

Mie Lubański

Zbiory i klasy

Studia Philosophiae Christianae 7/2, 131-150

1971

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez **Muzeum Historii Polski** w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MIECZYŚLAW LUBAŃSKI

ZBIORY I KLASY

1. Teoria mnogości. 2. Antynomie teorii mnogości. 3. Teoria typów.
4. Aksjomatyka teorii mnogości. 5. Pojęcie klasy. 6. Elementarna algebra
klas. 7. Pojęcie zbioru. 8. Uwagi.

1. Teoria mnogości

N. Bourbaki jest zdania, że matematycy oraz filozofowie wszystkich stuleci zawsze posługiwali się, chociaż nie koniecz-
nie w sposób wyraźny oraz świadomy, pojęciami i twierdze-
niami z zakresu teorii mnogości¹.

Można to zobaczyć już u matematyków babilońskich, którzy
poszukiwali rozwiązań całkowitych równania $x^2 + y^2 = z^2$. Roz-
wiązań tych jest nieskończenie wiele i dziś zwiemy je trójka-
mi pitagorejskimi². Dalej wypada wymienić Euklidesa i jego
powszechnie znane twierdzenie, głoszące, że do każdego skoń-
czonego układu liczb pierwszych można zawsze dobrać liczbę
pierwszą różną od ich wszystkich; mówiąc więc innymi słowy
liczb pierwszych jest nieskończenie wiele³. Znane są także

¹ Zob. N. Bourbaki, Teoriya mnożestw, Moskwa 1965, 325 oraz tegoż
autora Oczerki po istorii matematiki, Moskwa 1963, 37.

² Por. np. A. Aaboe, Matematyka w starożytności, Warszawa 1968,
35–36.

³ Zob. np. W. Sierpiński, Arytmetyka teoretyczna, Warszawa 1968⁴,
86–87.

powszechnie rozważania Arystotelesa poświęcone nieskończoności ⁴.

Spśród myślicieli późniejszych, których rozważania zawierają różne powiązania z problematyką mnogościową, wymienimy, jedynie przykładowo, następujących: Diofantos — otrzymał m. in. rozwiązanie tzw. równania Pella; rozwiązań tych jest nieskończenie wiele; Pappus — wiedział, że komórka plastru pszczelego posiada własności ekstremalne; Brahmagupta — pierwszy otrzymał ogólne rozwiązanie równania nieoznaczonego $ax + by = c$, gdzie a , b , c są liczbami całkowitymi; Al-Chwarizmi — jego książka „Hisab al-dżabr ua-l-mukabala” zawiera m. in. dyskusję równań liniowych oraz kwadratowych; Fibonacciego — od niego pochodzi tzw. ciąg Fibonacciego ⁵.

U Galileusza spotykamy się z „obroną” istnienia nieskończoności aktualnej, w przeciwieństwie do koncepcji Arystotelesa. Galileusz wiedział, że można ustalić odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między liczbami naturalnymi oraz ich kwadratami ⁶. Twórcy rachunku różniczkowego oraz całkowego, Newton i Leibniz, wyrażnie intuicyjnie przyjmowali wiele pojęć oraz twierdzeń typu mnogościowego. Zarazem w pracach Leibniza można widzieć początki elementarnej algebry zbiorów. Była ona dalej rozbudowywana m. in. przez Eulera, Boole’a, Schroedera ⁷.

Ten, niesłychanie skrótowy, „przekrój” myśli ludzkiej wskazuje, że problematyka teorii mnogości już od starożytności stanowiła nieodłączną część wiedzy ludzkiej, chociaż dopiero z początkiem ostatniej ćwierci XIX wieku otrzymała swoją pierwszą kodyfikację w pracach G. Cantora publikowanych od

⁴ Por. Arystoteles, *Fizyka*, BKF, 1968. Księga IV jest poświęcona rozważaniom dotyczącym się pojęcia ruchu oraz pojęcia nieskończoności. Czytamy tam m. i. „A zatem nieskończonym nazwiemy zbiór taki, do którego można ciągle dobierać z zewnątrz jakiś nowy element” (s. 89).

⁵ Zob. np. D. J. Struik, *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*, Warszawa 1963 ², 83, 84, 93, 97—98, 113—114.

⁶ Zob. np. tamże, 140—142.

⁷ Por. np. R. Suszko, *Wykłady z logiki formalnej, Część I*, Warszawa 1965, 52.

roku 1871. Właśnie w roku 1883 ukazała się praca Cantora pt. „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre”, która może być uważana za pierwszą pozycję w literaturze światowej poświęconą w pełni nowemu działowi matematyki — teorii mnogości⁸. Trzeba jednak zaznaczyć, że Cantor posługiwał się niesprecyzowanym, intuicyjnym pojęciem zbioru. „Określał” on zbiór następująco: zbiór jest to złączenie w jedną całość różnych przedmiotów, które odróżnia nasza intuicja lub myśl⁹.

Z chwilą powstania teorii mnogości daje się zauważyć różne ustosunkowanie się do niej matematyków. Jedni przyjmują ją bez zastrzeżeń, drudzy — są jej przeciwni¹⁰. Jest jednak faktem niewątpliwym, że teoria mnogości przyczyniła się do ugruntowania pojęć rachunku różniczkowego oraz całkowego. Tego są obecnie świadomi wszyscy matematycy¹¹. Toteż dziś nie tylko nikt nie poddaje w wątpliwość wartości teorii mnogości oraz coraz powszechniejszej stosowalności metod teorii mnogościowych w matematyce, lecz pewne wybrane jej elementy wchodzą już do programów szkoły średniej¹². Truizmem jest dziś powiedzieć, że matematyka współczesna bez metod mnogościowych byłaby nie do pomyślenia.

