Dawid Lubiszewski

Spór o matematycznośc przyrody : Przegląd wybranych stanowisk

Prace Naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. Filozofia nr 8, 145-161

2011

PRACE NAUKOWE Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie
Seria: Filozofia 2011, z. VIII

Dawid LUBISZEWSKI

Spór o matematyczność przyrody. Przegląd wybranych stanowisk

Wstęp, czyli dwa odmienne spojrzenia na przyrodę

Przedmiotem niniejszych rozważań jest spór o matematyczną naturę świata, w którym to sporze prym wiodą dwa stanowiska. Pierwsze z nich wywodzi się od poglądów Pitagorasa i Platona, a współcześnie wyrażane jest przez Rogera Penrose'a czy Michała Hellera. Głosi ono, że u podstaw świata leżą matematyczne struktury. Mowa jest tutaj o matematyczności przyrody, ale rozumianej w pewien konkretny sposób. Heller pisze:

> Jednak w moim rozumieniu matematyczności świata mam na myśli tę jego cechę, dzięki której „można"' go matematycznie badać […][1].

W podobny sposób referuje to stanowisko Lee Smolin, pisząc, że:

> Pragnienie zrozumienia przyrody zostało wplecione w ideał platoński, z którego wynika, że świat jest odbiciem pewnych perfekcyjnych matematycznych form. […] [Zatem] celem teoretycznej fizyki i kosmologii powinno być odkrycie pewnej pięknej matematycznej struktury, która leży u podstaw rzeczywistości [tłum. własne][2].

Platonicy (tak będę określał zwolenników tej koncepcji) uznają istnienie matematyki w niezależnym od fizycznej rzeczywistości świecie, który jest niezmienny i wieczny, oraz istnienie matematycznych struktur będących fundamentem naszego świata. Matematyka jako byt istnieje w naszym świecie i człowiek może ją odkrywać. Nie ma jednak pewności, że uda mu się poznać całą matematykę, bo jej przedmiot jest transcendentny i istnieje poza naszą rzeczywistością.

---

[1] M. Heller, *Filozofia i wszechświat. Wybór pism*, Universitas, Kraków 2006, s. 49.
[2] L. Smolin, *Life of the Cosmos*, Oxford University Press, Oxford 1997, s. 177.

Druga z koncepcji, nazywana też antyplatonizmem, nie stawia tak mocno ontologicznie zaangażowanych tez. Z faktu, iż świat poddaje się matematycznemu opisowi, wyciąga się jedynie wniosek, że to język matematyki jest na tyle użyteczny, że możliwe jest jego szerokie zastosowanie. Jest to jednak zbyt słaba zależność, aby na jej podstawie można było stwierdzić, iż struktura świata jest matematyczna. Argumentem na rzecz tej tezy jest między innymi wybiórcze stosowanie różnych fragmentów matematyki do opisu rzeczywistości, oraz problemy wynikające z możliwości przeprowadzania matematycznie poprawnych działań, które nie są jednak poprawne z punktu widzenia fizyki. O takiej sytuacji pisze Smolin:

> To jest właśnie to, co spotyka teoretycznych fizyków próbujących użyć [matematycznych] równań w fizyce do przewidzenia, jak pewna wielkość zmienia się w czasie. W momencie, gdy wartość badanej wielkości fizycznej osiągnie nieskończoność, to równanie przestaje działać. Nie ma sposobu, aby je ponownie użyć do zbadania tego, co stanie się później [tłum. własne][3].

Smolin, pisząc *później*, ma na myśli moment, w którym otrzymany wynik przyjmie wartość nieskończoności. Bowiem z punktu widzenia matematyki, gdy jeden ze składników sumy jest nieskończonością, to wynik również będzie nieskończonością. Takie rozwiązanie nie zadowala jednak fizyków, gdyż w badanym przez nich obiekcie nastąpiła zmiana, której nie można zaobserwować za pomocą stosowanego wcześniej, z pozytywnymi skutkami, równania. (Inne przykłady podkreślające różnice pomiędzy matematyką a fizyką zostały podane w dalszej części pracy). Stanowisko to nie kwestionuje możliwości opisu świata za pomocą matematyki. Tak postawiona teza byłaby absurdalna. To, co jest kwestionowane, to konieczność istnienia pewnego matematycznego bytu po stronie świata, który to byt umożliwia stosowanie matematyki.

Pierwsze kroki w kierunku platonizmu

W pierwszej kolejności chciałbym przybliżyć popularne wśród niektórych naukowców stanowisko, którego krytykę przeprowadza między innymi Smolin. W ramach tego światopoglądu zakłada się, iż prawa fizyki są matematyczne ze swej natury, podobnie jak cała przyroda. Kluczowym argumentem na rzecz tej tezy ma być niesamowita skuteczność języka matematyki stosowanego do opisu świata, a jednym z przykładów są prawa odkryte przez Newtona. W świetle tych przykładów matematyka rzeczywiście idealnie pasuje do opisywanej rzeczywistości, ale – czy jest to rzeczywistość fizyczna? Innymi słowy, czy za pomocą praw Newtona poznajemy głębie otaczającego nas świata? Wykonując proste matematyczne obliczenia z dokładną precyzją podajemy wynik, np. czas, w ja-

[3] Tamże, s. 80.

kim samochód pokona trasę od miejsca A do B. Bardzo łatwo możemy ulec złudzeniu, iż z tego powodu możemy mówić o matematycznej naturze świata, gdyż prawa, którymi się posługujemy, są oparte na matematyce. Jednakże w zadaniach tych, za pomocą których poznajemy prawa Newtona, przyjmuje się pewne udogodnienia, dzięki którym obliczanie różnych zmiennych jest takie proste. Należy pamiętać, że w wspomnianym powyżej zadaniu:

— samochód porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, którym nie poruszają się rzeczywiste samochody (te bowiem poruszają się ruchem zmiennym),
— porusza się on po linii prostej przez całą drogę,
— powierzchnia w prostych zadaniach jest z reguły pomijana, nie stawia oporu, tak jakby jej fizycznie nie było,
— wielkość samochodu w znaczny sposób różni się od wielkości i rozmiarów (w tym wymiarów) w rzeczywistości, gdyż pojazd traktowany jest jako:
  – punkt (jeśli obliczamy czas potrzebny, by przemieścić się z miejsca A do B, to wielkość samochodu nie ma znaczenia),
  – albo odcinek o pewnej długości (jeśli obliczamy czas, jaki potrzebuje on do wyprzedzenia innego pojazdu, to oba traktujemy jako odcinki o pewnej długości).

