Elżbieta Mrożek

„Uchwycić kopię” czy podjąć własną aktywność myślową? O nauczaniu porównywania różnicowego i ilorazowego w szkole

Problemy Wczesnej Edukacji/Issues in Early Education 10/1(24), 74-81

2014

PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI / ISSUES IN EARLY EDUCATION ISSN 1734-1582
1 (24) / 2014

Elżbieta Mrożek
Uniwersytet Gdański
Elzbieta.Mrozek@mat.ug.edu.pl

„Uchwycić kopię" czy podjąć własną aktywność myślową? O nauczaniu porównywania różnicowego i ilorazowego w szkole

Summary

"Catch a copy" or undertake one's own mental activity? About teaching methods in additive and multiplicative compare word problems

The additive and multiplicative compare word problems are specifically difficult. The sources of these difficulties may lie in the nature of these tasks and the wrong teaching. In this article I have presented a proposal to amend the existing methodology of teaching to solve compare word problems by introducing a curriculum based on the constructivist approach. This change consists in the fact that at the beginning of schooling the pupils get familiar with the compare word problems on manipulated specific objects and simple numbers. Additive compare problem should be derived from the pupils' activities associated with one-to-one correspondence assigned on the occasion of comparing the sets of numbers. In the idea of the constructivist approach to the multiplicative compare problem, it derives from the pupils' activities, referring to measuring length by repeatedly applying a device to a measured object. Traditional methods used in the teaching of compare word problems (which is connected with characteristic phrases in tasks and verbal communication) are not very effective and develop only schematic thinking (in the negative sense of the word).

Słowa kluczowe: porównywanie różnicowe i ilorazowe, metody tradycyjne, konstruktywizm

Keywords: additive and multiplicative compare word problems, traditional method, constructivism

Wielu nauczycieli, bazując na własnych doświadczeniach, głosi od lat, że uczniowie mają specyficzne trudności przy rozwiązywaniu zadań na porównywanie różnicowe i ilorazowe oraz że zadania takie są dużo trudniejsze aniżeli np. zadania dynamiczne o tej samej w zasadzie strukturze matematycznej. Pogląd ten potwierdziło wielu badaczy. W pracach: Nesher, Greeno & Riley (1982), Kinitsch & Greeno (1985), Verschaffel (1994), Christou & Philippou (1998), Valentin & Chap Sam (2004) i innych powtarzają się sądy typu: *Zadania na porównywanie różnicowe i ilorazowe to jedne z najtrudniejszych zadań dla dzieci.* W Polsce na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych można było spotkać się z poglądem, że zadania na porównywanie różnicowe i ilorazowe nie są istotnie trudniejsze od zwykłych zadań jednodziałaniowych. Argumentowano, że jeżeli uczeń należycie rozumie odpowiednie działania, to z porównywaniem nie powinien mieć już kłopotów.

W rzeczywistości pogląd ów był zbyt powierzchowny. Wieloletnie doświadczenia nauczycieli pokazały, że porównywanie różnicowe i ilorazowe to bardzo trudne działy nauczania początkowego.

Źródła tych trudności mogą być dwojakiego rodzaju: trudności tkwiące inherentnie w naturze tych zadań oraz trudności wynikające z niewłaściwych metod nauczania.

1) Trudności tkwiące inherentnie w naturze tych zadań

Trudności inherentne polegają m.in. na tym, że sformułowania użyte w tych zadaniach są statyczne, a dostarczane uczniowi informacje mają charakter relacji. Podane są mianowicie pewne związki między występującymi w zadaniu liczbami kardynalnymi lub wielkościami, a uczeń ma z tego wywnioskować, jakie działania arytmetyczne należy wykonać, aby otrzymać wynik. Z danych psychologii rozwojowej wynika, że takie rozumowania są dla dzieci istotnie trudniejsze od zadań, w których coś się dzieje, coś się wykonuje i opisane zmiany mają naturalne przełożenie na działania arytmetyczne. Jest to szczególnie wyraźne w zadaniach wymagających odwracania działań. Gdy odwracanie da się sprowadzić do odwrócenia opisanych czynności (dokonanego w myśli lub w trakcie symulacji na konkretach), dziecko ma możliwość zrozumienia drogi rozwiązania. Jednak w przypadku zadań na porównywanie różnicowe i ilorazowe takiej możliwości nie ma; wnioskować trzeba wprost z werbalnie podanych, statycznych danych.