W teorii mnogości, mówiąc bardzo ogólnie, można wyróżnić trzy podstawowe zakresy zagadnień, mianowicie: algebrę zbiorów, teorię liczb kardynalnych oraz teorię liczb porządkowych. Do tego można jeszcze dodać problematykę metateoretyczną, która ściśle biorąc, nie należy do teorii mnogości, lecz do metodologii teorii mnogości. Podstawowym pojęciem teorii mnogości jest pojęcie zbioru. Jak już było wspomniane Cantor

⁸ Por. D. J. Struik, op. cit., 250—252.

⁹ Zob. G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin 1932, 282.

¹⁰ Por. np. K. Kuratowski i A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa 1966², 8.

¹¹ Por. np. C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, Warszawa 1964, 29—30.

¹² Por. *Nowe podręczniki w szkołach średnich*, *Wiadomości Matematyczne*, 11 (1969—1970), 252—307.

ujmował je intuicyjnie. Rozwój teorii mnogości wykazał, że intuicje łączone z pojęciem zbioru nie są wcale jasne i jednoznaczne. Różni matematycy wiążą różne intuicje z pojęciem zbioru. Ujawniło to się z chwilą pojawienia się w teorii mnogości tzw. antynomii¹³. Mówimy, że ma miejsce antynomia, gdy posiadamy dowód dwu wyrażen ze sobą sprzecznych¹⁴. Oprócz antynomii teoriomnogościowych, zwanych także logicznymi, znane są także tzw. antynomie semantyczne. Nas interesują w tym artykule antynomie teoriomnogościowe. To też przedstawimy bardzo zwięźle kilka najprostszych antynomii.

2. Antynomie teorii mnogości

Pierwszą chronologicznie antynomią teorii mnogości jest antynomia zbioru wszystkich liczb porządkowych. G. Cantor znalazł ją już w roku 1895. Opublikował ją jednak pierwszy C. Burali-Forti w roku 1897¹⁵. Obecnie znana jest pod jego nazwiskiem. Można ją przedstawić w sposób następujący.

Niech P oznacza zbiór wszystkich liczb porządkowych. Wiadomo, że każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany przy pomocy relacji mniejszości, zachodzącej między liczbami porządkowymi. Z drugiej strony, wiadomo także, że żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny do swego odcinka właściwego. Stosując pierwsze z wymienionych twierdzeń zbioru P , wnioskujemy, że zbiór P jest dobrze uporządkowany przy pomocy relacji mniejszości. A zatem jego typ porządkowy jest pewną liczbą porządkową. Liczba ta, z racji definicji P , posiadałaby tę własność, że odpowiadający jej zbiór byłby podobny do swej części właściwej. Przeto pojęcie zbioru

¹³ Por. np. K. Kuratowski i A. Mostowski, op. cit., 8.

¹⁴ Por. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1968², 259 oraz L. Borkowski, *Logika formalna*, Warszawa 1970, 285.

¹⁵ C. Burali-Forti, *Una questione sui numeri transfiniti*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 154—164.

wszystkich liczb porządkowych prowadzi do sprzeczności z drugim z wymienionych twierdzeń.

Jako drugą antynomię wymienimy tzw. antynomię zbioru wszystkich zbiorów. G. Cantor znał ją już w roku 1899.

Niech Z oznacza zbiór wszystkich zbiorów. Oznaczmy przez 2^Z zbiór wszystkich jego podzbiorów. Z definicji zbioru Z byłoby: $2^Z \in Z$. A więc, konsekwentnie, liczba kardynalna zbioru 2^Z byłaby nie większa od liczby kardynalnej zbioru Z . Jednakże, z ogólnego twierdzenia teorii liczb kardynalnych, wiadomo, iż liczba kardynalna zbioru 2^Z jest większa od liczby kardynalnej zbioru Z . Otrzymuje się więc sprzeczność.

W podobny sposób można sformułować antynomię zbioru wszystkich liczb kardynalnych. Niech mianowicie K oznacza zbiór wszystkich liczb kardynalnych. Wiadomo, że dla każdego zbioru liczb kardynalnych istnieje liczba kardynalna większa od każdej liczby danego zbioru. Przeto i dla zbioru K istnieje liczba kardynalna większa od każdej liczby tego zbioru. Z definicji zbioru K wynika jednak, że wspomniana liczba kardynalna jest większa od siebie samej. To jest jednak niemożliwe.

Wspomnijmy jeszcze o tzw. antynomii Russella. Odkrył ją B. Russell w roku 1902 analizując antynomię zbioru wszystkich zbiorów. Antynomię Russella można przedstawić następująco.

Niech A oznacza zbiór złożony z wszystkich takich zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Przeto jakiś zbiór B jest elementem zbioru A wówczas i tylko, gdy B nie jest elementem B . Symbolicznie zapiszemy to:

$$B \in A \equiv B \notin B$$

Jeżeli w powyższym wzorze w miejsce B podstawimy A , to otrzymamy postać następującą:

$$A \in A \equiv A \notin A$$

To zaś natychmiast daje sprzeczność.

Innymi słowy daje się powyższa antynomia tak ująć. Zapytajmy, czy A jest elementem A . Jeżeli A jest swoim elementem, to w myśl definicji zbioru A , nie jest swoim elementem. Jeżeli zaś A nie jest swoim elementem, to znowu zgodnie z de-

finicją zbioru A , A jest swoim elementem. W ten sposób powstaje sprzeczność.

