raum sagen, daß er, wenn wir nicht die Erfahrungen miteinbeziehen, eine der möglichen unterschiedlichen Gattungen der Mannigfaltigkeit ist. Er kann aber auch eine diskrete Mannigfaltigkeit sein. Riemann jedoch betrachtete grundlegend nur eine kleine Reihe der Möglichkeiten, d. h. die ausgedehnten Mannigfaltigkeiten einer endlichen Zahl der Dimension, welche genau die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten einer endlichen Dimension sind. Riemann unterschied zwischen zwei Arten von Eigenschaften der Mannigfaltigkeit: den Ausdehnungsverhältnissen und den Maßverhältnissen. Über die Maßverhältnisse haben wir schon gesprochen. Die Ausdehnungsverhältnisse werden wie die Verhältnisse betrachtet, die durch die differenzierbare Struktur der Mannigfaltigkeit bestimmt werden. Sie beziehen die Topologie der Mannigfaltigkeit und die sogenannten topologischen Eigenschaften (z. B. die Eigenschaften, die durch einen Homöomorphismus unverändert bleiben[8]) mit ein, aber das ist nicht alles, was sie miteinbeziehen.

Riemann hob einen wichtigen Unterschied zwischen den zwei Arten der Eigenschaften hervor: Die Mannigfaltigkeiten der Ausdehnungsverhältnisse sind diskrete, während die Mannigfaltigkeiten der Maßverhältnisse stetige sind. Daraus folgt, daß die empirischen Aussagen die erste Art der Eigenschaften betreffen, obwohl sie hypothetisch sind und sich als exakte erweisen. So müssen wir gewöhnlicherweise annehmen, daß der Raum drei Dimensionen hat, und falls es sich als falsch offenbaren sollte, dann könnte der Raum vier, fünf, oder eine gänzlich andere Zahl der Dimension haben. Im Gegenteil: Empirisch verifizierbare Hypothesen, die die Maßverhältnisse des Raumes betreffen, sind notwendigerweise ungenau, obwohl sie eine annährende Gewißheit haben. Daraus ergibt sich, daß die Aussage, der Raum sei euklidisch und seine Krümmung gleich Null, nicht wie eine wissenschaftliche Annahme akzeptierbar ist. Wir können maximal voraussetzen, daß die Krümmung des Raumes in dem Abstand $(-\varepsilon, \varepsilon)$ besteht, wobei gilt, daß für beliebige reelle Zahlen $\varepsilon > 0$ ist. Diese Schlußfolgerung, von Riemann nicht dargelegt, aber deutlich in seinen Betrachtungen enthalten, hat eine bedeutende Wichtigkeit: Die Geometrie von einer Mannigfaltigkeit ist nicht-euklidisch – sowohl sphärisch als auch hyperbolisch – wenn seine konstante Krümmung auch nur ein wenig von Null abweicht. In dem Fall, daß die Annahme die Krümmung des Raumes betreffen, können sie nur ihm die Abstände zuschreiben und nicht die festen Werte, auch wenn die Vermutung, daß die Krümmung des Raumes konstant sei, unnötig zu sein scheint. Falls es keine empirischen Mittel gibt, um jene Werte zu bezeichnen, die die Krümmung des Raum tatsächlich, bestehend innerhalb eines gegebenen Abstandes, annimmt, dann können sie ebenso gut schrittweise von Ort zu Ort oder von Zeit zu Zeit variiert werden.

Am Ende seiner Habilitationsarbeit stellte Riemann eine kühne Annahme auf, die besagt, daß die Krümmung des Raumes innerhalb eines sehr kleinen Abstandes sehr weit variiert werden kann, vorausgesetzt, daß die totale Krümmung über die Abstände der angemessenen Größen sich Null annähert. Die berühmte Hypothese über die "space-theory of matter", die von Clifford im Jahr 1870 aufgestellt wurde, ist nur eine Wiederbelebung der kühnen Annahme von Riemann[9].

Riemann warf eine grundlegende Frage auf, die folgende Aspekte behandelt: Entsprechen an der Grenze der Beobachtbarkeit die physikalischen Eigenschaften der Erscheinungen tatsächlich dem geometrischen Raum, der von uns noch bestimmt werden muß, oder sind nicht eher das Maßverhältnis innerlich verbunden mit den physikalischen Phänomenen, vorausgesetzt, daß die Körper nicht mehr unabhängig vom Ort bestehen? Trifft letzteres zu, dann, so Riemann, verschmelzen das Maßverhältnis und die physikalischen Phänomene miteinander.

6. Der Standpunkt von Poincaré

Poincarés Standpunkt unterscheidet sich von dem von Riemann. Obwohl Poincaré in seinen verschiedenen Abhandlungen, z. B. in seiner berühmten über die drei Körper in der Astronomie, die Geometrie benutzte, um die speziellen physikalischen Probleme zu lösen, bevorzugte er, die allgemeinen Beziehungen zwischen der Geometrie und der Erfahrung zu betrachten. Poincaré war von der Tatsache überzeugt, daß keine physikalische Realität unabhängig von den geometrischen Übereinstimmungen besteht, die wir anwenden, um sie zu verstehen. Darüber hinaus machen nur jene Übereinstimmungen einen Sinn, über die physikalischen Phänomene zu reden, die sich in unserem Raum abspielen. Die Geometrie verbleibt also vollständig unbestimmt in Bezug auf die Erfahrung, und zwar aus dem Grunde, weil sie ein Teil der exakten mathematischen Wissenschaft ist.