2) Trudności wynikające z niewłaściwych metod nauczania

Określenie „tradycyjna metodyka"[1] dobrze opisuje problem, choć ogólnie jest to termin nieostry, rozmaicie rozumiany (używany nieraz w znaczeniu pejoratywnym przez zwolenników reform). Doprecyzowuję ten termin, przyjmując, że metodyka tradycyjna to ta, którą można opisać na podstawie analizy wskazówek metodycznych zawartych w polskich publikacjach dydaktycznych ostatnich kilkudziesięciu lat oraz analizy podręczników dla uczniów z ostatnich kilkunastu lat. Wymienię pewne najważniejsze, charakterystyczne cechy tradycyjnego nauczania porównywania różnicowego i ilorazowego:

1. Jest to nauczanie podające, biorące jako punkt wyjścia jakieś zadanie pełniące rolę przykładu paradygmatycznego, czasem uzupełnione odpowiednim rysunkiem w podręczniku (lub bez żadnej takiej „podpórki"). Nauczyciel pokazuje, jak typowe zwroty typu „o 3 więcej" (bądź „3 razy więcej") należy przekształcić na odpowiednie działanie arytmetyczne i jak dochodzi się do wyniku i odpowiedzi.
2. Drugą cechą tego podejścia jest rozpoczynanie nauczania od addytywnych typów zawierających zwroty: „o tyle więcej", „o tyle mniej" (bądź od ich multipikatywnych odpowiedników), a następnie przechodzenie do zasadniczych typów porównywania, czyli zadań zakończonych pytaniem: „O ile więcej?", „O ile mniej?" (bądź odpowiednio „Ile razy więcej?", „Ile razy mniej?") przez formalne odwrócenie danych relacji i odpowiadających im działań arytmetycznych.
3. Trzecią cechą jest realizowanie nauczania w kilkugodzinnych blokach. Pewnego dnia nauczyciel rozpoczyna całkiem nowy dla uczniów temat: porównywanie różnicowe (lub ilorazowe) i przez kolejne zajęcia rozwiązuje z uczniami zadania jednodziałaniowe,

[1] Polska tradycja nauczania zadań dotyczących obu porównań ukształtowała się pod wpływem dwóch publikacji: Jeleńskiej (1960, I wydanie 1926) i Cydzik (1966).

zgodnie z narastającym stopniem trudności i dopiero po pewnym czasie wraca do pozostałych typów zadań na porównywanie[2].

4. Następnie opanowanie porównywania różnicowego i ilorazowego przebiega przez powtarzanie poznanych schematów na zadaniach z różnymi konkretami i liczbami. Ponieważ obiektywnie zagadnienia te nie są łatwe, a uczniowie nie mieli wystarczająco dużo doświadczeń pozaszkolnych, więc uczą się schematów. Często prowadzi to do szybkiego zapominania procedur i mieszania jednego typu porównywania z drugim.

Opis badań

Głównym celem prowadzonych przeze mnie badań było sprawdzenie następujących hipotez:

- Istotnym czynnikiem wpływającym na niezadowalające wyniki nauczania zadań na porównywanie różnicowe i ilorazowe jest niewłaściwa tradycyjna metodyka nauczania takich zadań.
- Można istotnie poprawić wyniki nauczania, odchodząc od tradycyjnej metodyki i zastępując ją metodyką opartą na podejściu konstruktywistycznym[3]. Należy położyć większy nacisk na aspekty semantyczne zadań, na konstruowanie znaczeń w umysłach uczniów, zmniejszając nacisk na aspekty syntaktyczne (jakkolwiek powinna być zachowana równowaga pomiędzy nimi).