Jest zrozumiałe, że pojawienie się antynomii teorii mnogości spowodowało kryzys tego działu matematyki. Budowanie teorii mnogości na bazie intuicyjnego pojęcia zbioru nie jest możliwe do przeprowadzenia. Można poprzestać na intuicyjnym pojęciu zbioru przy zagadnieniach elementarnych z teorii mnogości. Natomiast przy problematyce bardziej subtelnej intuicja nas zawodzi. I stajemy wobec antynomii¹⁶. Powstaje więc pytanie, w jaki sposób można ustrzec się w teorii mnogości antynomii? W tym celu należy, po prostu, sprecyzować zarówno pojęcie zbioru, jak i pojęcie przynależności elementu do zbioru. Nie-sprecyzowane bowiem pojęcia powyższe posiadają charakter antynomialny. Wspomnianą precyzję terminów teorii mnogości można przeprowadzić na wiele sposobów. Historycznie rzecz biorąc, pierwsze dwa sposoby dokonania interesującej nas precyzji, które konsekwentnie eliminowały pojawianie się w teorii mnogości antynomii, pochodzą od B. Russella oraz E. Zermelo. Przyjrzyjmy się teraz krótko wspomnianym propozycjom.

3. Teoria typów

B. Russell zaproponował, aby tworzyć zbiory nie w sposób dowolny, lecz przestrzegając pewnej prostej zasady. Wówczas będziemy zabezpieczeni przed pojawianiem się antynomii.

Przyjmuje on podział wszelkich przedmiotów na tzw. typy logiczne. Są nimi: indywidua (tj. przedmioty nie będące zbiorami), zbiory indywiduów, rodziny zbiorów indywiduów itd. Najniższy typ posiadają indywidua. Elementami zbioru jakiegoś typu mogą być jedynie przedmioty typu o jeden niższego. Chodzi tu o zachowanie jednorodności typu logicznego. Zarazem uważa się za bezsensowne (ale nie fałszywe) powiedzenie, że zbiór jest elementem siebie samego, względnie, iż zbiór nie jest elementem siebie samego¹⁷.

¹⁶ Por. K. Kuratowski i A. Mostowski, op. cit., 8.

¹⁷ Pcr. E. Russell, Wstęp do filozofii matematyki, Warszawa 1963, 271.

W tak skonstruowanym systemie nie pojawia się żadna z antynomii teorii mnogości. Jest widoczne, że antynomia Russella nie może powstać z powodu uznania za bezsensowne tego rodzaju wyrażen, które są potrzebne do jej sformułowania. W teorii typów nie można także zdefiniować zbiorów „uniwersalnych”, w rodzaju zbioru wszystkich zbiorów, bądź zbioru wszystkich liczb kardynalnych, czy też zbioru wszystkich liczb porządkowych. Przez to samo wykluczamy odpowiednie antynomie związane z powyższymi pojęciami. Na gruncie teorii typów logicznych można wprawdzie zdefiniować zbiór wszystkich zbiorów pewnego typu. Jednakże pojęcie to nie prowadzi do sprzeczności. Z tych też względów teoria typów może stanowić pewnego rodzaju rozwiązanie kryzysu teorii mnogości.

Należy jednak wspomnieć o niedogodnościach, które implikuje teoria typów logicznych. Są one co najmniej dwojakiego rodzaju. Niedogodność pierwszego rodzaju polega na tzw. systematycznej wieloznaczności pojęć teorii mnogości. A więc np. w miejsce jednego zbioru pustego mamy tu do czynienia z nieskończeniem wieloma zbiorami pustymi odpowiadającymi różnym typom logicznym. Podobnie także w miejsce jednej relacji inkluzji między zbiorami, ma się tu do czynienia z nieskończeniem wieloma relacjami inkluzji dla różnych typów logicznych. Sytuacja tego rodzaju jest intuicyjnie dziwna. Niedogodność drugiego rodzaju polega na niemożności rozważania i budowania zbiorów „mieszanych”. Chodzi tu o zbiory, których elementami są przedmioty różnych typów logicznych, nie zaś jednego, tego samego typu. Ta niedogodność jest, z punktu widzenia praktyki matematycznej, dużą wadą teorii typów. Zawęża bowiem dość arbitralnie zakres tworów matematycznych. Praktyka naukowa wykazuje, że w różnych działach matematyki ma się do czynienia z pojęciami, w których nie jest zachowana zasada czystości typów. Ten fakt powoduje, że propozycja Russella nie może być uznana za zadowalającą.

W artykule wspomniano jedynie o istocie teorii typów. Dla lepszego zapoznania się z samą teorią można skorzystać np. z pozycji wymienionych w odnośniku 14.

4. Aksjomatyka teorii mnogości

E. Zermelo zaproponował, dla przezwyciężenia kryzysu spowodowanego pojawieniem się w teorii mnogości antynomii, zaksjomatyzowanie tej teorii. W roku 1904 podał układ aksjomatów dla teorii mnogości¹⁸. Pojęciami pierwotnymi są pojęcie zbioru oraz pojęcie przynależności elementu do zbioru. Aksjomaty natomiast mogą być przedstawione następująco:

A. 1. Zbiory, które zawierają te same przedmioty jako elementy, są identyczne.

A. 2. Dla każdego dwu przedmiotów istnieje zbiór, który zawiera dokładnie te dwa przedmioty jako elementy.

A. 3. Jeżeli X jest zbiorem, to suma wszystkich zbiorów należących do X jest też zbiorem.

A. 4. Dla każdego zbioru X istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru X .

A. 5. Istnieje co najmniej jeden zbiór nieskończony.

A. 6. Niech $f/x, y/$ będzie jakimś warunkiem, który jest zapisany przy pomocy pojęć pierwotnych logiki oraz teorii mnogości. Jeżeli dla każdego x istnieje dokładnie jedno $y=y/x/$, które razem z x spełnia ten warunek, to dla każdego zbioru X istnieje zbiór Y , którego wszystkie elementy są postaci $y/x/$, gdzie x przebiega elementy zbioru X .