In Anbetracht der Beziehungen zwischen Geometrie und Erfahrung besteht ein relevanter Aspekt der Gedanken von Poincaré, der schon von Riemann 1854 vorgestellt worden war, wie wir gesehen haben, und den man sich vorstellen kann wie *ein Problem der theoretischen und experimentellen Unentschiedenheit.*

Allgemein gesprochen ist das Problem jenes der "Asymmetrie": einerseits zwischen *Sinn* und Erkenntniswert einer mathematischen Theorie und andererseits bezüglich ihrer *Verifizierbarkeit.* Bezogen auf die Geometrie ist das Problem folgendes: Ist es möglich, experimentell zu prüfen, ob der physikalische Raum euklidisch ist? Ist es möglich, einerseits die geometrischen Begriffe (die in der Physik möglich sein sollten) zu definieren und gleichzeitig andererseits ein Korrektursystem auf die Maße zu übertragen, das entsprechend den Gegenbenheiten sich ändert, wobei trotzdem die Geometrie ihren euklidischen Charakter behält? Wir wissen, daß es schon für Gauß unmöglich war, eine endgültige Antwort auf jenes Problem zu geben. Die nicht-euklidischen Geometrien sind nicht nur vom logischen, sondern auch vom physikalischen Standpunkt her gleichwertig. Für Gauß war es unmöglich, *a priori* zu wissen, ob die räumliche Konstante "K" (die Krümmung) unendlich war oder nicht, und ob die Geometrie euklidisch war oder nicht. *A posteriori*, da die räumliche Konstante nicht determinierbar sein kann, sondern nur annäherungsweise bestimmbar, kann man nicht mit Hilfe der Beobachtungen und der Erfarhungen wissen, ob die physikalische Geometrie euklidisch ist, auch wenn sie es wirklich ist. Nun, eine erste Schlußfolgerung ist, daß es unmöglich ist, experimentell herauszufinden, ob unser Raum euklidisch ist, und daß, falls er auch nur annäherungsweise euklidisch wäre, es nicht bedeutet, daß die euklidische Darstellung über die Grenzen der Beobachtbarkeit hinaus ausdehnbar sei.

In einem Artikel von 1889 "L'expérience et la Géométrie", erneut veröffentlicht in "La science et l'hypothèse" behandelt Poincaré eine genaue und sehr interessante Argumentation, um zu beweisen, daß es unmöglich ist, bei dem geometrischen Empirismus einen verständlichen Sinn zu erkennen. Um die Idee zu kritisieren, die der Erfahrung die Möglichkeit zuweist, in einer gewissen Weise zu entscheiden, welche der verschiedenen Geometrien sich für den physikalischen Raum als nachprüfbar erweist, hatte Poincaré folgende zwei Argumente eingeführt:

a) wenn wir ein beliebiges körperliches System in Erwägung ziehen, ist es einerseits notwendig, den *Zustand* der verschiedenen Körper dieses Systems zu betrachten (z. B. ihre Temperatur, ihre elektrischen Potentiale usw.) und andereseits ihre Lage im Raum. Zwischen den Anhaltspunkten, die uns ermöglichen, diese Lage zu definieren, unterscheiden wir wiederum die gegenseitige Distanz jener Körper, die deren Positionen untereinander definieren, und die Bedingungen, die die absolute Position des Systems und ihre absolute Ausrichtung im Raum bestimmen. Poincaré schrieb dazu:

"Les lois des phénomènes qui se produiront dans ce système, pourront dépendre de l'état de ces corps et de leurs distances mutuelles; mais, à cause de la relativité et de la passivité de l'espace, elles ne dépendront que de la position et de l'orientation absolue du système."

b) "Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps avec l'espace, ou les rapports mutuels des diverses parties de l'espace."[10]

Das sind die physikalischen Eigenschaften der Körper und die ihrer Beziehungen, die man vom Experiment her kennt, aber nicht jedoch die geometrischen Eigenschaften gleicher Körper. Es gibt keine Zweifel über die Tatsache, daß in diesen Ausführungen von Poincaré das Prinzip der Einstein'schen Relativitätstheorie stillschweigend mit enthalten ist. Genau besehen behandelt das erste Argument das Gesetz der Relativität des Raumes, wohingegen das zweite

Argument Poincaré zu der Schlußfolgerung veranlaßte, daß die Experimente nich den Raum, sondern die Körper zum Ergebnis haben.

Bis hierhin stimmen die Positionen von Poincaré und Riemann substantiell überein: Beide vertreten die Auffassung, daß sich die Geometrie auf ein allgemeingültiges und abstraktes Konzept begründen sollte. Für Poincaré ist es jenes der Gruppe, bei Riemann jenes der Mannigfaltigkeit der n-fachen Dimensionen. Diese beiden Konzepte lassen sich in Wirklichkeit, das eine wie das andere, aufeinander zurückführen, wie dies später der französische Mathematiker Elie Cartan (1869–1951) vollständig bewiesen hat. Wie für Riemann so auch für Poincaré gilt, daß die grundlegenden geometrischen Konzepte vor allem mathematischer Natur sind, und daß die Geometrie tatsächlich das Resultat eines zweifachen Prozesses ist, nämlich der geistigen Intuition sowie der ideellen Konstruktion. Für aufeinander folgende Transformationen nehmen diese Intuitionen den Status "mathematischer Objekte" ein. In dieser Weise nimmt die Geometrie eine andere wichtige Rolle ein, deren sich sowohl Riemann wie auch Poincaré bedienten, um sich mit den analytischen und physikalischen Problemen auseinander zu setzen. Diese Methode hat zum Ihnalt, die qualitativen Gesetze erforschter mathematischer Probleme zu verbessern durch eine geometrische Darstellung derselben im bevorzugten Bereich der Flächentheorie und der Topologie.

7. Der Konventionalismus von Poincaré

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die Analyse der philosophischen Bedeutung der Poincaré'schen Philosophie. Sein geometrischer Konventionalismus ist eine sehr wichtige Antwort auf das Problem der Erkenntnis und somit auf die Frage: Welches ist das epistemologische Wesen der Geometrie, bzw. der Geometrien, die stärker mit dem Raum verbunden sind und auf den Raum angewandt werden können? In erster Linie betrachtete er die Geometrie als eine exakte Wissenschaft, als einen Teil von der Erkenntnis der Mathematik, die über jeden Zweifel erhaben ist. Er betrachtete die Geometrie bzw. die Geometrien als exakte, die sehr geeignet sind, unseren Raum zu beschreiben. Nach seiner Ansicht liefert uns die Erfahrung keine absolut sicheren Erkenntnisse, weil die Versuchsergebnisse nie endgültig und immer wieder neu zu überprüfen sind. Auch wenn die Geometrie einen Bereich beinhaltet, der sich auf unseren Raum anwenden läßt, so kann sie als eine empirische Wissenschaft betrachtet werden. Stellen wir uns also die Frage: Wie können wir uns die Beziehungen zwischen räumlicher Geometrie und Erfahrung in Anbetracht der Tatsache klarmachen, daß zwischen exakter Mathematik und ungenauer empirischer Erkenntnis ein großer logischer Abstand besteht? In diesem Zusammenhang lehnte Poincaré die rationalistische Lösung ab, die auf einer apriorischen Form der Erkenntnis begründet ist. Die Anerkennung des gleichen Gesetzes der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie veranlaßt ihn zu dieser Ablehnung. In der Tat betrachtete Poincaré seinen geometrischen Konventionalismus als einen Mittelweg zwischen empirischer Geometrie und Kant'schem Rationalismums. Der genaue Zusammenhang zwischen Erfahrung und räumlicher Geometrie ist eine Frage der Übereinkunft. Wir werden eine Geometrie auf den Raum mit Hilfe von Übereinkünften auswählen, obwohl wir durch die Erfahrung zu diesen verschiedenen Übereinkünften geführt werden.