Zatem różnice pomiędzy opisywanym przez Newtona światem a światem rzeczywistym są istotne. Ponadto, to zmatematyzowanie opisywanej rzeczywistości (np. poprzez traktowanie samochodu jako punktu) umożliwia skuteczne stosowanie praw dynamiki Newtona. Można więc postawić pytanie, skąd pogląd będący bardzo prostą odmianą platonizmu jest nadal popularny. Na to pytanie odpowiedź podaje Smolin:

> Oczywiście, kiedy ktoś zaczyna studia [z fizyki], szybko uczy się, że ani prawa Newtona, ani geometria euklidesowa nie odzwierciedlają rzeczywistości. Ale zanim to nastąpi, zdąży on już ulec wcześniejszemu światopoglądowi […]. Ponadto, jeśli młody badacz jest ambitny, będzie starał się poszukiwać [matematycznej] formuły opisującej prawdziwy obraz świata. W końcu uznaje on, że istnieje matematyczna konstrukcja, która opisuje całą rzeczywistość, i prędzej czy później ktoś musi ją odkryć. Dlaczego więc nie mogę to być ja? – pyta młody naukowiec [tłum. własne][4].

Inne przykłady podać można z przeprowadzanych w szkole lekcji fizyki, gdzie młody adept, rozwiązując zadania, najczęściej otrzymuje bardzo ładne i podane w całkowitych liczbach wyniki. Na przykład w zadaniach z grawitacji, aby wynik był ładniejszy i łatwiejszy do sprawdzenia, zaokrągla się do dziesięciu wartość przyspieszenia ziemskiego. Zatem fizyka, której uczy się przyszły naukowiec, pisana jest bardzo pięknym językiem matematyki, z reguły operującym na liczbach całkowitych. Tego typu doświadczenie, jak pisze Smolin, może utrwalić w nas przekonanie, iż za pomocą prostych równań matematycznych od-

[4] Tamże, s. 179.

kryliśmy fragment rzeczywistości i jeśli trochę więcej wykażemy zaangażowania, to może sami odkryjemy jakieś nowe równanie rządzące przyrodą.

Przystanek w świecie abstrakcji

Matematyka, która urzekła Pitagorasa, a później Platona, to przede wszystkim piękna kraina abstrakcji. Mówiąc o abstrakcji, nawiązuje się do apriorycznych metod poznawania matematyki, które są kwestionowane przez antyplatoników. Aprioryczne metody poznawania matematyki zakładają bowiem, że matematyka jest dyscypliną wolną od wpływu naszych zmysłów i całkowicie niezależną od świata zewnętrznego[5]. Liesbeth De Mol pisze:

> Pojmowanie matematyki jako dyscypliny czystej i w pełni autonomicznej jest bardzo stare i sformułowane zostało przez Platona. Wierzył on w aprioryczny świat idei, do którego człowiek ma dostęp tylko za pomocą czystego rozumowania. […] Nasz doświadczany świat jest jedynie cieniem – błędną kopią – tego idealnego świata. Pogląd ten, że prawdę można poznać jedynie poprzez abstrakcyjne myślenie, bez posługiwania się zmysłami, poprowadził wielu ludzi do przekonania, że matematyka jest jedyną prawdziwą nauką, ponieważ nie polega na zawodnych zmysłach [tłum. własne][6].

W tym miejscu można zadać pytanie, czy rzeczywiście matematyka jest tak abstrakcyjną dyscypliną i czy poznajemy ją bez pomocy naszych zmysłów. Świat, w którym żyjemy, zgodnie z wcześniej wyrażonym stanowiskiem, jest jedynie słabą kopią świata idealnego, w którym wszystko, co istnieje, jest perfekcyjne. Jednakże niezależnie od tego, jak bardzo daleki od perfekcji uznamy nasz świat, to ostatecznie bez występujących w nim „cieni" nie będziemy w stanie wybrać się w podróż do krainy abstrakcji. Przykładem takiego „cienia" są między innymi rysunki, czy szerzej graficzne przedstawienie problemu, jakie stosują matematycy. De Mol rozpoczyna od prostego przykładu, przechodząc do bardziej złożonych. Pozostańmy jednak na prostszym przykładzie. Poniżej przedstawione zostały dwa rachunki. Przyjrzyjmy się pierwszemu z nich:

$$((((81/7) \bullet (7/73)) + ((44/3) - (11/12))) \bullet (((76/12)) \bullet (5/84)) + (2/21))))^2.$$

W ten sposób zapisane zadanie wydaje się dość trudnym do rozwiązania. To samo jednak zadanie zapisane w inny sposób staje się bardziej przejrzyste i łatwiejsze do rozwiązania. Oto inny, bliższy naszemu sposobowi uprawiania matematyki, zapis:

$$\left[\left[\frac{81}{7} * \frac{7}{73}\right] + \left[\frac{44}{3} - \frac{11}{12}\right]\right] * \left[\left[\frac{76}{12} * \frac{5}{84}\right] + \left[\frac{2}{21}\right]\right]^2.$$

---

5 L. De Mol, *Mathematic and Pictures. Some popular examples*, http://logica.ugent.be/liesbeth/MathPict.pdf [data dostępu: marzec 2011].

6 Tamże, s. 1.

Choć w obu przypadkach oba równania zapisane są poprawnie, to jedno z nich jesteśmy w stanie obliczyć zdecydowanie szybciej od drugiego. Jest to więc przykład pokazujący, jak graficzne przedstawienie tego samego problemu wpływa na czas jego rozwiązania.

Wzrokowa informacja może zostać więc użyta do zrozumienia pewnych matematycznych struktur, czy wglądu w jakieś matematyczne zagadnienie, i ma istotny wpływ na skuteczne rozwiązywanie zadań. Jednakże to, w jaki sposób graficznie prezentujemy pewne zagadnienia, wpływa również na dalszy rozwój matematyki. Przykładem niech będą liczby rzymskie i arabskie. Licząc do dziesięciu, oba systemy liczbowe się sprawdzają. Jednak gdy w grę wchodzą większe liczby, dla liczb rzymskich zaczynają się problemy. Z tego powodu zapis arabski wyparł zapis rzymski. Ponadto to zapis arabski umożliwił powstanie nowych gałęzi matematyki, podczas gdy rzymski miał problemy z prostymi działaniami z arytmetyki, jak na przykład z odejmowaniem. Oprócz tego w systemie rzymskim nie występowało zero oraz nie można było zapisać ułamków, za wyjątkiem połówki, która miała swój własny symbol. Tak więc przykład ten pokazuje, że od zapisu graficznego zależy nie tylko szybkość rozwiązywania zadań, ale i możliwości dalszego rozwoju matematyki.