A. 7. Dla każdej rodziny zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje zbiór, który z każdym ze zbiorów tej rodziny posiada jeden i tylko jeden element wspólny¹⁹.

Aksjomat A. 1. bywa nazywany aksjomatem jednoznaczności, aksjomat A. 2. — aksjomatem pary, aksjomat A. 3. — aksjomatem sumy, aksjomat A. 4. — aksjomatem zbioru potęgowego, aksjomat A. 5. — aksjomatem istnienia, aksjomat

¹⁸ Por. K. Kuratowski i A. Mostowski, op. cit., 9 oraz E. Zermelo, Untersuchungen über die Axiome der Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, 65 (1908), 261—281.

¹⁹ Zob. A. Mostowski, Niesprzeczność i niezależność hipotezy continuum, *Wiadomości Matematyczne*, 10 (1967—1968), 177—178 oraz H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, Warszawa 1968, 24, 27—28.

A. 6. — aksjomatem podzbiorów oraz aksjomat A. 7. — aksjomatem wyboru.

Gdy chodzi o aksjomat siódmy, to nie jest on przyjmowany przez wszystkich matematyków bez zastrzeżeń. Np. E. Borel oraz H. Lebesgue uważają, że dowody przeprowadzane przy pomocy aksjomatu wyboru posiadają odmienną wartość poznawczą od dowodów twierdzeń teorii mnogości, których się dowodzi bez odwołania się do powyższego aksjomatu. Natomiast zaś F. Hausdorff i A. A. Fraenkel przyjmują wspomniany aksjomat bez żadnych zastrzeżeń, uważając go za tak samo oczywisty, jak pozostałe aksjomaty teorii mnogości²⁰.

Od roku 1963 wiadomo jest, że aksjomat A. 7. jest niezależny od pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Piękny ten wynik został uzyskany przez P. J. Cohena²¹. Konsekwencją tego jest zaistnienie w teorii mnogości sytuacji analogicznej do tej, z jaką mamy do czynienia w geometrii. Niezależność aksjomatu o równoległych od pozostałych aksjomatów geometrii pozwala zbudować systemy geometrii, w których zachodzi jego negacja. W ten sposób oprócz geometrii euklidesowej powstają systemy geometrii nieeuklidesowej. Podobnie można oczekiwać powstania niecantorowskiej teorii mnogości, tj. teorii mnogości, w której nie będzie obowiązywał aksjomat wyboru.

Oprócz aksjomatyki teorii mnogości typu Zermelo-Fraenkla istnieje także inna aksjomatyka pochodząca od J. von Neumanna, K. Goedla i P. Bernaysa. Krótko bywa ona nazywana aksjomatyką typu Goedla-Bernaysa. W tej aksjomatyce pojęciami pierwotnymi są „klasa”, „zbiór” i „przynależność elementu (do klasy względnie do zbioru)”. A zatem odróżnia się pojęcie klasy od pojęcia zbioru. Pojęcie klasy jest pojęciem szerszym od pojęcia zbioru. Istnieją inne jeszcze aksjomatyki teorii mnogości. Liczba ich jest duża. Każda z nich posiada swoje specyficzne cechy, a więc zalety i wady patrząc na nie z punktu widzenia

²⁰ Por. np. K. Kuratowski i A. Mostowski, op. cit., 59.

²¹ P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 50 (1963), 1143—1148, 51 (1964), 105—110.

praktyki matematycznej. Do dziś aksjomatyka teorii mnogości nie znalazła jeszcze dla siebie najdoskonalszej postaci²².

Jeżeli przyjrzymy się obiegowemu ujęciu teorii mnogości, to spostrzeżemy bez trudu, że terminów „klasa” oraz „zbiór” używa się zamiennie. Liczne podręczniki teorii mnogości, względnie te rozdziały obszerniejszych prac, które podają wykład teorii mnogości, tak właśnie postępują²³. Znalazło to wyraz w artykule zatytułowanym „Zbiór” w „Małej Encyklopedii Logiki”²⁴. Tego rodzaju sytuacja była rzeczywiście powszechna. I to jeszcze stosunkowo bardzo niedawno. Jednakże obecnie coraz powszechniejsze staje się stanowisko, które wyraźnie odróżnia klasy od zbiorów. Należy podkreślić, że zostało to spowodowane nie przez jakieś racje abstrakcyjne, teoretyczne, lecz przez potrzebę praktyki naukowej. Mianowicie z chwilą powstania matematycznej teorii kategorii stało się jasne, że konieczne jest odróżniać klasy od zbiorów. Pojęcie kategorii nie mieści się w tradycyjnym schemacie teorii mnogości. Kategoria jest klasą. Nie jest zaś, na ogół, zbiorem. Jeżeli kategoria jest zbiorem, to nazywa się małą kategorią²⁵. Tego rodzaju sytuacja stawia więc postulat ogólniejszego ujmowania teorii zbiorów, niż to się czyniło dotychczas. Właściwą rzeczą wydaje się ujęcie wspomnianej teorii w terminach „klasa” i „przynależność elementu do klasy”. Z tych więc względów przedstawiony zostanie elementarny zarys algebry klas. Wykład nie będzie sformalizowany, a jedynie aksjomatyczny. Rozpocniemy od wyjaśnienia pojęcia klasy.

²² Por. K. Kuratowski i A. Mostowski, op. cit., 63.

²³ Zob. np. K. Borsuk, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, Warszawa 1964², 18, J. L. Kelley, *Obszcząja topologija*, Moskwa 1968, 13, R. Suszko, *Wykłady z logiki formalnej, Część I*, Warszawa 1965, 53, W. A. Pogorzelski, J. Słupecki, *O dowodzie matematycznym*, Warszawa 1962, 4, R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, Warszawa 1967³, 147 itd.