Wir wählen die Übereinkünfte, die der Erfahrung mehr entsprechen, und, indem wir sie auf die Grundlage einfacher Prinzipien beziehen, versuchen wir sicherzustellen, daß diese Prinzipien nicht durch die Erfahrung widerlegt werden. Übereinkünfte dürfen nicht mit der nachprüfbaren Erfahrung verglichen, obwohl es zulässig ist, nach einiger Zeit eine Gruppe von Übereinkünften durch eine andere zu ersetzen. Die Übereinkünfte dienen als Brücke zwischen der empirischen und nicht exakten Erfahrung und der exakten Mathematik. Im gewissen Sinn ist das Ziel des Konventionalismus in der Geometrie bei Poincaré eine Vermittlung zwischen der Gewißheit der Mathematik und "the fallibility" der Erfahrung.

Poincaré scheint in seinen Schriften "angewandte Geometrie" und "reine Geometrie" zu trennen, obwohl er sich nie in besonderer Weise mit dieser Frage beschäftigt hatte. Er beschränkte sich auf die Betrachtung der Geometrien, die auf unseren Raum anwendbar sind. Er scheint den Raum, gemäß diesen zwei verschiedenen Bedeutungen hin betrachtet zu haben: Manchmal versteht er unter Raum den "phänomenologischen Raum", nämlich den, den wir durch die Analyse der psycho-physiologischen Assoziation schaffen, und manchmal versteht er unter Raum den "Raum der Erfahrung" im allgemeinen. Poincaré beschäftigte sich jedoch nicht mit dem physikalischen Raum als solchen, d. h. als einer Realität, in der die Geometrie und die Physik (wie Riemann dachte) sowie die Maßverhältnisse des Raumes und die physikalischen Phänomene ineinander verschmelzen. Also eigentlich widmete er sich nich dem physikalischen Raum. In der Tat lehnte er den physikalischen Raum als Konzept seiner Philosophie ab. Für Poincaré war der geometrische Raum derjenige, aus dem wir Schlußfolgerungen ziehen müssen. Die räumliche Geometrie ist eine Theorie, die in der Physik verwendet wird, um die Naturphänomene zu entdecken, zu erklären und die Erkenntnisse darüber zu vertiefen.

Für Poincaré gibt es alternative Geometrien, die gleichberechtigt sind, wobei die eine durch die andere ausgedrückt werden kann, d. h. sie sind kommensurabel. Jede von ihnen stellt eine Weise dar, die Naturphänomene zu betrachten. Das Wichtigste bei Poincaré ist, daß er seinen Grundbegriff der Geometrie aus den Gruppenbegriff her begründet.

1877 veröffentlichte Poincaré einen Artikel "Sur les Hypothèses fondamentales de la Géométrie", der von großer Bedeutung für die Mathematik und Epistemologie ist. In diesem Artikel entwickelte er zum erstenmal die konventionelle Auffassung von der Geometrie. Um alle möglichen Gruppen für verschiedene Geometrien mit zweidimensionaler Mannigfaltigkeit zu finden, bezieht er sich auf die Auffassung der Gruppentheorie von S. Lie. Nach dessen Ansicht ist die Geometrie nichts anderes als die Untersuchung einer Gruppe[11]. Er schrieb:

"D'après ce que nous venons de voir, la Géométrie n'est autre chose que l'étude d'un groupe et, en ce sens, on pourrait dire que la vérité de la géométrie d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de Lobatchevski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe. Nous avons choisi, parmi tous les groupes possibles, un groupe particulier pour y rapporter les phénomènes physiques, comme nous choisissons trois axes de coordonnées pour y rapporter une figure géométrique. Maintenant, qu'est-ce qui a déterminé ce choix: c'est d'abord la simplicité du groupe choisi; mais il y a une autre raison: il existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle les *solides* et l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les même relations que les diverses opérations du groupe choisi."[12]

Diese Ausführungen erlauben, einen grundlegenden Aspekt der epistemologischen Konzeption von Poincaré aufzugreifen, d. h., daß sein geometrischer Konventionalismus einen Inhalt *a priori* sowie eine objektive Bedeutung darstellt. Darüber hinaus bildet seine Epistemologie eine befriedigende Lösung des Auseinandersetzung zwischen "Subjektivisten" und "Empiristen", indem sie einen Verbindungspunkt zwischen der apriorischen Konzeption des Wissens und einer realistischen Konzeption schafft. Es ist klar, daß die Axiome der Geometrie herkömmlicher Art sind, und daß das vollständige System der Sätze, die einem bestimmten Typ der Geometrie angehören, *a priori* konstruiert ist. Aber das soll nicht heißen, daß die Bedeutung einer Geometrie nur konventionell sei. Die Gruppentheorie ebenso wie die Mannigfaltigkeit der n-fachen Dimensionen ist konstitutiv für die "Objekte", die auf sie zutreffen oder die ihr angehören. Sie ist in diesem Sinne ein Konzept *a priori* der geometrischen Wissenschaft, eine Allgemeingültige, für deren innere Entwicklung und deren Möglichkeiten der formalen und abstrakten Entfaltung. Aber gleichzeitig ist sie auch ein erklärendes Konzept konkreter Strukturen und tatsächlicher Erscheinungsformen der physikalischen Phänomene. So gilt folgendes: Auf der einen Seite können die Erfahrungswerte des objektiven Wissens sich als übereinstimmend mit den Ideen eines apriorischen grundlegenden Konzepts erweisen; auf der anderen Seite gilt (wie Riemann angeregt hatte), daß sich dieses Konzept durch die physikalische Realität als wahr erweist. Riemann hatte treffend vermutet, daß die metrische Form des Raumes auf mikroskopischem Niveau von den Gesetzen der physikalischen Phänomene, die daraus das Substrakt bilden, abhängt und daß deshalb das Ändern der Werte dieser Metrik verbunden ist mit der Möglichkeit, die NaturderPhänomenekennenzulernen.