Kolejnym interesującym przykładem jest zastosowanie komputerów w matematyce, za pomocą których odkrywa się i rozwija nowe jej subdyscypliny. Okazało się, że zastosowanie grafiki komputerowej, czyli nowej formy reprezentacji wizualnej, umożliwiło powstanie nowej wiedzy matematycznej, która wcześniej była poza naszym zasięgiem. Jak pisze De Mol:

> Tłumaczenie informacji matematycznej na wizualną może być bardzo przydatne w zdobyciu wglądu w zagadnienia matematyczne. Jednakże żaden z dotychczasowych przykładów nie dotyczył zdobycia nowej informacji. […] Nasze czyste rozumowanie nie potrafi sobie poradzić z rachunkami ani z informacją, która staje się dostępna za pomocą kalkulacji. Komputery dały nam jednak możliwość przeprowadzania milionów obliczeń w ciągu kilku sekund i w ten sposób pokonane zostało pierwsze z ograniczeń rozumowania [tłum. własne][7].

Przykładami powstałych nowych dyscyplin są między innymi automaty komórkowe, czy geometria fraktalna, i różne gałęzie matematyki nieliniowej. W obu przypadkach dzięki komputerom człowiek może analizować obiekty matematyczne, które nie byłyby nam dostępne bez wcześniejszej dużej liczby obliczeń, interpretacji graficznej będącej wynikiem tychże obliczeń, oraz obserwacji dynamiki zmian układu. Innymi słowy, zdolności „czystego” rozumowania są na tyle ograniczone, że człowiek bez pomocy komputera nie byłby w stanie zapamiętać milionów obliczeń i wyobrazić sobie interpretacji graficznej wynikającej z tych obliczeń.

Zatem traktowanie matematyki jako całkowicie oderwanej od rzeczywistości i uprawianej za pomocą apriorycznych metod jest jedynie ideałem. W praktyce

[7] Tamże, s. 3.

stosowanie i poznawanie matematyki wymusza na nas posługiwanie się chociażby kartką papieru i długopisem. W bardziej zaawansowanych przypadkach istotnym okazuje się graficzna prezentacja problemu. Matematyka nie jest abstrakcją niezależną od rzeczywistości, gdyż jej rozwój uzależniony jest między innymi od pamięci i mocy obliczeniowej badacza[8]. Czyżby więc matematyka była bardziej zależna od naszego cielesnego uposażenia niż się pierwotnie wydawało? Do takich wniosków dochodzą dwaj inni badacze kognitywiści: George Lakoff i Rafael Núnez. Ich stanowisko zostało zreferowane poniżej.

Skąd pochodzi matematyka?

Powyższe rozważania pozwalają postawić kolejne ważne pytanie w sporze o matematyczną naturę świata, a mianowicie: skąd pochodzi matematyka? Czy matematykę tworzymy, czy jedynie odkrywamy? Czy jest to niezależny od nas świat abstrakcji, bytujący równolegle do naszego świata rzeczywistego, czy jedynie wytwór naszej działalności? Te pytania związane są bezpośrednio ze sporem o matematyczną naturę świata, gdyż w zależności od odpowiedzi, skłonni będziemy opowiedzieć się po którejś ze stron. Jeśli matematykę jedynie odkrywamy, to bliżej jest nam do platonizmu. Przyjmujemy wtedy, że matematyka jest krainą abstrakcyjną, wieczną, którą odkrywamy za pomocą naszego rozumu. Ponadto matematyka ta leży u podstaw naszego świata. Jest on matematyczny, bo istnieje byt matematyczny, który umożliwia mu swoją realizację. Po drugiej natomiast stronie mamy stanowisko przeciwne – matematyka jest ludzkim wytworem, który nie jest niezależnym bytem będącym jednocześnie fundamentem naszej rzeczywistości. Po tej przeciwnej stronie stoją między innymi tacy badacze, jak George Lakoff i Rafael Núnez. Twierdzą oni, że zdefiniowana przez pierwszą ze stron matematyka funkcjonuje w postaci pewnego mitu, który należy porzucić. Nie zgadzają się oni między innymi z następującymi twierdzeniami:

a) matematyka jest jednocześnie i abstrakcyjna (niezależna od rzeczywistości), i rzeczywista (obecna w rzeczywistości jako realny byt),
b) matematyka istnieje niezależnie od działalności człowieka i jest warunkiem koniecznym dla istnienia każdego możliwego świata,
c) ludzka matematyka jest częścią matematyki transcendentnej (tej abstrakcyjnej, niezależnej od rzeczywistości),
d) matematyczne dowody pozwalają odkryć transcendentalną prawdę o świecie rzeczywistym,
e) matematyka jest rzeczywistą częścią fizycznego świata[9].

[8] Tamże.

[9] G. Lakoff, R.E. Núnez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, Nowy Jork 2000.

Jak można zauważyć, odrzucają oni kilka z głównych założeń pojawiających się w różnych odmianach platonizmu.

Jeśli matematyka nie jest odkrywana, a jest jedynie przez nas tworzona, to zmienia się istotnie spojrzenie na spór o matematyczność świata. Przyjmując bowiem to założenie za prawdziwe, argumentuje się, że matematyka jest narzędziem, za pomocą którego poznajemy i zdobywamy otaczającą nas rzeczywistość. Jednakże nie mamy żadnych podstaw, by twierdzić, że po stronie świata leżą matematyczne struktury, czy że posiada on matematyczną naturę. W ramach tego stanowiska mówi się o ucieleśnionej matematyce. Podkreśla się oddziaływanie naszej sensomotoryki na nasze zdolności matematyczne. Pisząc dokładniej, zdaniem badaczy abstrakcyjna matematyka wyłania się z konkretnych działań sensomotorycznych. Ponadto matematyka, jaką znamy, jest jedyną matematyką, jaką znają ludzie, tym samym nie możemy twierdzić, że jest ona tą transcendentną bądź elementem tej transcendentnej, gdyż nie mamy na to wystarczająco dowodów. Nie sposób orzec, czy udowodnione przez człowieka matematyczne twierdzenia są elementem transcendentnego świata. Mając w pamięci argumenty wysuwane przez De Mol, trudno się nie zgodzić ze stawianą przez tych badaczy tezą, że matematyka, jaką znamy, jest ograniczona do naszych umysłowych zdolności i naszego mózgu. Pisząc językiem metafory komputerowej, to od wielkości naszej pamięci i mocy obliczeniowej zależy, jaką matematykę uda nam się stworzyć. Matematyka, jaką znamy, jest ucieleśniona, bo zależy od naszego cielesnego uposażenia. Ważnym elementem jest również manipulacja środowiskiem, co zostało podkreślone w poprzedniej części pracy.