W związku z tak postawionymi hipotezami, przeprowadziłam następujące badania:

1. Badanie opanowania porównywania różnicowego i ilorazowego przez uczniów rozpoczynających naukę w klasie IV (tradycyjnie nauczanych). Uczestniczyło w nich ok. 70 tys. uczniów, z czego ok. 800 prac pisemnych poddano szczególnej analizie (uczniowie pisali test zawierający dwa zadania na porównywanie różnicowe i ilorazowe; w badaniu użyto dwóch analogicznych wersji testu)[4].
2. Badanie uczniów rozpoczynających naukę w klasie I, dotyczące wprowadzenia w porównywanie różnicowe wprost z porównywania liczebności zbiorów na konkretach. Celem tego badania było sprawdzenie trafności konstruktywistycznego podejścia do nauczania porównywania różnicowego poprzez obserwowanie spontanicznych reakcji uczniów na dwa pytania: *Czego jest więcej?* oraz *O ile więcej?* w kontekście przedmiotów do manipulowania i przedmiotów przedstawionych na rysunku. W indywidualnych rozmowach uczestniczyło 23 uczniów jednej klasy pierwszej szkoły podstawowej[5].
3. Badanie uczniów kończących klasę II, dotyczące wprowadzania ucznia w porównywanie ilorazowe wprost z mieszczenia na konkretach. Celem tego badania było sprawdzenie

---

[2] Do reformy 2007 r. porównywanie różnicowe było tematem II klasy, powtarzanym i utrwalanym w III klasie, a potem dopiero przychodziło porównywanie ilorazowe; po obniżeniu wieku szkolnego to drugie porównywanie przeszło do podstawy dla klas IV–VI.

[3] Drogą jest odejście od tradycyjnej metodyki i zastąpienie jej metodyką opartą na podejściu konstruktywistycznym, wywodzącym się z epistemologii genetycznej Piageta i z prac Wygotskiego, opartym m.in. na publikacjach (Steffe 1996: 80), (Kieran 1998: 215), (Sfard 1998: 498).

[4] Szczegółowy opis i główne wyniki tych badań można znaleźć w: Mrożek 2010: 73-104; Mrożek (dawniej Drewczynska) 2009 oraz Mrożek 2010a.

[5] Badanie było prowadzone zanim uczniowie poznali w szkole w sposób usystematyzowany odejmowanie.

trafności konstruktywistycznego podejścia do porównywania ilorazowego poprzez obserwowanie spontanicznych reakcji uczniów na pytanie: *Ile razy więcej?* w kontekście przedmiotów do manipulowania i przedmiotów przedstawionych na rysunku. W indywidualnych rozmowach uczestniczyło 23 uczniów klasy drugiej szkoły podstawowej[6].

Badanie opanowania porównywania różnicowego i ilorazowego przez uczniów rozpoczynających naukę w klasie IV (tradycyjnie nauczanych) – wyniki

Badania uczniów na początku klasy IV (po systematycznej nauce rozwiązywania zadań jednodziałaniowych, dotyczących tych porównań) pozwoliły m.in. na ustalenie stopnia trudności tych zadań. Okazało się, że:

1) uczniowie dość zadowalająco opanowali typy zadań zawierające charakterystyczne zwroty: *o tyle więcej, o tyle mniej, tyle razy więcej, tyle razy mniej,*
2) natomiast najważniejsze dla porównywania ilorazowego zadania zakończone pytaniem: *O ile mniej? Ile razy więcej?* opanowali w stopniu zdecydowanie niezadowalającym.