In der Relativitätstheorie von Einstein wird die geometrische Form durch eine *vierdimensionale Mannigfaltigkeit von Riemann und Minkowski* gegeben. Die Relativitätstheorie betont die Gleichsetzung des "Beinhaltenden" mit dem "Inhalt": Die Materie wird in dem Moment nicht mehr als im Raum befindlich betrachtet, wenn seine Eigenschaften in jedem Punkt durch die Dichte der Materie in diesem Punkt determiniert sind. Die Geometrie und die Physik findet man in dieser Weise so vereinigt, daß es unmöglich ist, den Raum, die Riemann'sche Mannigfaltigkeit und die Materie zu trennen.

Poincarés und Riemanns Überlegungen führen zur grundlegenden Unterscheidung zwischen dem geometrischen Raum (mathematisch determiniert) und dem physikalischen Raum, der als eine konkrete Realisierung des geometrischen Raumes zu erfassen ist.

Die Klärung der Beziehungen zwischen diesen beiden könnte eine weitere Zielsetzung meiner Arbeit sein.

*

Dieser Artikel ist als Ergebnis einer Forschungsaufenthalt in München entstanden. Für den Aufenthalt, der vom 1. Juli bis zum 31 Oktober 1986 dauerte, bedanke ich mich besonders beim Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) und bei Prof. Menso Folkerts, Leiter des Instituts für Naturwissenschaften der Universität München, an der der Aufenthalt stattfand. Ein weiterer Dank gilt Prof. Dr. Menso Folkerts und Prof. Ivo Schneider, die mir die Möglichkeit gaben, einige Aspekte meiner Untersuchung in ihren Seminaren vorzutragen, und von denen ich nützliche Anregungen für meine Arbeit erhielt. Zuletzt danke ich sehr herzlich Herrn Albrecht Hoffmann vom Deutschen Museum für seine Mühe, meinen Text zu korrigieren.

Résumé

Dans cet article, nous essayons d'esquisser une première analyse épistémologique d'un problème théorique important, surtout au XIXe siècle, à savoir, d'une part, celui de la "constitution" de certains concepts géométriques fondamentaux et, d'autre part, celui des rapports existant entre ces concepts et le niveau de réalité représenté par les phénomènes de la physique. En reconnaissant dans ce problème, selon son double aspect, la véritable "question épistémologique" de tous les développements de la géométrie au

XIXe siècle, nous nous sommes proposé de considérer de plus près le rôle que le concept d'"hypothèse" joue dans la pensée géométrique de Riemann, par exemple, dans la création du concept de variété (*Mannigfaltigkeit*) notamment dans son mémoire de 1854 *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*. Puis, nous donnons quelques éléments nouveaux permettant d'interpréter le "conventionnalisme géométrique" de Poincaré par rapport au problème susdit. On verra ainsi qu'une analyse mettant en relation des conceptions géométriques de Riemann et de Poincaré révèle de points essentiels sur le plan historique et épistémologique.

Summary

In this article, I try sketch out an epistemological analysis of an important theoretical problem, particularly in the nineteenth century, that is, on the one hand, the "formation" of certain fundamental geometrical concepts, on the other hand, the relationship between those concepts and the level of reality represented by the phenomena of physics. While recognizing this problem, in its double aspect, as the real "epistemological question" of all the developments of the geometry in the nineteenth century, I propose to examine closely the part played by the concept of "hypothesis" in the geometrical thought of Riemann, for instance in the creation of the concept of manifold (*Mannigfaltigkeit*), notably in his memoir of 1854 *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*. Then I give some new elements which allow to interpret the "geometrical conventionalism" of Poincaré in relation to the problem foresaid. Thus we will see that an analysis relating the geometrical conceptions of Riemann and Poincaré reveals essential points on the historical and epistemological point of view.

Zusammenfassung

Der folgende Aufsatz behandelt eine erste erkenntnistheoretische Analyse eines bedeutenden theoretischen Problems, besonders des 19. Jahrhunderts: einerseits das Problem der "Konstitution" einiger grundlegender geometrischer Auffassungen, andererseits das Problem der Beziehungen, das zwischen den Begriffe und der Wirklichkeitniveau, die durch physikalische Phänomene dargestellt ist, auftritt. Ausgehend davon, daß dieses Problem, gemäß seiner beiden Aspekte, die tatsächliche "epistemologische Frage" aller Entwicklungen der Geometrie im 19. Jahrhundert beinhaltet, wurde der Frage nach der Bedeutung, die das Konzept der "Hypothese" in dem geometrischen Denken Riemanns einnahm, nachgegangen. So beispielsweise in die Entstehung des Begriffs der *Mannigfaltigkeit* in seiner Arbeit von 1854 *Ueber die*

Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Darüber hinaus werden einige neue Elemente eingeführt, die eine Interpretation der geometrische Konventionalismus von Poincaré in Bezug auf das obengenannte Problem ermöglichen. Im weiteren zeigt eine Analyse, in der die geometrischen Auffassungen Riemanns und Poincarés in Beziehung gesetzt werden, die wesentlichen Punkte der historischen und epistemologischen Gebiet auf.

[1] An dieser Stelle möchte ich an die ersten mathematischen Arbeiten von Riemann erinnern. Nachdem er am Lehrstuhl von Gauß in Göttingen studiert hatte, legte er 1851, im Alter von 25 Jahren, seine Inauguraldissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe" vor. Der grundlegende Gedanke dieser Theorie ist, daß man bei der Untersuchung einer Funktion von der Variablen „z" diese durch eine aus zwei Teilen bestehenden Größe „x = iy" ersetzt, auf die man alle Operationen unter der Bedingung anwenden kann, daß $i^2 = -1$ ist. Infolgedessen erhält man alle bekannten Funktionen einer Variablen, ebenso wie ihre schon behandelten Eigenschaften, und ein besseres Verständnis als vorher, als man diese Methode noch nicht benutzte. Schon in dieser Abhandlung erscheint einer der Aspekte, die die Riemann'sche Sichtweise der Mathematik charakterisieren und sich zum Beispiel von jener von Weierstraß untersheiden. Dieser Aspekt berücksichtigt die Erfindung der geometrischen Konstruktionen und die Entstehung der Geometrie im allgemeinen.