Przykłady, które wydawały się błahe, czyli konieczność korzystania z kartki i papieru, w świetle ucieleśnionego paradygmatu zyskują zupełnie nowe znaczenie. Matematyka wyłania się więc na skutek interakcji elementów złożonego systemu, to jest człowieka i otoczenia, w którym się znajduje. Jednak nie zawsze mamy pod ręką wystarczającą ilość przedmiotów, które pomogą nam zrozumieć matematykę. W tym miejscu z pomocą przychodzą nam metafory. Lakoff z Núnezem odwołują się również do kategorii metafory i pokazują, że jest ona wszechobecna w matematyce. Stosowanie metafor jest z jednej strony konieczne do zrozumienia pewnych matematycznych zagadnień, z drugiej jednak strony tworzy fałszywy obraz matematyki, który wcześniej został zdefiniowany jako mityczny. Ponadto od tego, jak wyobrazimy sobie jakiś „byt z matematycznej krainy”, zależeć będzie, jaką matematykę uda nam się utworzyć. Na przykład liczby można wyobrażać sobie na różne sposoby. Jednym z powszechnie znanych są liczby przedstawione jako punkty na osi. Bez takiej prezentacji liczby nie powstałaby analityczna geometria czy trygonometria. Jednakże dobrze wiemy, że liczby mogą funkcjonować w matematyce bez geometrycznego wyobrażenia. Stosowanie metafor, czyli pewnego sposobu konceptualizacji, prowadzi do wielu problemów. Jak piszą Lakoff i Núnez:

> Czy zero jest punktem na linii? Czy może jest pustym zbiorem? Czy jednym i drugim? A może to tylko liczba, która nie jest ani punktem, ani zbiorem? Nie ma jednej odpowiedzi, bowiem każda z możliwych dotyczy innej metafory, w rozumieniu której opisywana sytuacja wygląda inaczej [tłum. własne][10].

Dlatego między innymi zatriumfowały liczby arabskie, a nie rzymskie, bo z tych drugich nie można było wyprodukować przydatnej praktycznie na szerszą skalę matematyki, o czym była mowa w poprzedniej części.

Inny przykład dotyczy arytmetyki, której również uczymy się za pomocą metafor. Żeby zrozumieć podstawy arytmetyki, przeprowadzamy doświadczenia na jakichś przedmiotach, na przykład na pudełkach. Wyobrażamy sobie albo rysujemy bądź fizycznie manipulujemy pudełkami o jednakowej wielkości. Pudełka te grupujemy w zestawy o różnej wielkości. Mamy więc większe i mniejsze zestawy składające się z pudełek. Możemy wyróżnić spośród różnych zestawów ten najmniejszy oraz przełożyć pudełka z jednego zestawu do drugiego i na odwrót. Tym samym, za pomocą tego ćwiczenia, przeprowadzonego w głowie bądź na papierze czy też w magazynie, poznaliśmy podstawy arytmetyki. Zestawy pudełek to liczby, a ich wielkości odpowiadają wielkości liczb. Duże zestawy to liczby większe, a małe zestawy to liczby mniejsze. Najmniejsza kolekcja to jednostka, w przypadku liczb naturalnych to 1, czyli jedno pudełko. Przenoszenie pudełek z jednego zestawu do drugiego to działanie dodawania (jeśli podkreślamy powiększenie się zestawu drugiego) lub odejmowania (jeśli podkreślamy pomniejszenie się zestawu mniejszego). W ten oto sposób, bardzo prostą metaforą poznaliśmy podstawy arytmetyki. Jednakże metafora ta może być zwodnicza, gdyż terminy występujące w matematyce stosowane są również w języku potocznym do wykonywania codziennych czynności. Czasownik „dodać” jest tego przykładem. Mówimy „dodaj gazu”, „dodaj trochę pieprzu”, „dodaj trochę węgla”. Podobnie jest z innymi zwrotami, jak na przykład „weź X i dodaj Y”, który może być użyty w kuchni, w warsztacie, jak i w matematyce. Tym samym tylko mały krok dzieli nas od platonizmu, bowiem:

> [Te metafory są] tak mocno zakorzenione w naszych nieświadomych umysłach, że musimy się zastanowić raz jeszcze, by zdać sobie sprawę, że liczby nie są obiektami fizycznymi i w związku z tym nie mają wielkości [tłum. własne][11].

Skoro bowiem mówimy o liczbach jak o rzeczywistych obiektach, to przyzwyczajamy się do tego, że liczby mają fizyczne przedstawienie i fizyczne własności, jak wielkość. Natomiast stąd jest już krótka droga uznania, iż świat składa się z liczb czy innych matematycznych struktur.

Przyjrzyjmy się teraz fizyce, a dokładniej zjawisku przemieszczenia się z miejsca na miejsce. Załóżmy, że chcemy dowiedzieć się, kiedy będziemy w połowie drogi. Opiszmy więc rzeczywiste zdarzenie za pomocą języka matematy-

---

[10] Tamże, s. 6.