²⁴ *Mała Encyklopedia Logiki*, Wrocław—Warszawa—Kraków 1970, 363.

²⁵ Zob. np. S. MacLane, *Gomologija*, Moskwa 1966, 41.

5. Pojęcie klasy

Mówiąc intuicyjnie, klasą nazywa się dowolny zespół jakichkolwiek przedmiotów. Albo inaczej: klasa to zespół tych przedmiotów, które spełniają pewien warunek.

Z formalnego punktu widzenia klasy są to takie obiekty, dla których została określona relacja przynależności. A więc jeżeli $A, B, C, \dots$ są klasami, to ma miejsce bądź relacja $A \in B$, bądź relacja $A \notin B$. Relację $A \in B$ czytamy: A jest elementem B . Relacja $A \notin B$ jest negacją relacji $A \in B$.

Przyjęło się klasy oznaczać dużymi literami, natomiast klasy, które w rozważanym kontekście są elementami innej klasy — małymi literami. Przeto klasa jest wyznaczona przez swoje elementy. Zwykle klasę utworzoną przez elementy $a, b, c, \dots$ oznacza się przez umieszczenie wspomnianych elementów w nawiasie klamrowym. Jeżeli rozważaną klasę oznaczmy przez K , to można napisać:

$$K = \{a, b, c, \dots\}$$

Niech K oraz L będą danymi dwoma klasami. Mówimy, że klasy te są identyczne (lub równe), co zapisujemy $K = L$, jeżeli składają się one z tych samych elementów. Zatem dane elementy wyznaczają jednoznacznie klasę. Jeżeli klasy K oraz L nie są identyczne, to zapisujemy $K \neq L$. W tym przypadku co najmniej jedna z wymienionych klas zawiera przynajmniej jeden element taki, który nie jest elementem drugiej klasy.

Z powiedzianego widać, że klasa nie zależy od porządku, w jakim są wymieniane jej elementy oraz od ich kilkakrotne- go powtarzania. Mają więc miejsce następujące identyczności:

$$\{1, 2, 5\} = \{2, 1, 5\} = \{5, 1, 2\} \text{ itd.}$$

$$\{1, 2, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 2, 1, 6\} \text{ itd.}$$

Przyjmuje się następujący aksjomat:

(1) Jeżeli klasy K oraz L są identyczne, tj. $K = L$, zaś $W(X)$ jest jakimś warunkiem odnoszącym się do klas, to warunek $W(K)$ jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwy jest warunek $W(L)$.

Oprócz stałej „ ϵ ” potrzebna będzie jeszcze jedna stała, którą oznaczać się będzie następująco: $\{... : ...\}$. Nazywa się ją klasyfikatorem. Czyta się natomiast tak: klasa wszystkich tych ..., które spełniają warunek

Przyjmuje się następujący drugi aksjomat:

(2) Jeżeli $W(X)$ jest pewnym warunkiem odnoszącym się do klas, to istnieje klasa, której elementami są te i tylko te X , dla których $W(X)$ jest prawdziwe.

Klasę tę oznacza się następująco: $\{X : W(X)\}$.

Mamy przeto równoważność:

$K \in \{X : W(X)\} \equiv W(K)$ jest prawdziwe.

Aksjomat (2) pozwala nam tworzyć nowe klasy. Przy jego pomocy można zbudować elementarną algebrę klas. Tym też teraz się zajmiemy ²⁶.

6. Elementarna algebra klas

Określa się najpierw (korzystając z aksjomatu (2)) dwie specjalne klasy, mianowicie klasę pustą oraz klasę pełną. Klasę pustą oznacza się symbolem $\emptyset$, zaś klasę pełną literą T . Określa się je następująco:

$$\emptyset = \{X: X \neq X\}, \quad T = \{X: X = X\}.$$

Niech K oraz L będą danymi dwoma klasami. Klasa K nazywa się podklasą klasy L (względnie częścią klasy L , względnie klasa L nazywa się nadklasą klasy K), co się zapisuje $K \subseteq L$, gdy spełniony jest warunek: jeżeli $X \in K$, to $X \in L$.

Zachodzi więc wzór:

$$K \subseteq L \equiv \bigwedge_x (X \in K \rightarrow X \in L)$$

²⁶ Por. wykład pojęcia klasy zawarty w pracach: P. M. Cohn, Uniwersalna algebra, Moskwa 1968; J. L. Kelley, Obszczaja topologija, Moskwa 1968, dobawlenije.

Jeżeli $K \subseteq L$ oraz $K \neq L$, to klasa K nazywa się częścią właściwą klasy L (względnie podklasą właściwą klasy L). Nottujemy to w sposób następujący: $K \subset L$.

Niech K będzie daną klasą. Klasę wszystkich jej podklas nazywa się buleanem klasy K i oznacza przez $B(K)$.

Jest więc:

$$B(K) = \{X: X \subseteq K\}.$$

Jeżeli klasa K zawiera n elementów, to jej bulean jest klasą o 2^n elementach.

Twierdzenie to jest prawdziwe dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Dowodzi się je łatwo przy pomocy indukcji matematycznej.

Niech K oraz L będą danymi dwoma klasami. Parę oraz parę uporządkowaną złożoną z K i L określa się następująco:

$$\{K, L\} = \{X: X = K \text{ lub } X = L\}$$

$$(K, L) = \{\{K\}, \{K, L\}\}.$$

Różnicę klas K oraz L , którą zapisuje się w postaci $K \setminus L$, określa się następująco:

$$K \setminus L = \{X: X \in K \text{ i } X \notin L\}.$$

Jeżeli K jest klasą, to jej unią nazywa się klasę następującą:

$$\cup K = \{X: X \in Y \text{ i } Y \in K \text{ dla pewnego } Y\}.$$

W przypadku gdy $M = \{K, L\}$, zamiast $\cup M$ pisze się $K \cup L$.