Riemann beginnt, bei einer Funktion die komplexen Werte der Form x + iy (wobei $i = \sqrt{-1}$) zu betrachten. Es seien x + yi und x + yi + dx + dyi zwei unendlich wenig von der Größe z verschiedene Werte, welchen die Werte u + vi und u = vi + du + dvi der Größe w entsprechen. Alsdann wird, wenn die Abhängigkeit der Größe w von z eine willkürlich angenommene ist, das Verhältnis $\frac{du + dvi}{dx + dyi}$ sich mit den Werten von dx und dy ändern, indem unter der Bedingung $dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$

$$\frac{du + dvi}{dx + dyi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] \frac{dx - dyi}{dx + dyi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] e^{-2\varphi i}$$

wird. Der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ wird von dem besonderen Wert des Differentials dz unabhängig sein, auf welche Art auch immer w als Funktion von z durch Verbindung einzelner Größenoperationen bestimmt wird. Offenbar kann also auf diesem Wege nicht jede beliebige Abhängigkeit der komplexen Größe w von der komplexen Größe z ausgedrückt werden.

Das eben hervorgehobene Merkmal aller irgendwie durch Größenoperationen bestimmbaren Funktionen werden wir für die folgende Untersuchung zu Grunde legen. Hier wird eine solche Funktion unabhängig von ihrem Ausdruck betrachtet, indem von folgender Definition ausgegangen wird, ohne jetzt dessen Allgemeingültigkeit und Zulänglichkeit für den Begriff einer durch Größenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit zu beweisen: Eine veränderliche komplexe Größe heißt eine Funktion einer anderen veränderlichen komplexen Größe z, wenn sie mit ihr sich so ändert, daß der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werte des Differentials dz ist.

Sowohl die Größe z als die Größe w werden als veränderliche Größen betrachtet, die jeden komplexen Wert annehmen können. *Die Auffassung einer solchen Veränderlichkeit, welche sich auf ein zusammenhängendes Gebiet von zwei Dimensionen erstreckt, wird wesentlich erleichert durch eine Anknüpfung an räumliche Anschauungen.*

Man denke sich jeden Wert x + yi der Größe z, repräsentiert durch einen Punkt 0 der Ebene A, dessen rechtwinklige Koordinaten x, y jeden Wert u = vi der Größe w durch einen Punkt Q der Ebene B, dessen rechtwinklige Koordinaten u, v sind. Eine jede Abhängigkeit der Größe w von z wird sich dann darstellen als eine Abhängigkeit der Lage des Punktes Q von der des Punktes 0. Entspricht jedem Wert von z ein bestimmter mit z stetig sich ändernder Wert von w, mit anderen Worten, sind u und v stetige Funktionen von x, y, so wird jedem Punkt der Ebene A ein Punkt der Ebene B, jeder Linie eine Linie, jedem zusammenhängenden Flächenstück ein zusammenhängendes Flächenstück entsprechen. *Man wird sich also diese Abhängigkeit der Größe w von z vorstellen können als eine Abbildung der Ebene A auf der Ebene B.*

Diese soeben erwähnte Methode führt Riemann zu einer grundlegenden Darstellung, die heute unter dem Namen „Riemann'sche Fläche" bekannt ist, d.h. eine Fläche aus mehreren Schichten, die die Ebene bedeckt und deren Schichten miteinander an den sogenannten Verzweigungspunkten verbunden sind. Mit Hilfe dieses Flächentyps erklärt Riemann die gesamte Funktionentheorie. Die Riemann'sche Fläche gibt uns die Möglichkeit, den Verlauf der vielfältigen Funktionen von (x = iy) zu verstehen und zu erfassen. Ein Hauptprinzip zur Klassifikation dieser Flächen ist uns durch die Ordnung der Verbindungen derselben Flächen gegeben; damit bezeichnet man die Anzahl der Transversalabschnitte, die man ohne Zerschneiden der Fläche bilden kann. Wie leicht zu sehen ist, geht Riemann von einer genauen analytischen Fragestellung aus, und es gelingt ihm, unter Anwendung einer ganz neuen geometrischen Methode grundlegende Theoreme der „Analysis Situs" aufzustellen.

Vom Standpunkt der Erkenntnistheorie möchte ich zwei Punkte seines Lösungsweges hervorheben: der erste bezieht sich auf die Anwendung „räumlicher Anschauungen", während der zweite Punkt, der nur eine ausführliche Beschreibung des ersten darstellt, sich auf den Begriff „Abbildung" bezieht, d.h. wie man die Abhängigkeit der Größe w von z auf dieselbe Art und Weise wie die Abbildung der Ebene A auf die Ebene B beschreiben kann.

An dieser Stelle ist es nicht möglich, diese Fragestellung weiter zu vertiefen. Für eine interessante Erörterung weise ich auf folgende Arbeiten hin: a) Jules Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Presses Universitaires de France, Paris 1962 (insbesondere die Abschnitte 36 und 27, S. 313–333); b) Henri Poincaré, *Pourquoi l'espace a trois dimensions*, Revue de Métaphysique et de Morale, Vol. 20 (1912), p. 483–504; c) Hermann Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, B. G. Teubner, Leipzig 1923.

Der zweite entscheidende Schritt Riemanns auf dem Gebiet der Mathematik war die Vorstellung seiner Habilitationsschrift vor der philosophischen Fakultät in Göttingen im Jahre 1854. Das Thema dieser Arbeit war ihm von Gauss vorgeschlagen worden. Da er sie vor einer gemischten Hörerschaft mit überwiegend philosophischer Ausbildung vortragen mußte, beschränkt sich der Autor auf eine allgemeine theoretische Behandlung der Themen, die den Inhalt seiner Arbeit ausmachen.