[11] Tamże, s. 56.

ki, a dokładniej arytmetyki. Miejsce, z którego rozpoczynamy podróż, traktujemy jako liczbę 0. Przemieszczanie się w stronę naszego celu to wykonywanie arytmetycznych operacji. Zbliżanie się do celu to operacja dodawania (gdy podajemy przebytą już trasę) albo odejmowania (gdy podajemy, ile zostało nam jeszcze drogi do końca). Natomiast poszczególne etapy podróży traktowane są jako kolejne liczby. Dzięki mapie wiemy, jak długa jest trasa. Dlatego wykonując arytmetyczne obliczenia, z powodzeniem wskażemy moment, w którym znajdować się będziemy w połowie drogi[12]. Tym samym wydawać nam się może, iż u podstaw tego zjawiska leżą matematyczne struktury albo że jest ono ze swej natury matematyczne. Jednakże po dłuższym zastanowieniu widzimy, że matematyczny opis – pomimo tego, iż jest skuteczny, bo pozwala przewidywać nasze położenie czy czas potrzebny do osiągnięcia celu – nie mówi nam nic o naturze badanego zjawiska. Gdy zaczniemy bowiem zastanawiać się dokładniej nad tym matematycznym opisem, pojawią się kolejne problemy, podobne do tych wymienionych wcześniej. Czym są użyte w opisie matematyczne elementy, na przykład zero? Czy jest to pewne miejsce na Ziemi, z którego rozpoczynamy podróż, czy symbol matematyczny, za pomocą którego oznaczyliśmy pewne miejsce, by rozwiązać pewien rzeczywisty problem? Lakoff i Númez wybiorą drugą opcję, z którą nie zgadza się Roger Penrose.

Trzeci świat

Roger Penrose jest jednym z najbardziej rozpoznawanych platoników współcześnie żyjących. Uważa on, że matematyka jest odkrywana, a nie wytwarzana. Coś tak pięknego jak zbiór Mandelbrota nie jest wymysłem ludzkiego umysłu, podobnie jak inne struktury i twierdzenia w matematyce. Należą one do świata matematyki, który Penrose oddziela od świata fizycznego i świata mentalnego. Pomiędzy tymi trzema światami zachodzą różne oddziaływania, np. świat fizyczny może wpływać na świat mentalny, a część świata matematycznego stosuje się w świecie fizycznym[13]. Teza o istnieniu trzech światów jest jednakże bardzo kontrowersyjna. Współczesna nauka nie dostarcza jednak argumentów na rzecz istnienia trzech światów, jak i sam Penrose nie potrafi wyjaśnić, w jaki sposób dokładnie miałyby przebiegać interakcje pomiędzy tymi światami. Z tego też powodu przejdę od razu do analizy dwóch przykładów, na które powołuje się ten angielski matematyk.

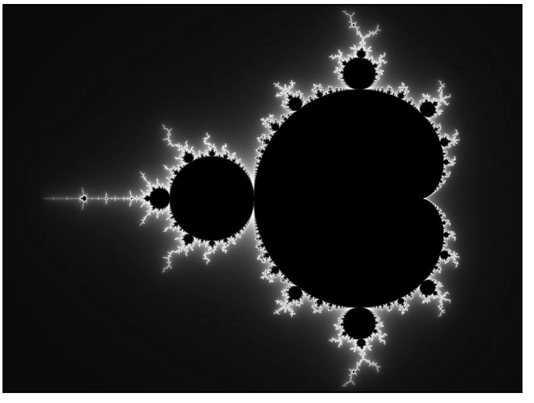
Czy zbiór Mandelbrota (rysunek 1) został stworzony, czy odkryty? Dla Penrose'a odpowiedź jest oczywista:

---

[12] Tamże.

[13] R. Penrose, *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, Londyn 2004.

> […] nikt, nawet sam Benoit Mandelbrot […] nie mógł przewidzieć niesamowitego bogactwa odkrytego zbioru. Zatem zbiór Mandelbrota z pewnością nie był wymysłem ludzkiego umysłu. Zbiór ten istnieje po prostu w samej matematyce. […] Jego istnienie jest tylko możliwe w matematycznym świecie platońskich form [tłum. własne][14].



Rys. 1. Zbiór Mandelbrota

Źródło: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg [data dostępu: marzec 2011].

Czy zatem rzeczywiście skomplikowanie zbioru i jego piękno świadczą o tym, iż istnieje on w innym świecie, i że ów inny świat rzeczywiście istnieje? Przypominając sobie wcześniejsze rozważania, mogę zgodzić się z pierwszą częścią wywodu Penrose'a, odrzucić zaś wyciągnięte przez niego wnioski. Rzeczywiście Mandelbrot nie mógł przewidzieć w swoim umyśle bogactwa zbioru, gdyż, jak wcześniej zostało wykazane, nasze zdolności są ograniczone. Odkrycie, w potocznym tego słowa znaczeniu, zbioru dokonało się za pomocą użycia przez człowieka komputera, a współczesna nauka dostarcza bardzo wielu przykładów zjawisk, które nie są w ten sam sposób przewidywalne. Dotyczy to różnych symulacji komputerowych. Na przykład Craig Reynolds przeprowadził komputerowe symulacje gromadzenia się ptaków. Przyjął on trzy proste reguły:

1) unikaj kolizji ze swoimi sąsiadami,
2) poruszaj się w tym samym kierunku, co twoi sąsiedzi,
3) przemieszczaj się w stronę punktu, który znajduje się pomiędzy twoimi sąsiadami[15].

Dzięki zastosowaniu tych reguł otrzymał on obraz przemieszczającej się grupy ptaków na ekranie komputera, które swoim zachowaniem bardzo przypominały gromadzenie się rzeczywistych ptaków. Znajomość trzech praw pozwala

---

[14] R. Penrose, *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, Londyn 2004, s. 16–17.

[15] C. Reynolds, *Boids. Background and Update*, http://www.red3d.com/cwr/boids/ [data dostępu: marzec 2011].