Przeprowadzone przeze mnie badania pozwoliły również na ustalenie pewnych typów uczniowskich błędów, popełnianych podczas rozwiązywania zadań. Zdecydowana większość tych błędów wskazuje na schematyczne podejście ucznia do rozwiązania zadania. Ukazuję je poniżej wraz z przykładami.

- **Wpływ pierwszego zadania** – terminem tym określam zaobserwowany wpływ pierwszego zadania w serii na rozwiązanie przez uczniów kolejnych zadań (por. przykład 1.).

Przykład 1.

2. W miejscu kropek zapisz działanie i oblicz jego wynik.
Staś pomyślał sobie liczbę 24.

a) *Liczba 4 razy mniejsza od liczby Stasia to* 24 : 4 = 6
b) *Liczba o 8 większa od liczby Stasia to* 24 · 8 = 158
c) *Liczba 3 razy większa od liczby Stasia to* 24 · 3 = 72
d) *Liczba o 6 mniejsza od liczby Stasia to* 24 : 6 = 4

W powyżej reprodukowanym przykładowym rozwiązaniu zadania, w którym jako pierwszy pojawił się podpunkt wymagający podzielenia dwóch liczb, część uczniów w całym zadaniu używała tylko albo dzielenia (w podpunktach, w których mieli podać liczbę o 6 mniejszą oraz 4 razy mniejszą), albo tylko mnożenia (w podpunktach, w których należało podać liczbę o 8 większą oraz 3 razy większą); nie używali zaś w ogóle dodawania ani odejmowania.

- **Błędne użycie „zwrotów-kluczy”** – terminem tym określam zaobserwowane wyłapywanie przez uczniów charakterystycznych słów i natychmiastowe dobieranie do nich

[6] Badanie było prowadzone zanim uczniowie poznali w szkole w sposób usystematyzowany dzielenie.

działań. W czasie uzupełniających wywiadów zaobserwowałam, że uczniowie bardzo często korzystali ze „zwrotów-kluczy", tłumacząc rozwiązania: *skoro w treści zadania pojawiło się słowo dłuższa, to muszę pomnożyć albo dodać, (...) a gdyby było krótsza, to bym odjął albo podzielił, (...) gdy będzie razy, to pomnożę.*

- **Trudności z zapisywanie odpowiedzi** – terminem tym określam zjawisko, w którym zaobserwowałam trudności w sformułowaniu przez uczniów odpowiedzi. Wśród badanych zaobserwowano grupę uczniów, którzy zapisali poprawne działanie, jednak mieli trudność z zapisaniem poprawnej odpowiedzi najczęściej przy zadaniu na porównywanie ilorazowe. Zazwyczaj uczniowie jakby łączyli porównywanie różnicowe z ilorazowym w jedno, pisząc: *Reklama ciastek „Pyszne" była o 4 razy krótsza niż reklama ciastek „Wyborne"*, albo zapisywali odpowiedź typowo w języku porównywania różnicowego: *Reklama ciastek „Pyszne" była o 4 sekundy krótsza niż reklama ciastek „Wyborne".*

  Czasem uczniowie dodawali nowe słowa i obiekty, które nie pojawiły się w treści zadania (ceny, wagi, czas), przykładowo:

  Wyborne są ciastka 326 ciastek.
  Reklama kosztowała 96 złotych.
  Trwały proszek Super ma 34 lat.
  Ciastka pyszne były szybciej wypiekane o 22 sekundy.
  Proszek pierze 45 sekund mniej niż proszek ekstra.

Badania propedeutyki porównywania różnicowego i ilorazowego (z uwzględnieniem podejścia konstruktywistycznego) – wyniki

Wyniki dotyczące konstruktywistycznej propedeutyki nauczania porównywania różnicowego okazały się optymistyczne. Prawie wszyscy uczniowie (za wyjątkiem kilku, mających duże trudności w nauce) poradzili sobie w prostych sytuacjach z odpowiedzią na pytanie: *O ile więcej?*, pomimo że nie uczyli się tych zagadnień w szkole. Sugeruje to, że uczniowie rozpoczynający naukę w klasie I mają już pewną pozaszkolną wiedzę osobistą na ten temat. Badane zagadnienia wyraźnie znajdowały się w ich strefie aktualnego rozwoju i były dla nich stosunkowo łatwe.