Przecięciem klasy K nazywa się klasę zdefiniowaną wzorem:

$$\cap K = \{X: X \in Y \text{ dla wszystkich } Y \text{ takich, że } Y \in K\}.$$

Jeżeli $M = \{K, L\}$, to zamiast $\cap M$ pisze się $K \cap L$.

Dwie klasy K oraz L nazywa się rozłącznymi, jeżeli ich przecięcie jest klasą pustą, tj. jeżeli $K \cap L = \emptyset$.

Należy odróżniać K od $\{K\}$. Jest $\{K\} \neq K$. A więc w szczególności $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Klasa $\emptyset$ jest pusta. Natomiast klasa $\{\emptyset\}$ nie jest już pusta. Jej elementem jest klasa pusta.

Łatwo wykazać, że ma miejsce następujący ciąg równoważności:

$$(K \subseteq L) \equiv (K \cup L = L) \equiv (K \cap L = K) \equiv (K \setminus L = \emptyset).$$

Podobnie, jeżeli klasy K oraz L są podklasami klasy M , to zachodzą następujące wzory De Morgana:

$$M \setminus (K \cup L) = (M \setminus K) \cap (M \setminus L)$$

$$M \setminus (K \cap L) = (M \setminus K) \cup (M \setminus L)$$

Nietrudno jest wykazać słuszność następujących wzorów:

$$K \cup K = K, \quad K \cap K = K,$$

$$K \cup L = L \cup K, \quad K \cap L = L \cap K,$$

$$K \cup (L \cup M) = (K \cup L) \cup M, \quad K \cap (L \cap M) = (K \cap L) \cap M,$$

$$K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M), \quad K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M),$$

$$\emptyset \cup K = K, \quad \emptyset \cap K = \emptyset, \quad (K = L) \equiv (K \subseteq L) \text{ i } (L \subseteq K).$$

Jeżeli K oraz L są danymi dwoma klasami, to ich produktem nazywa się klasę określoną wzorem:

$$K \times L = \{Z: Z = (X, Y), \text{ gdzie } X \in K, \text{ zaś } Y \in L\}.$$

Przy pomocy pojęcia produktu klas można zdefiniować pojęcie funkcji. Niech więc K oraz L będą danymi dwoma klasami. Funkcją z klasy K w klasę L nazywa się taką podklasę F klasy $K \times L$, która spełnia warunek: dla każdego $X \in K$ istnieje dokładnie jeden element $Y \in L$, taki że $(X, Y) \in F$ ²⁷.

Klasę K nazywa się dziedziną funkcji F , zaś klasę $\{Y: Y \in L \text{ i } (X, Y) \in F \text{ dla pewnego } X \in K\}$ nazywa się przeciwdziedziną funkcji F .

Jeżeli przeciwdziedziną funkcji F jest cała klasa L , to mówi się, że funkcja ta przekształca K na L . Piszemy wówczas $F(K) = L$.

W przypadku ogólnym notujemy:

$$F: K \longrightarrow L \quad \text{lub} \quad K \xrightarrow{F} L.$$

²⁷ Por. wykład elementarnej teorii klas podany w pracach cytowanych w przypisku 26.

7. Pojęcie zbioru

Przejdziemy obecnie do rozważania problematyki związanej z pojęciem zbioru. Do chwili obecnej pojęcie to nie występowało w podawanych wyżej określeniach oraz twierdzeniach. Wymienione w poprzednim punkcie określenia są całkowicie ogólne. Odnoszą się do pojęcia klasy.

Klasę A nazywa się zbiorem, jeżeli jest ona elementem jakiejś innej klasy. A więc jeżeli istnieje taka klasa B , że $A \in B$, to wówczas klasa A nazywa się zbiorem. Można więc napisać:

$$(A \text{ jest zbiorem}) = \bigvee_B (B \text{ jest klasą}) \text{ i } (A \in B).$$

Postuluje się następujące aksjomaty:

(3) $\emptyset$ jest zbiorem.

(4) Każda podklasa zbioru jest zbiorem.

(5) Jeżeli A jest zbiorem, to jego bulean jest także zbiorem. A więc jeżeli A jest zbiorem, to $B(A)$ jest też zbiorem.

(6) Jeżeli A oraz B są zbiorami, to ich para $\{A, B\}$ jest też zbiorem.

(7) Jeżeli A jest zbiorem, to jego unia $\cup A$ jest też zbiorem²⁸.

Korzystając z podanych aksjomatów można łatwo wykazać, że para uporządkowana zbiorów A oraz B jest zbiorem, a także iż produkt zbiorów A oraz B jest także zbiorem.

Zgodnie bowiem z aksjomatem (6) zbiorami są $\{A\} = \{A, A\}$ i $\{A, B\}$ o ile tylko A i B są zbiorami. Konsekwentnie więc, zgodnie z tym samym aksjomatem, będzie zbiorem także $(A, B) = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

Ponieważ $A \times B = \{Z \in B \mid B(A \cup B): Z = (X, Y) \text{ dla pewnych } X \in A \text{ i } Y \in B\}$, przeto, w myśl aksjomatów (5), (6) oraz (7), produkt $A \times B$ jest zbiorem, jeżeli tylko A oraz B są zbiorami.

Aksjomat (3) zakłada, że klasa pusta jest zbiorem. Można więc mówić po prostu zbiór pusty.

²⁸ Zob. np. P. M. Cohn, op. cit., 17.

Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do rozumowania prowadzącego do otrzymania antynomii Russella, uzyskamy wynik głoszący, że klasa pełna T nie jest zbiorem. Jest więc:

T nie jest zbiorem.