stwierdzić, w którym miejscu znajdzie się określony ptak przy założeniu, że dana jest również znajomość jego sąsiedztwa. Jednakże wiedza ta nie jest wystarczająca do przewidzenia zachowania dużej grupy ptaków, to znaczy: za pomocą tych reguł człowiek jest w stanie powiedzieć, w którą stronę skręci wybrany ptak, ale nie – w którą stronę skręci całe stado[16]. Żeby przewidzieć, w którą stronę skręci stado przeprowadza się symulacje. Przewidywanie możliwe jest dopiero po wystąpieniu danego zjawiska, gdy znamy już warunki początkowe, reguły i konfiguracje i mamy wiedzę o przyszłych skutkach interakcji. Jednak przed pierwszą symulacją czy wystąpieniem danego zjawiska nasza zdolność przewidywania jest bardzo ograniczona i podatna na duże błędy. Innymi słowy, dla pewnej klasy zjawisk, przed ich pojawieniem, nie jesteśmy w stanie ich przewidzieć. Dopiero gdy się pojawią po raz pierwszy, możemy próbować coraz precyzyjniej przewidywać kolejne ich wystąpienia. Niemożliwość przewidywania nie oznacza jednak, że modele matematyczne tych zjawisk istnieją w jakimś innym świecie i czekają na nasze odkrycie. Jest wręcz przeciwnie, to za pomocą coraz nowszych technik modelowania możemy tworzyć nowe dziedziny, o których istnieniu nawet nie marzyli nasi przodkowie. Niemożność wyobrażenia sobie czy przewidzenia tego, jak będzie wyglądał zbiór, wynikała z naszego ograniczenia biologicznego. Rozszerzywszy nasze zdolności poprzez zastosowanie komputerów do wykonania ogromnej liczby obliczeń, nowe obszary matematyki stoją przed nami otworem. W tym sensie Mandelbrot nie mógł przewidzieć bogactwa zbioru, jednak gdy już je poznał, mógł on posiadać pewne przypuszczenia, iż inne iteracje równań dadzą podobne rezultaty. Dlatego skłonny jestem uznać, iż zbiór ten został stworzony przez człowieka przy pomocy komputera, a nie odkryty (w sensie platońskim). Platonicy jednak spytają: czy w związku z tym twierdzenie Pitagorasa nie było prawdziwe przed odkryciem go przez greckiego filozofa? Pytanie to jest podchwytliwe i ma sugerować, że świat matematyki istnieje wiecznie i niezmiennie. Jednak można – moim zdaniem – odpowiedzieć w taki sposób na powyższe pytanie, by nie popadać w kłopot.

Jeśli pytamy, czy twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe w ramach geometrii euklidesowej, to odpowiedź jest pozytywna. Inaczej tego pytania rozumieć nie możemy, a jeśli tak czynimy, to popełniamy błąd. Pytając bowiem o prawdziwość tego twierdzenia przed jego odkryciem i odkryciem geometrii euklidesowej, nie wiemy o co pytamy, gdyż nie znając podstawowej geometrii nie możemy mówić o twierdzeniu Pitagorasa. Mylnie – moim zdaniem – zakładamy, że skoro coś jest prawdziwe w abstrakcji (a właściwie w umysłach badaczy), to musiało automatycznie istnieć w abstrakcji przed odkryciem, i że abstrakcja ta jest jakimś oddzielnym światem. Takie przejście uważam za nieuzasadnione. Dodatkowo przyzwyczajamy się do tego, że konstrukcje matematyczne mają fizyczne cechy, gdyż traktujemy je, jakby takie miały, więc trudniej jest nam po-

[16] Tamże.

godzić się z myślą, że konstrukcje te mogły wcześniej nie istnieć, skoro – zgodnie z duchem platonizmu – myśmy ich nie stworzyli. Dlatego pytania o to, czy matematyka istniała przed człowiekiem i czy będzie istniała, gdy gatunek ludzki wymrze, uważam za pytania źle postawione.

W stronę racjonalności przyrody

Drugim bardzo znanym na świecie platonikiem jest Michał Heller. Ten polski filozof i naukowiec łączy w pewien szczególny sposób zagadnienie racjonalności z matematycznością. W jaki sposób to czyni? Odpowiedzią na to pytanie niech będą słowa samego Hellera:

> Przyjąłem wyjściową hipotezę (jak sądzę dobrze umotywowaną) głoszącą, że światu należy przypisać pewną cechę, dzięki której można go racjonalnie badać. Cechę tę nazwałem racjonalnością świata. […] W badaniu świata przyrody szczególnie skuteczna okazała się metoda matematycznego modelowania połączona z eksperymentowaniem. […] Ten bezsporny fakt pozwala nieco dokładniej sprecyzować moją wyjściową hipotezę: światu należy przypisać cechę, dzięki której szczególnie skutecznie można go badać za pomocą metody matematycznej. Świat posiada więc racjonalność szczególnego typu – typu matematycznego. W tym sensie będę mówić o matematyczności świata[17].

Heller wyróżnia trzy światy: świat niematematyczny, świat o matematycznej strukturze, ale niedający się badać, i świat o matematycznej strukturze dający się badać. Przyjrzyjmy się bliżej temu drugiemu. Świat ten nazwany zostaje światem ontycznie matematycznym. Tak zdefiniowanego świata, zdaniem Hellera, nie można w pełni racjonalnie i matematycznie badać, mimo iż jego struktura odpowiada strukturze matematycznej. Przykładem takiej rzeczywistości ma być świat znajdujący się jedynie w dwóch różnych stanach. Świat ten ma początek, który oznaczony zostaje symbolem kropki. Natomiast dwa różne stany są oznaczone odpowiednio jedynką dla jednego i zerem dla drugiego. Tym samym historię tego świata zapisać możemy w postaci ciągu:

.010101001010111…

Zadanie, przed którym stoi fizyk, czy ogólnie badacz, to znalezienie teorii, na podstawie której mógłby przewidywać kolejne stany świata. Zdaniem Hellera, tego świata nie można badać matematycznie, mimo iż posiada on matematyczną strukturę. Pisze on, iż świat ten nie ma cechy algorytmicznej ścieśnialności, która przesądza o niemożliwości jego badania[18]. Tu należy dodać, że chodzi o szczególne badanie, a więc możliwość opisu świata przez prostsze struktury matematyczne. Ten warunek wydaje mi się kontrowersyjny – dlaczego brak

[17] M. Heller, *Filozofia*…, s. 48.
[18] Tamże.

możliwości prostszego zapisu, na przykład za pomocą wzoru, ma czynić dany świat matematycznie niebadalnym? Taką tezę stawia Heller. Mówi on:

> A zatem fizyk badający ten świat nie może żywić rozsądnej nadziei na odkrycie jego teorii. Badany przez niego świat ma strukturę matematyczną, ale jest matematycznie niebadalny[19].

Przyjrzyjmy się bliżej algorytmicznej ścieśnialności. Podany wcześniej ciąg opisujący historię wyimaginowanego świata może podlegać warunkowi ścieśnialności, jeśli tylko nie jest ciągiem przypadkowym[20]. Dla wykazania różnicy pomiędzy ciągiem przypadkowym a nieprzypadkowym podaję poniżej przykład ciągu ścieśnialnego:

> Postawieni przed ciągiem liczb lub symboli jesteśmy prawdopodobnie w stanie zastąpić go jakąś skróconą formułą o tej samej treści informacyjnej: w ten sposób nieskończony ciąg liczb 2, 4, 6, 8, 10, . . . mógłby być zastąpiony formułą potrzebną do wygenerowania liczb parzystych. W tym przypadku mówimy, że nasz ciąg jest algorytmicznie ścieśnialny[21].