Podczas analizy wyników badań wyróżniłam dwa główne typy argumentacji:

a) przeliczanie i porównywanie różnicowe otrzymanych liczb – uczniowie często nadwyżkę liczyli na palcach (doliczając po jeden) lub wymawiali kolejne liczebniki,
b) stosowanie przyporządkowania – tutaj nadwyżka rzucała się w oczy natychmiast po połączeniu elementów w pary.

Tradycyjna metoda wyznaczania nadwyżki, poprzez odejmowanie liczb z treści zadania, zaobserwowana została przeze mnie jedynie dopiero w trakcie uzupełniających badań, które dotyczyły wyłącznie porównywania różnicowego liczb oderwanych od konkretów.

W przypadku porównywania ilorazowego wyniki okazały się również dość optymistyczne, co wskazało, że jest to właściwa droga rozwojowa. Badani uczniowie doskonale poradzili sobie z zadaniami na porównywanie ilorazowe powiązane z mieszczeniem i wielokrotnym odkładaniem danej długości, natomiast nieco trudniejsze okazały się zadania dotyczące porównywania ilorazowego na liczebnościach zbiorów.

Podsumowanie

Tradycyjna metodyka przez stosowanie schematu paradygmatycznego w postaci trafnie dobranego przykładu zilustrowanego na rysunku naucza pewnego gotowego sposobu postępowania. Aebli przestrzega, że nauczyciel nie może ograniczyć się do wyczekiwania, aż umysł dziecka „uchwyci kopię" demonstrowanych przykładów paradygmatycznych, ale raczej ma sprawić, by uczeń *objął przedstawiane mu informacje własną aktywnością myślową* (Aebli 1982: 25). Podkreśla, że panuje przekonanie, iż zdobywanie wiedzy polega głównie na poznawaniu i dorzucaniu nowych elementów wiedzy do tych wcześniej znanych; zapomina się, że to właśnie *wzajemne stosunki*, jakie zachodzą pomiędzy podawanymi dziecku elementami wiedzy, określają i wyjaśniają pojęcia i operacje umysłowe. Aebli (1982: 32) pisze również: *(...) uczniowie w taki stopniu interesują się nauczaniem, w jakim umożliwia im ono rozwinięcie ich własnej aktywności. Uczniowie wykazują większe zainteresowanie danym problemem, kiedy mogą rozwiązać go sami, a nie tylko asystować przy jego rozwiązywaniu; kiedy mogą efektywnie oddziaływać na konkretne przedmioty.*

Na zagrożenia, jakie niesie ze sobą przedwcześnie wprowadzana symboliczna warstwa, zarówno pisanego, jak i mówionego języka matematyki, zwraca uwagę Turnau. Podkreśla *wielkie niebezpieczeństwo związane z nauczaniem posługiwania się każdą operatywną symboliką na każdym szczeblu nauczania* (Turnau 1990: 61).

Mechanizm pojawienia się formalizmu w nauczaniu opisuje Hejn'y (1997: 15-28). Pojawia się on wtedy, gdy gotowe fragmenty wiedzy przenikają do pamięci ucznia bezpośrednio z głowy nauczyciela jako ukształtowany produkt końcowy. Hejn'y wymienia trzy symptomy formalizmu u ucznia. Mianowicie, gdy:

- sprowadza się do izolowanych faktów zachowanych w pamięci; jeżeli pamięć zawiedzie, to uczeń nie ma możliwości odtworzenia brakującej części wiedzy;
- nie jest związana z otaczającym realnym światem, nie jest różnicowana przez uczniowskie doświadczenia, gdy uczeń nie jest w stanie zilustrować jej na przykładach z otoczenia, w którym żyje;
- jest rozumiana jako odpowiedź na pytanie: *Jak?,* a nie odpowiada na pytania: *Co?* ani *Dlaczego?*