Przeto pojęcie klasy jest istotnie szersze od pojęcia zbioru. Istnieją klasy nie będące zbiorami. Taką jest np. klasa pełna.

Z określenia klasy pełnej oraz buleanu danej klasy, łatwo otrzymuje się następujące twierdzenie:

$T = B(T)$.

Zachodzą także wzory następujące:

$$\cup \phi = \phi, \quad T = \cup T, \quad \cap \phi = T, \quad \cap T = \phi.$$

$$\phi \subseteq K, \quad K \subseteq T.$$

Nietrudne dowody powyższych twierdzeń pomijamy.

W celu rozwijania teorii funkcji przyjmuje się następujący aksjomat:

(8) Jeżeli dziedzina funkcji F jest zbiorem, to jej przeciwdziedzina jest także zbiorem²⁹.

Wynika stąd łatwo, w oparciu o aksjomat (4), że wówczas i sama funkcja F jest także zbiorem. Bowiem F jest podklasą produktu $A \times B$, zaś on sam jest zbiorem, skoro A i B są zbiorami, a więc i F , zgodnie z (4), jest zbiorem. O tym, że produkt zbiorów jest zbiorem to już wiemy.

Określa się kompozycję zbiorów A oraz B w sposób następujący:

$A \cdot B = \{c: \text{dla pewnego } x, \text{ dla pewnego } y \text{ oraz dla pewnego } z \text{ jest } c = (x, z), (x, y) \in B \text{ oraz } (y, z) \in A\}.$

Korzystając z powyższego określenia, można mówić także o kompozycji funkcyj. Niech więc F oraz G będą funkcjami takimi, dla których ma sens operacja kompozycji. Wówczas zachodzi twierdzenie:

Jeżeli F oraz G są funkcjami, to ich kompozycja $F.G$ jest także funkcją.

Prosty dowód tego faktu pomijamy.

²⁹ Zob. np. P. M. Cohn, op. cit., 17.

8. Uwagi

Wydaje się, że przedstawiony schemat ujęcia teorii klas oraz teorii zbiorów najlepiej odpowiada współczesnemu stanowi badań w zakresie matematyki. Jak już było wspomniane, pojęcie kategorii wykracza poza pojęcie zbioru. Rozwijając teorię kategorii nie można poprzestawać na klasycznym pojęciu zbioru. Toteż odróżnianie klas i zbiorów nie może być uważane jedynie za pewnego rodzaju subtelność odnoszącą się tylko i wyłącznie do aksjomatycznego ujęcia teorii mnogości a mającej na celu takie uprawianie wspomnianej dyscypliny, aby wykluczyć pojawianie się antynomii. Winno ono zostać uznane za konieczne wymaganie stawiane przez samą rozwijającą się matematykę. Ona jest tu czynnikiem decydującym. Jej współczesny stan powstały w skutek ciągłego rozwoju. Matematyka sama tworzy takie pojęcia, które nie mieszczą się w klasycznym schemacie teorii mnogości. I to należy uznać za zasadniczy czynnik, który wytycza kierunek ujęcia problematyki teoriomnogościowej w sposób zgodny z dzisiejszym stanem całej matematyki.

Aby unaocznąć zaznaczony wyżej fakt polegający na tym, że pojęcie kategorii nie mieści się w klasycznym pojęciu zbioru, przypomnimy tu wspomniane pojęcie.

Kategorią K nazywa się klasę obiektów, którą oznacza się przez $Ob(K)$, przy czym każdemu dwóm obiektom $A, B \in Ob(K)$ jest przyporządkowany zbiór morfizmów obiektu A w obiekt B , oznaczany $Mor(A, B)$, oraz każdej trójce obiektów $A, B, C \in Ob(K)$ przyporządkowuje się prawo kompozycji w ten sposób, że morfizmowi z A w B oraz morfizmowi z B w C odpowiada morfizm z A w C . Żąda się przy tym, aby spełnione były następujące trzy aksjomaty:

^{1K} Zbiory morfizmów $Mor(A, B)$ oraz $Mor(C, D)$ są rozłączne z wyjątkiem przypadku, gdy $A = C$ oraz $B = D$. Wówczas zbiory te są identyczne.

^{2K} Dla każdego obiektu $A \in Ob(K)$ istnieje morfizm $id_A \in Mor(A, A)$ taki, że dla dowolnego obiektu $B \in Ob(K)$ jest on

elementem neutralnym ze względu na prawo kompozycji w stosunku do elementów zbioru morfizmów $\text{Mor}(A, B)$ oraz $\text{Mor}(B, A)$.

3^{K} Prawo kompozycji morfizmów jest łączne. A więc, jeżeli $f \in \text{Mor}(A, B)$, $g \in \text{Mor}(B, C)$, $h \in \text{Mor}(C, D)$, to zachodzi równość:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Jeżeli kategoria K posiada tę własność, że klasa jej obiektów jest zbiorem, to nazywa się ona małą kategorią ³⁰.

Powyższy fakt terminologiczny był już zaznaczony wyżej. Tu chodzi o zwrócenie uwagi na to, że jest on powodowany wewnętrznymi potrzebami samej teorii matematycznej, niezależnie od badań prowadzonych nad podstawami matematyki. Zachodzi nawet pewnego rodzaju sytuacja paradoksalna polegająca na tym, że liczni matematycy, szczególnie tacy, którzy pracują w zakresie analizy klasycznej oraz geometrii nie przejmują się wcale trudnościami logicznymi, tkwiącymi u podstaw teorii mnogości i głoszą, że wspomniane trudności nie mają żadnego wpływu na rozwój samej matematyki ³¹. W literaturze fachowej natomiast coraz częściej i powszechniej spotyka się dzisiaj odróżnianie pojęcia zbioru od pojęcia klasy ³². Terminów „klasa” oraz „zbiór” nie uważa się obecnie za synonimy. Uwypuklenie tego stanu rzeczy wydaje się być wskazane.