Wie sich mehrere Gelehrte erinnerten, z. B. Hans Freudenthal in seinem Artikel ("The Main Trends in the Foundations of Geometry in the 19th Century"; in: *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Proceedings of the 1960 International Congress. Edited by E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski, Stanford University Press, Stanford California, 1969, pp. 613–621), konnte der vollständige Inhalt der Abhandlung nicht ganz erfaßt werden (aus historische noch nicht ganz geklärten Gründen). Ursache dafür war wahrscheinlich die frühe Originalität des von Riemann dort dargelegten Inhalts und dessen Schwierigkeitsgrad. Die Habilitationsarbeit von Riemann wurde mit einigen Ausnahmen, wie z. B. vom italienischen Mathematiker Enrico Betti, für zirka 15 Jahre ignoriert, d. h. bis zur ersten Veröffentlichung seiner Werke, durchgeführt dank Hernn H. Weber und R. Dedekind im Jahre 1867. Tatsächlich wurde begonnen, die Riemann'schen Ideen durch einige Schriften wie die von H. v. Helmholtz weiter zu verbreiten; die ersten von diesen erschienen 1868 mit dem Titel „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen". Jedenfalls, wenn auch mit Verspätung, verstand man, daß die Habilitationsarbeit von Riemann eine der wichtigsten Arbeiten über die Geometrie aller Zeiten darstellt, wenn nicht in ihrem Umfang, so jedoch wegen des Reichtums an neuen Ideen, die sie enthielt; wegen des neuen Beitrags zur Geometrie und wegen des philosophischen und physikalischen Widerhalls, den sie gefunden hatte.

In dieser Arbeit sind auf eine völlig neuartige Weise folgende Begriff definiert: „Der Begriff einer *n*-fach ausgedenhnten Mannigfaltigkeit"; die differenzielle Geometrie der Flächen bezogen auf die konstante Krümmung sowie die Unterscheidung zwischen „Unbegrenztheit" und „Unendlichkeit".

An dieser Stelle nehmen wir uns nicht vor, diese Begriffe zu analysieren, weil dies mehr Raum beanspruchen würde, als wir zur Verfügung haben. Wir geben eher eine kurze Analyse von dem Begriff der „Hypothese", wie er von Riemann in seiner Habilitationsarbeit gebraucht wurde.

Auf mathematische, historische und epistemologische Abhandlungen über das Werk Riemanns wollen wir den Leser im folgenden verweisen:

a) E. Cartan, „Leçon sur la géométrie des espaces de Riemann", Gauthier-Villars, Paris 1928; b) E. Scholz, „Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré", Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1980; c) R. Torretti, „Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1978.

[2] Es wurde bekräftigt, daß Poincaré der letzte Universalmathematiker gewesen ist. Sein wissenschaftliches Werk, daß sich über einen Zeitraum von 40 Jahren erstreckt und mehr als 500 Arbeiten umfaßt, hat zu verschiedenen Bereichen grundlegende Beiträge geleistet: zur Mathematik, Physik, Astronomie und auch zur Erkenntnistheorie. Die Entdeckung der ganzen Bereiche der Topologie, der Funktionstheorie, der Gruppentheorie und der Himmelsmechanik sind das wichtigste Ergebnis seines Werkes. Und wie man weiß sind viele neue Entdeckungen dieses Jahrhunderts auf den oben genannten Gebieten durch Grundideen inspiriert worden, die schon *in nuce* in den Werken von Poincaré enthalten waren. Es ist notwendig, sofort einen allgemeinen theoretischen Aspekt der Konzeption des Autors über die Mathematik hervorzuheben: Dieser Aspekt ist bedeutsam für die Rolle, die die abstrakten geometrischen Gestalten bei der Lösung „analytischer" Probleme spielen, und für die Entdeckung neuer Prinzipien. In „Analyse de mes travaux scientifiques"; in: *Acta Mathematica*, t. 38. Stockholm 1921, erklärt er selbst, worin seine neue Annäherung z. B. im Hinblick auf das generelle Problem der Integration der Differentialgleichungen besteht. Vor Poincaré hatten sich Mathematiker wie Cauchy, Fuchs, Briot, Bouquet und Kowalevski vor allem damit beschäftigt, die Eigenschaften der Integrale *in ihrer Nähe zu einem gegebenen Punkt* zu bestimmen, anstatt das Wesen der Integrale der Differentialgleichungen oder der Gleichungen mit partiellen Ableitungen für alle Werte der Variablen zu erforschen, d. h. umfassend. Aber, Poincaré schreibt:

"L'étude des intégrales des équations différentielles dans les voisinages d'un point donné, quelle que soit son utilité au point de vue du calcul numérique, ne saurait être regardée que comme un premier pas. Ces développements, qui ne sont valables que dans un domaine très limité, ne nous apprennent pas, au sujet de ces équations, ce que nous apprennent les fonctions Θ au sujet des intégrales des différentielles algébriques: ils ne peuvent pas être considerés comme une véritable intégration. Il faut donc le prendre comme point de départ dans une étude plus approfondie des intégrales des équations différentielles où l'on se proposera de sortir des domaines limités où l'on s'était systématiquement cantonné, pour suivre les intégrales dans toute l'étendue du plan." (pp. 41 u. 42).

So wie zuerst bei Riemann verweist auch bei Poincaré die Rolle der abstrakten geometrischen Gestalten auf eine epistemologische fundamentale Bedeutung, auf eine Bedeutung, die dem spezifischen Inhalt selbst der Mathematik innewohnt. Dieses bedeutet vor allem, daß die Erforschung dieser Gestalten nicht befreit von einer nur euristischen Funktion oder Hilfsfunktion bei der erschöpfenden analytischen Abhandlung von Problemen. Im Gegenteil, das Bevorzugen der geometrischen Annäherung führt zur genauen klaren Überzeugung, daß diese Methode erlaubt, zu einem Wissen über weitere Gebiete zu kommen.

Neben seinen mathematischen Arbeiten hatte Poincaré verschiedene Artikel allgemein philosophischen Charakters verfaßt, in denen er die Grundidee des „geometrischen Konventionalismus" zum Ausdruck brachte. Die Geometrie Poincarés entspringt einer Tradition der exakten Geometrie, d. h. jener Gruppentheorie von S. Lie, dessen Werk Poincaré stark beeinflußte. Speziell in seinem Artikel „Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie" von 1898 übernahm Poincaré vollständig die Auffassung der Gruppentheorie. Tatsächlich bedeutete die Geometrie für ihn nichts anderes als das Studium einer Gruppe. Trotzdem können wir auch sehen, wie Riemanns Idee von der Mannigfaltigkeit der *n*-fachen Dimensionen der Ausgangspunkt für einige mathematische Arbeiten von Poincaré gewesen war, genauer gesagt jene über die „Analysis Situs", geschrieben zwischen 1892 und 1913. In diesen Artikeln entwickelt Poincaré eine wesentliche topologische Annäherung; und das ausgerechnet mit einem spezifisch

Riemann'schen Problem, welches Ausgangspunkt der Abhandlung „Analysis Situs" von 1895 war. In einer kurzen einführenden Bemerkung stellt er einige interessante Überlegungen allgemeiner Art an. Poincaré schrieb dazu:

"La Géométrie à *n*-dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperspace sont susceptibles de définitions comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier (...) La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens: elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux."