Dla dzieci posiadających jedynie wiedzę formalną (nazywaną też wiedzą bezmyślną lub werbalną) szkolne liczenie może być zredukowane do zapamiętania pewnych faktów i zasad. Wówczas nowy fragment wiedzy nie połączy się z tym, co dziecko poznało już wcześniej, a rozwiązywanie zadań stanie się dobieraniem często przypadkowych działań matematycznych[7].

W centrum zainteresowania szkolnego nauczania matematyki często jest jedynie myślenie symboliczne ucznia. Kalinowska (2010: 21) zaznacza, że jest to istotnie wysoki poziom rozwoju myślenia, który jednocześnie zależy od jego wcześniejszych etapów; mianowicie uczniowie, którzy obecnie posiadają ukształtowane pojęcie liczby, wcześniej musieli doświadczać przeliczania, manipulowania, sprawdzania, kto ma więcej. Bez takich

[7] Takie bezmyślne stosowanie przez uczniów wiedzy formalnej, co prawda w zadaniach nietypowych, opisuje Dąbrowski (2013: 57-60).

wieloletnich prób nie byłoby możliwe wykształcenie myślenia abstrakcyjnego. Uczniowie powinni mieć zatem *nie tylko możliwość manipulowania konkretami, ale uczyć się, że jest to niezbędny proces w rozwijaniu myślenia* (Kalinowska 2010: 23).

Wielu autorów, między innymi Semadeni (2012), podkreśla szkodliwy wpływ nadmiernie podającego nauczania, nastawionego na opanowanie techniki wykonywania pewnych obliczeń i rozwiązywania pewnych typów zadań w schematyczny sposób. Negatywne efekty ujawniają się przy zadaniach, w których należy wyjść poza poznane schematy postępowania. Pojęć matematycznych nie da się wytłumaczyć dziecku przez objaśnienie nawet na przykładach. Pojęcia muszą konstruować się w umyśle dziecka w długim procesie przejścia z czynności wykonywanych na konkretach do czynności wykonywanych w umyśle. Niezbędne jest tutaj, aby dziecko czynności te wykonywało w pełni świadomie, zastanawiało się nad ich sensem. Istotnym elementem takiego uczenia się jest pojawienie się konfliktu poznawczego, dzięki któremu w nowej sytuacji zadaniowej uczeń sam zauważy, że dotychczasowy schemat nie działa, ma motywację do jego zmiany, stworzenia nowego i nadbudowania go z posiadaną już wcześniej wiedzą. Takie procesy najczęściej ujawniają się w naturalnym uczeniu się, przy nabywaniu wiedzy potocznej. Nauczanie podające może blokować naturalne procesy poznawcze. **Najpierw uczeń powinien zrozumieć** (na poziomie ustnym w języku zbliżonym do potocznego) **sens danego pojęcia czy działania, a dopiero na tym można opierać odpowiedni zapis symboliczny.**

Wygotski podkreślił znaczenie słów w procesie kształtowania pojęć. W przypadku tej pracy chodzi o terminy takie jak „o 3 więcej", „3 razy mniej" i podobne, które powinny pełnić rolę narzędzi w procesie uczenia się arytmetyki. Znaczenie tych słów powinno być konstruowane w umyśle ucznia.

Pomocne może okazać się tutaj stosowanie metody naturalnej oraz symulacyjnej (Dąbrowski 2007: 88-90). W szczególności wartościowe okazuje się uczenie dzieci obrazowania sytuacji przedstawionej w zadaniu matematycznym. To nie nauczyciel na tablicy[8], ale dziecko w swoim zeszycie powinno przedstawiać w swoim rozwiązaniu relacje zawarte w zadaniu, aczkolwiek należy pamiętać, że zwłaszcza na początku rozwiązywanie zadań tekstowych powinno być powiązane z aktywnością manipulacyjną ucznia. Dziecko powinno dokładać, zabierać, zsuwać, dzielić dane przedmioty (lub ich elementy zastępcze: żetony, klocki, itp.).