Tak więc badacz w pierwszej kolejności stwierdza, czy dany ciąg liczb jest przypadkowy, czy też nie. Dopiero potem można stwierdzić, czy jest ścieśnialny. Tym samym czyniąc te dwa działania, bada ów świat, można by rzec, matematycznie. Jednak dla Hellera matematyczne badanie zaczyna się dopiero wtedy, gdy jesteśmy w stanie podać prostszy wzór. W tym momencie przypominają mi się cytowane wcześniej słowa Smolina o fizyku-platoniku poszukującym jakiegoś prostszego wzoru do opisu całej rzeczywistości. Tym samym uważam, że sam warunek algorytmicznej ścieśnialności nosi w sobie znamiona platonizmu, gdyż zakłada on konieczność istnienia prostszych struktur, które można odnaleźć.

Ścieśnialność powiązana jest jeszcze z jedną cechą, z przewidywalnością. Podanie prostszego wzoru dla wcześniej podanego ścieśnialnego ciągu, jak

$$2n + 2$$

pozwala nam przewidzieć, jaka liczba znajdzie się w dowolnie wybranym miejscu. To jest dla miejsca pierwszego, n = 0, otrzymujemy 2. Dla miejsca drugiego, n = 1, otrzymujemy 4, i tak dalej. Zatem jeśli nasz świat jest algorytmicznie ścieśnialny, to znając odpowiednie równania, będziemy mogli przewidywać jego kolejne stany. Innymi słowy fizyk-platonik nie tylko poszukuje prostszych struktur, za pomocą których opisze świat, ale również za ich pomocą będzie mógł przewidzieć dalsze jego losy. Przeciwnicy podkreślają jednak, iż takie rozumienie przewidywalności jest bliższe sytuacji idealnej niż rzeczywistej. Dokładniej zagadnienie to opisane zostało w ostatniej części pracy.

Algorytmiczna ścieśnialność pozwala na opisanie struktur bardziej skomplikowanych za pomocą struktur dużo prostszych. Cały czas jednak jest mowa

---

[19] Tamże, s. 52.
[20] J.D. Barrow, *Matematyka nowej ery*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 1994, nr 16, s. 87–99.
[21] Tamże, s. 89.

o strukturach matematycznych oraz o ścieśnialności w matematyce. Z tego natomiast nie można, moim zdaniem, wyciągnąć wniosku, iż skoro podaję wzór mający matematyczną strukturę, na przykład wzór na prędkość:

$$v = s / t,$$

to rzeczywiste zjawisko, opisywane przez ten wzór, będzie również posiadało jakąś matematyczną strukturę. Jest to pewne nadużycie języka matematyki. Ponadto wzory stosowane w fizyce różnią się od tych w matematyce. Te drugie pozwalają przewidywać całkowicie pewne zjawiska, te pierwsze tego nie potrafią. Wspomniany wzór na liczby parzyste pozwala nam podać zawsze dobrą odpowiedź, jeśli pytanie brzmi: jaka liczba będzie na n-tym miejscu? Jednak za pomocą powyższego wzoru na prędkość podamy przybliżony czas przejazdu z jednego miejsca do drugiego, gdyż wzór ten nie uwzględnia, na przykład, oporu powietrza, tarcia i wydarzeń losowych, chociażby stania w korku. Tak więc wzory fizyczne różnią się również tym, że są one pewnymi idealizacjami i nie uwzględniają wszystkich czynników. W matematyce tego problemu nie ma. Cały czas mowa jest o możliwościach przewidywania, które w ostatnim czasie podważone zostały mocno przez teorię chaosu. O tym jednak poniżej.

Chaos i co teraz?

> Rodzi się ważne pytanie: Czy prawa przyrody rzeczywiście są matematyczne? Oczywiście w to, że są one formułowane w postaci wzorów matematycznych, nie można wątpić, ale może „na dnie struktury świata” czai się chaos i przypadkowość, a znany nam matematyczny charakter praw przyrody jest tylko „bardzo sprytnym”, powierzchownym złudzeniem?[22]

Heller stawia ważne pytanie. W ostatnim bowiem czasie nastąpił gwałtowny przyrost wiedzy głównie z zakresu fizyki. Badania nad samoorganizacją i chaosem stały się bardzo popularne. Ponadto stały się one przedmiotem dyskusji na temat natury świata. Czy jest ona matematyczna? Czy może u podstaw leży chaos? Zdaniem innego polskiego badacza, Marka Szydłowskiego i innych – jest właśnie tak. Pisze on:

> To, co jest również niezwykle interesujące w problematyce układów samoorganizujących, to fakt istnienia pewnych ogólnych praw opisujących tak odległe dziedziny życia. Wygląda to tak, jakby całą naszą rzeczywistość, szeroko rozumianą, dało się pokryć kawałkami/siecią układów złożonych.
>
> M. Heller argumentuje, że świat jest pokryty siecią matematycznych struktur. Tutaj niczego takiego nie widać […]

[22] M. Heller, *Filozofia…*, s. 59.

Wydaje nam się, że postęp w badaniach nad złożonością kolejny raz chwieje wiarą w potęgę matematycznego opisu świata, który wydaje się być ułomny. U podstaw świata leżą struktury fizyczne, np. samoorganizujące się układy[23].

Jak to jest więc z tym chaosem i samoorganizacją? Czy przeczą one tezom Hellera? Sam Heller uważa, że można pogodzić chaos ze strukturami matematycznymi. Pisze on:

Nawet jeśli podstawowy poziom Wszechświata jest chaotyczny, to musi on mieć przynajmniej jedną matematyczną własność – musi być probabilistycznie ścieśnialny. Gdyby tej własności nie miał, nie można by do niego stosować rachunku prawdopodobieństwa […][24].