Przypomnijmy tu jeszcze uwagi, odnoszące się do pojęcia

³⁰ Zob. np. S. Lang, *Algebra*, Moskwa 1968, 39—40 oraz S. MacLane, *Gomologija*, Moskwa 1966, 40—41.

³¹ Zob. A. Mostowski, O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości, *Studia Logica*, 20 (1967), 99—100.

³² Zob. np. E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, 1966. Na stronie 1 czytamy: The terms „set”, „family”, and „collection” are synonyms, and the term „class” is reserved for an aggregate which is not assumed to be a set (for example, the class of all sets). Por. także artykuł A. Mostowskiego cytowany w poprzednim przypisku, a także prace G. Choqueta i Z. Semadeniego, które są cytowane w przypiskach 33 i 34.

kategorii, poczynione przez G. Choqueta i Z. Semadeniego. Wymienieni Autorzy piszą:

„Teoria „kategorii” jest najmłodszym z wielkich narzędzi matematyki. Nic nie świadczy tak silnie o jedności matematyki jak właśnie ona. Stanowi ona nowy krok naprzód w dziedzinę abstrakcji. Istotnie, zajmuje się ona nie relacjami między elementami jakiegoś ustalonego zbioru, ale relacjami między przedmiotami ustalonej „kategorii”, a nawet relacjami między różnymi kategoriami. Fakt, że taka ogólność nie pociąga za sobą trywialności ani nawet ubóstwa tej teorii, nosi znamiona cudu. A jednak tak jest, teoria ta jest w wielu dziedzinach nieodłącznym przewodnikiem młodej generacji matematyków. [...] Kategoria nie jest więc zbiorem; wygodnie jest wyobrazić ją sobie jako pewną klasę przedmiotów, rozumiejąc przez klasę coś szerszego niż zbiór”³³.

„Użyliśmy wyrażenia „klasa obiektów”, np. „klasa wszystkich grup”, „klasa wszystkich przestrzeni topologicznych”. Terminy takie nie są dopuszczalne w klasycznym systemie aksjomatów teorii mnogości (Zermelo — Fraenkel), z drugiej jednak strony wyrzeczenie się ich spowodowałoby szereg formalnych kłopotów. Nie można by mówić o klasie wszystkich morfizmów, a to z kolei zaciemniłoby definicję funktora (funktor jest to „funkcja” z kategorii do kategorii zachowująca się jak homomorfizm względem składania morfizmów, tzn. przeprowadzająca identyczności na identyczności i złożenia na złożenia). Z tego powodu teoria kategorii chętnie posługuje się systemem aksjomatycznym von Neumanna — Bernaysa — Goedla, w którym takie pojęcia są dopuszczalne. Z drugiej strony aksjomatyka ta nie usuwa wszystkich trudności teorii kategorii, bowiem nie pozwala mówić o kategorii funktorów (funktor z kategorii K_1 w kategorię K_2 jest podklasą klasy $K_1 \times K_2$ i nie jest na

³³ G. Choquet, Analiza i Bourbaki, *Wiadomości Matematyczne* 7 (1963—1964), 107—108.

ogół zbiorem, a więc nie może — w systemie von Neumanna — Bernaysa — Goedla — być elementem żadnej klasy”³⁴.

Jest widoczne, że uwagi powyższe płyną z przeświadczenia o priorytecie badań naukowych przed poddawaniem ich „porządkowaniu” metodologicznemu. A także z przeświadczenia o niedopuszczalności wszelkich ograniczeń typu apriorycznego w odniesieniu do rozwijającej się nauki. Ona sama tworzy kryteria swego postępu. Czyni to przez swój dynamiczny rozwój. I tylko wtedy ma on istotnie miejsce. W przeciwnym wypadku następuje okaleczanie nauki³⁵. Te myśli były nicią przewodnią artykułu. Wydaje się, że zasługują one na zwrócenie na nie uwagi.

MENGEN UND KLASSEN

Der Begriff der Menge ist der Grundbegriff der Mathematik. Dieser Begriff wurde implicite im Gebiete der Mathematik immer gebraucht, obgleich explicite erst von G. Cantor zirka 1880 formuliert worden ist. G. Cantor eine neue mathematische Disziplin, nämlich die Mengenlehre, geschafft hat. Es könnte scheinen, als ob alle mathematische Begriffe auf der mengentheoretischen Basis greifbar sind. Erst die Entstehung der Kategorientheorie diese Meinung verändert hat. Der Begriff der Kategorie kann man nicht in das Schema der klassischen Mengenlehre aufsetzen. Die Kategorie ist eine Klasse, doch nicht eine Menge (im allgemeinen). Der Mathematik also nötig ist nicht nur der Begriff der Menge, aber auch der breitere Begriff der Klasse. Im Artikel dieses Faktum betont worden ist. Dort befindet sich auch eine Vorstellung der elementaren Klassenalgebra und die Diskussion über dem Mengenbegriff. Es wurde betont, dass die Axiomatik von von Neumann — Bernays — Gödel kann nicht der Kategorientheorie ganz genügen. Darum, die Sache von der historischen und reellen Seite betrachtend, muss man der Mathematik die Priorität in der Konstruktion ihrer Begriffe vor einigen Voraussetzungen des apriorischen Charakters geben.

³⁴ Z. Semadeni, Struktury w sensie Bourbakiego i kategorie, *Prace Matematyczne*, 10 (1966—1967), 47.

³⁵ Por. L. Geymonat, *Filozofia a filozofia nauki*, Warszawa 1966, szczególnie rozdział VI, 118—144.