Im folgenden geht Poincaré zu einer ersten allgemeinen Definition der Mannigfaltigkeit über. Er geht auf folgende Weise vor: Gegeben seien x_1, x_2, $x_3,...,x_n$ *n*-Variable, anzusehen als die Koordinaten eines Punktes im Raum mit *n*-Dimensionen. Es muß angenommen werden, daß diese *n*-Variablen immer reale Werte erhalten. Folglich wird man ein System von *n*-Variablen als *einen Punkt* bezeichnen.

Betrachten wir das folgende System, zusammengesetzt aus „*p*-Gleichheiten" und aus „*q*-Ungleichheiten":

$$
\begin{aligned}
&F_1\,(x_1,\,x_2,...,x_n) = 0,\\
&F_2\,(x_1,\,x_2,...,x_n) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
(1)\qquad &F_p\,(x_1,\,x_2,...,x_n) = 0,\\
&\varphi_1\,(x_1,\,x_2,...,x_n) > 0,\\
&\varphi_2\,(x_1,\,x_2,...,x_n) > 0,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
&\varphi_q\,(x_1,\,x_2,...,x_n) > 0.
\end{aligned}
$$

Man kann sehen, daß die Funktion „F" und „φ" gleich und fortlaufend sind und daß sie stetige ableitungen haben. Man kann darüber hinaus vermuten, daß, falls man das Formel aufstellt

$$
\begin{aligned}
&\frac{dF_1}{dx_1},\ \frac{dF_1}{dx_2},...,\ \frac{dF_1}{dx_n}\\
&\frac{dF_2}{dx_2},\ \frac{dF_2}{dx_2},...,\ \frac{dF_2}{dx_n}\\
&\frac{dF_p}{dx_2},\ \frac{dF_p}{dx_2},...,\ \frac{dF_p}{dx_n}
\end{aligned}
$$

und sich in der Folge die erhaltenen Determinanten bilden, die „p" als jeden beliebige Reihe der Formel nehmen, man annehmen kann, daß diese Determinanten sich niemals alle auf einmal auflösen. Man wird nun sagen, daß die Gesamtheit der Punkte, die die Bedingungen (1) erfüllen, *eine Mannigfaltigkeit der n-p fachen Dimensionen* bilden, immer vorausgesetzt, daß solche Bedingungen existieren. (Wenn speziell $p = 0$ ist, in der Art, daß man die Ungleichheiten vorgegeben hat, so erhält man also in diesem Fall eine Mannigfaltigkeit der *n*-fachen Dimensionen. Poincaré bezeichnete diese Mannigfaltigkeit mit dem Namen *Gebiet* (*Domaine*).)

Es können sich zwei Fallstellungen ergeben: Es seien α_1, $\alpha_2,...,\alpha_n$; β_1, $\beta_2,...,\beta_n$ zwei Punkte, die die Bedingungen (1) erfüllen. Oder man kann auf fortlaufende Weise x_1, x_2, $x_3,...,x_n$ verändern durch α_1, $\alpha_1,...,\alpha_n$ bis hin zu β_1, $\beta_2,...,\beta_n$, ohne daß die Gleichungen (1) aufhören würden zu bestehen, und jene, welche die Werte von α_1, $\alpha_2,...,\alpha_n$ und von β_1, $\beta_2,...,\beta_n$ seien, angenommen, daß diese Werte die Bedingungen (1) erfüllen; auch wenn dieses wohl nicht immer möglich sein wird. Im ersten Fall wird man sagen, daß die definierte Mannigfaltigkeit der Bedingungen (1) *stetig ist*. Im verbleibenden Teil seiner Arbeit definiert Poincaré die grundlegenden Eigenschaften der stetigen Mannigfaltigkeiten.

[3] Blanchard, A., *Oeuvres Mathématiques de Riemann*, Paris 1968. In: Préface de M. Hermite, pp. VII–VIII.

[4] Courant, R., cit. In: Naturwissenschaften (14), 1926, p. 1247.

[5] Klein, F., cit. In: *Oeuvres Mathématiques de Riemann*, A. Blanchard. Paris 1968, pp. XV, XVI und XX.

[6] Riemann, B., „Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlichen Nachlaß", Dover Publications, Inc. New York, 1955, pp. 272–273.

[7] Für einen historischen Darstellung der Entwicklungen der Differentialgeometrie von Gauß bis Riemann verweise ich den Leser auf den Artikel von Karin Reich „Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauß bis Riemann", 1828–1868. In: Arch. Hist. Ex. Sci., 11. 1973. Auf Seite 292, schreibt Reich:

"Wie Gauß im § 13 seines *Disquisitiones* ausführt, ist er der Meinung, daß das Theorema egregium dazu führe, «Flächen aus einem neuen Gesichtspunkt zu betrachten, ... nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindend klein ist, ... als biegsam, aber nicht als dehnbar» und daß «der eigentliche Ausgangspunkt für den allgemeinen Ausdruck einer Fläche bei solcher Auffassung ... in der Formel liege (G1, 11). Dieser Punkt, die Auffassung des Begriffs Fläche, ist es, von dem B. Riemann dann ausgeht. In seinem in Göttingen am 10. Juni 1854 gehaltenen Habilitationsvortrag «Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen» trägt er erstmals seine Ideen über *n*-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten vor: «... eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren wesentliches Kennzeichen ist, daß in ihr von einem Punkte nur nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich ist. Denkt man sich nun, daß diese Mannigfaltigkeit wieder in eine andere, völlig verschiedene, übergeht, und zwar wieder auf bestimmte Art, d. h. so daß jeder Punkt der anderen übergeht, so bilden sämtliche so erhaltene Bestimmungsweisen eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit...» usw. (R2, 2; I, 2). Für den Begriff „Fläche" gilt nun, «daß sich die Verhältnisse der zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten sind nur Spezialfälle der *n*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. Während bei Gauß nur Flächen betrachtet werden, die im 3-dimensionalen Euklidischen Raum eingebettet sind, verzichtet Riemann bei seiner Definition der Mannigfaltigkeit auf eine Einbettung in einen höher dimensionalen Raum. Vielleicht ist es gerade die abstrakte, nich mehr an die Anschauung gebundene *n*-dimensionale Betrachtungsweise, die Riemann diesen Gedanken nahe gelegt hat."