Chaos jest również dogłębnie badany w matematyce. Skoro matematycznie udało się zbadać chaos, to zgodnie z wcześniejszą argumentacją Hellera ma on matematyczną strukturę. Jednakże jest to nieuprawniony wniosek. Dokładniejsze badanie układów chaotycznych w fizyce i matematyce wskazuje na pewne istotne różnice pomiędzy układami matematycznymi a tymi prawdziwymi. Różnice te wskazuje między innymi Leonard Smith w swojej książce *Chaos. A Very Short Introduction*, pisząc:

Podam prosty przykład: nie możemy stosować tych samych standardów, które wykorzystywane są dla matematycznych dowodów, do układów fizycznych Standardy te jesteśmy w stanie zastosować tylko do matematycznych modeli tych układów. Jest niemożliwym do wykazania, że układ fizyczny jest chaotyczny czy zachowuje się okresowo. Nasi matematycy i fizycy nie mogą zapomnieć, że pomimo tego, iż używają tych samych terminów, to znaczą one coś innego [tłum. własne][25].

Definicja chaosu w matematyce może być stosowana tylko do układów matematycznych, dlatego nie możemy zacząć udowadniać, iż system fizyczny jest chaotyczny bądź periodyczny tym [matematycznym] sposobem. Pomimo to, jest bardzo użytecznym opisywać układy fizyczne, jako chaotyczne bądź periodyczne, dopóki pamiętamy, by nie mieszać ze sobą [własności] modeli matematycznych z fizycznymi [tłum. własne][26].

Smith pisze o różnicach pomiędzy fizyką a matematyką. Pisząc bardziej precyzyjnie, wyróżnia on układy rzeczywiste, modele fizyczne bazujące na matematyce opisujące te układy i układy matematyczne. Każdy z tych układów opisuje się za pomocą podobnych pojęć, jednak nie świadczy to – jego zdaniem – o tym, iż w związku z tym mają one te same własności. Ponadto dowody przeprowadzone dla jednej klasy układów nie muszą być prawdziwe dla innej, co więcej, mogą w ogóle nie być możliwe do przeprowadzenia.

W powyższym cytacie Heller pyta o to, co leży na dnie struktur świata. Współczesna nauka dostarcza wystarczających argumentów, by mówić o struk-

---

[23] M. Szydłowski, M. Hereć, P. Tabor, *Samoorganizujący się Wszechświat w różnych skalach – miejsce, gdzie nauka spotyka się z filozofią*, http://www.kul.pl/files/57/transfer_idei/szydlowski.pdf [data dostępu: marzec 2011].

[24] M. Heller, *Filozofia…*, s. 68.

[25] L. Smith, *Chaos. A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford 2006, s. 57.

[26] Tamże, s. 157.

turach fizycznych. Nawet jeśli cechą tych struktur jest chaotyczne zachowanie, to właśnie dzięki tym chaotycznym oddziaływaniom pojawiają się kolejne bardziej uporządkowane struktury. Te kolejne poziomy są dostępne dla współcześnie żyjących badaczy, którzy stosują z powodzeniem do ich opisu język matematyki. Dyskusja nad matematyczną naturą świata wkroczyła na kolejny etap. Nie jest to już dyskusja czysto metafizyczna, gdyż empiryczne badania i dowody odgrywają w niej istotną rolę. To, czy chaos rzeczywiście jest podstawą, czy może tylko pozorem, pokażą dalsze badania.

Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawione zostały różne stanowiska obecne w sporze o matematyczną naturę przyrody. Z jednej strony mamy badaczy, których stanowisko sięga do źródeł filozofii, czyli do czasów starożytnych Greków, i podpiera się autorytetem takich mędrców jak Pitagoras czy Platon. Z tego też powodu nazywa się ich platonikami. Twierdzą oni, że świat ma matematyczną strukturę, która umożliwia jego badanie za pomocą matematyki. Sama zaś matematyka istnieje niezależnie od naszego świata rzeczywistego, ale obecna jest również w naszym świecie. Jest ona i niezmienna, i wieczna. Pogląd ten, jak zostało pokazane w pracy, współcześnie może znaleźć wielu zwolenników. Z drugiej jednak strony matematyka, która wydaje się być dyscypliną bardzo abstrakcyjną, nie jest możliwa do uprawiania jedynie za pomocą rozumowań, mając zamknięte oczy. Co więcej, okazuje się, że nasze zdolności obliczeniowe i pamięciowe oraz sposób prezentacji matematycznych problemów w istotny sposób wpływa na dalszy rozwój matematyki. Zwolennicy ucieleśnionej matematyki przekonują, iż to w wyniku interakcji naszego ciała z otoczeniem pojawia się matematyka. Odrzucają tym samym jej wieczne i niezmienne istnienie, niezależne od wpływów naszego świata. Ponadto współczesne badania nad przyrodą coraz częściej akcentują rolę procesów samoorganizacji i chaosu, które mogą leżeć u podstaw naszego świata. Z nich to dopiero wyłaniają się uporządkowane fizyczne struktury. Platonicy próbują przekonywać, że wspomniany chaos można opisywać matematycznie, co miałoby sugerować matematyczną strukturę świata. Jednakże przeciwnicy platonizmu wskazują na różnice pomiędzy chaosem w fizyce a matematyce, które mają podważać twierdzenia ich oponentów. Proponowany w tekście przegląd nie obejmuje wszystkich stanowisk w opisywanej dyskusji. Zdaniem autora przedstawione zostały jednak najważniejsze z propozycji, które się współcześnie pojawiają. Podsumowując, należy zaznaczyć, że szeroko rozumiany antyplatonizm wkroczył na nową drogę rozwoju. Dyskusja nad matematyczną naturą świata nie jest sporem tylko metafizycznym, ale coraz częściej dokonuje się na płaszczyźnie empirycznej. Przykłady z badań kognitywistów, czy fizyków, znacznie ubogacają obraz przyrody i stawiają platoników w nowej sytuacji. Czy przeniesienie części dyskusji z rozważań czysto metafizycznych w rozważania przyrodnicze rozwiąże ostatecznie spór o matematyczną naturę świata? Możliwe, że dalszy rozwój wiedzy pozwoli nam kiedyś odpowiedzieć na to pytanie pozytywnie. Możliwe, że będziemy tego świadkami. Możliwe nie oznacza jednak, że będzie tak na pewno.

Summary

Debate on mathematical nature of the world. Review of current positions

In this article, I present selected positions involved in the discussions on the mathematical nature of the universe. On one side stand Platonists represented by Michael Heller and Roger Penrose. On the other, opponents of Platonism such as Lee Smolin, George Lakoff, Rafael Nunez and Marek Szydłowski. The first group argue for the existence of mathematical structures in the world and existence of independent mathematical world. The other researchers reject the Platonic vision of the world, as well as the need for a mathematical entity.