Konstruowanie w umyśle ucznia sensu zadania, kształtowanie umiejętności wchodzenia w głąb sytuacji zadaniowej jest trudne i pracochłonne. Wprowadzanie danego materiału w sposób formalny zajmuje wprawdzie mniej czasu i jest mniej absorbujące zarówno dla ucznia, jak i dla nauczyciela oraz autora zadań, jednak wiedza taka nie jest ugruntowana na intuicji i może przynosić pozytywne efekty jedynie w typowych sytuacjach.

Literatura:

Aebli H. (1982), *Dydaktyka psychologiczna.* Warszawa, PWN.
Christou C., Philippou G. (1998), *The Developmental Nature of Ability to Solve One-Step Word*

[8] Dla dziecka często rysunek na tablicy nie jest czytelny. Przykładowo, rozważmy zadanie: *Jaś ma 5 jabłek, a Kasia ma o 3 jabłka więcej. Ile jabłek ma Kasia?* Jeśli nauczyciel narysuje w jednym rzędzie jabłka Jasia, a w drugim jabłka Kasi, to na tablicy znajdzie się 13 jabłek. Taki rysunek może być mylący dla ucznia.

Problems. “Journal for Research in Mathematics Education”, 29(4).
Cydzik Z. (1966), *Metodyka nauczania początkowego*. Część II. Matematyka, Warszawa, PZWS.
Dąbrowski M. (2007), *Pozwólmy dzieciom myśleć! O umiejętnościach polskich trzecioklasistów*. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.
Dąbrowski M. (2013), *(Za) trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.
Hejn'y M. (1997), *Rozwój wiedzy matematycznej*, „Dydaktyka Matematyki”, 19.
Jeleńska L. (1960), *Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania*. Wyd. IV, Warszawa, PZWS.
Kalinowska A. (2010), *Pozwólmy dzieciom działać - mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego*. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.
Kieran C. (1998), *Models in mathematics education research: a broader view of research results*. W: A. Sierpińska, J. Kilpatrick (red.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Kluwer Academic Publishers.
Kinitsch W., Greeno J.G. (1985), *Understanding and solving word arithmetic problems*. “Psychological Review”, 92 (1).
Mrożek E. (Drewczynska E.) (2009), *Ile razy więcej?*. „Matematyka w Szkole”, 48.
Mrożek E. (2010a), *O porównywaniu*. „Matematyka w Szkole”, 53.
Mrożek E. (2010), *Task variables in compare word problems*. “Didactica Mathematicae”, 33.
Nesher P., Greeno J.G., Riley M. S. (1982), *The development of semantic categories for addition and subtraction*. “Educational Study in Mathematics”, 13.
Semadeni Z. (2012), *Matematyka w edukacji początkowej jako fundament całej matematyki szkolnej*. “Nauczanie Początkowe”.
Sfard A. (1998), *The many faces of mathematics: do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing*. W: A. Sierpińska, J. Kilpatrick (red.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Kluwer Academic Publishers.
Steffe L. P. (1996), *Social-cultural approaches in early childhood mathematics education: a discussion*. W: H. Mansfield et al. (red.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children. International Perspectives on Curriculum*. Kluwer Academic Publishers.
Turnau S. (1990), *Wykłady o nauczaniu matematyki*. Warszawa, PWN.
Valentin J. D., Chap Sam L. (2004), *Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils ability to identify the correct operation*. “International Journal for Mathematics Teaching and Learning”.
Verschaffel L. (1994), *Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems*. “Journal for Research in Mathematics Education”, 25.