[8] Nach Poincaré kann man die Eigenschaft der Homöomorphie auf folgende Weise definieren: Betrachten wir eine Substitution, die $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ in $x'_1, x'_2, x'_3,\ldots,x'_n$ verändert, und die nun folgende Bedingungen erfüllt:

$$(1) \qquad x'_i = \varphi_i\,(x_1, x_2,\ldots,x_n) \qquad (i = 1, 2,\ldots,n).$$

In einem gewissen Gebiet sind die Funktionen φ_i gleich, endlich und stetig. Sie haben stetige Ableitungen und ihre Funktionsableitungen heben sich nicht mehr auf. Wenn man die Gleichungen (1) bezogen auf $x_1, x_2,\ldots,x_n$ erhält, so hätten wir

$$(2) \qquad x_k = \varphi'_k\,(x'_1, x'_2,\ldots,x'_n) \qquad (k = 1, 2,\ldots, n),$$

wobei die Funktionen „φ'_k" dieselben Bedingungen wie die Funktion „φ_i erfüllen. Es ist klar, daß die Gesamtheit der Substitutionen, die diese Bedingungen erfüllen, eine Gruppe bilden. Diese Gruppe ist eine der allgemeinsten, die man sich vorstellen kann. Es ist auch klar, daß eine Substitution dieser Gruppe einer Mannigfaltigkeit der *n*-fachen Dimensionen umgewandelt wird in eine Mannigfaltigkeit der *m*-fachen Dimensionen, und daß diese umgewandelte Mannigfaltigkeit stetig, oder endlich oder unbegrenzt sein wird, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit es ebenso ist (und umgekehrt). Gegeben seien zwei Mannigfaltigkeiten einer gleichen Anzahl von Dimensionen „V" una „V'", definiert im Bezug auf die Bedingungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_\alpha = 0 \ (\alpha = 1, 2,...,p),\\ &\varphi_\beta > 0 \ (\beta = 1, 2,...,q),\end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} &F'_\alpha = 0 \ (\alpha = 1, 2,...,p'),\\ &\varphi'_\beta > 0 \ (\beta = 1, 2,...,q').\end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß man einen Punkt $x_1, x_2,...,x_n$ der Mannigfaltigkeit „V" mit dem Punkt $x'_1, x'_2,...,x'_n$ der Mannigfaltigkeit „V'" korrespondieren lassen kann, so erhielte man

$$(3)\qquad x'_k = \varphi_k\,(x_1, x_2,...,x_n) \qquad (k = 1, 2,...,n).$$

Man betrachtet den Gebiet „D" durch die Ungleichung

$$F_\alpha > -\,\varepsilon, \qquad F_\alpha < \varepsilon, \qquad \varphi_\beta > 0$$

bestimmt. Die stetige Mannigfaltigkeit ist selbstverständlicherweise völlig im Gebiet „D" enthalten. Man nimmt auch an, daß *in dem Gebiet „D"* die Funktionen ψ'_k endlich, stetig und gleich seien; daß sie stetige Ableitungen hätten und daß ihre Funktionsableitungen niemals gleich Null seien. Falls sich nun die Funktionen (3) ergäben, erhielte man

$$(4)\qquad x'_k = \psi'_k\,(x'_1, x'_2,...,x'_n) \qquad (k = 1, 2,...,n).$$

Man betrachtet den Gebiet „D" durch die Ungleichung

$$F'_\alpha > -\,\varepsilon, \qquad F'_\alpha < \varepsilon, \qquad \varphi'_\beta > 0$$

bestimmt und man nimmt an, daß *in dem Gebiet „D'"* die Funktionen „ψ'_k" endlich, stetig und gleich seien, daß sie stetige Ableitungen haben und daß ihre Funktionsableitungen niemals gleich Null seien. Aus dieser Hypothese ergibt sich, daß einem Punkt von „V" ein Punkt von „V'" entspricht, und nur einer und umgekehrt; einer jeden in „V" enthaltenden Mannifgaltigkeit „W" entspricht eine Mannigfaltigkeit „W'" derselben Anzahl von Dimensionen, enthalten in „V'"; falls „W" stetig, endlich oder unbegrenzt sei, würde derselbe Sachverhalt für „W'" gelten und umgekehrt.

Im Falle, daß alle diese Bedingungen sich als erfüllt erweisen, könnten wir sagen, daß die beiden Mannifgaltigkeiten „V" und „V'" *gleichbedeutend* vom Standpunkt der „Analysis Situs" sind, oder anders ausgedrückt, daß sie *homöomorph* sind.

Man kann auch sagen, daß zwei kompliziertere Figuren, die sich aus einer beliebigen Anzahl von Mannigfaltigkeiten zusammensetzen, homöomorph sind, wenn eine in die andere durch eine Umwandlung der Form übergehen kann (4).

So sind zwei Vielecke mit derselben Anzahl von Seiten homöomorph. Zwei Polyeder, deren Seiten in der Anzahl gleich sind, hätten dieselbe Anzahl von Seiten und wären gleich angeordnet, d. h. sie wären isomorph. (– Für die vollständige Uberprüfung der Satze verweise ich auf Poincaré, „Analysis Situs", 1895, cit.)

[9] In *The Common Sense of Exact Science* schreibt Clifford:

"Geometry is a physical science. It deals with the sizes and shapes and distances of things (...) whether, in fact, somme or all of those causes which we term physical may not be space. There are three kinds of variation in the curvature of our space which we ought to consider as within the range of possibility. (i) Our space is perhaps really possessed of a curvature varying from point to point... (ii) Our space may be really same (of equal curvature), but its degree of curvature may change as a whole with the time... (iii) We may conceive our space to have everywhere a nearly uniform ourvature, but that slight variations of the curvature may occur from point to point, and themselves vary with the time. These variations of the curvature with the time may produce effects which we not unnaturally attribute to physical causes..." (W. K. Clifford, cit., veröffentlicht von Karl Parson. London 1885, pp. 202 ff.)

[10] Poincaré, H., *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion. Paris 1912, pp. 96 ff.

[11] Ich verweise auf:

a) Dale M. Johnson, „The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II". In: Archive for History of Exact Sciences, vol. 25, no. 2/3, 15 XII 1981, pp. 85–267,

b) Hans Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Veb. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1969.

[12] Poincaré H. (1887), cit., pp. 90–91.