Stanisław Mazierski

Geneza i rozwój pojęcia praw statystycznych

Studia Philosophiae Christianae 15/1, 61-80

1979

Studia Philosophiae Christianae
ATK
15/1979/1

STANISŁAW MAZIERSKI

GENEZA I ROZWÓJ POJĘCIA PRAW STATYSTYCZNYCH

1. UWAGI WSTĘPNE

Aczkolwiek początki sporządzania różnych statystyk sięgają starożytności greckiej i rzymskiej (pomijając cywilizacje pozaeuropejskie), jednak nie znano wówczas praw statystycznych przynajmniej w tym sensie, w jakim je formułowano w czasach nowożytnych. Zresztą ten typ praw nie mieściłby się w ramach nauki nakreślonych przez Arystotelesa. Wiadomo, że wnioski wyprowadzone na podstawie rozumowania statystycznego są tylko prawdopodobne. Prawdopodobieństwo bowiem jest miarą niepewności. Już Platon twierdził, że „argumenty oparte na prawdopodobieństwie są czcze". Stagiryta zaś, chociaż zdawał sobie sprawę, iż wiedza ludzka dostarcza różnych stopni pewności zależnie od przedmiotu badanego, jednak był przeświadczony, że nauka powinna zawierać tezy ogólne, powszechne, konieczne i pewne[1]. W praktyce ten wielki myśliciel odstępował nieraz od swego ideału. W sytuacjach, które nie pozwalają na uzyskanie zasad pewnych, trzeba się zadowolić tezami albo też przyczynami prawdopodobnymi zachodzących zjawisk. Ściśle mówiąc nie one stanowią integralną część nauki. Stagiryta zdawał sobie sobie sprawę z różnicy pomiędzy metodycznym postępowaniem, w którym wychodzi się od pojęć i zasad ogólnych oraz pewnych a rozumowaniem, w którym punktem wyjścia są niepewne fakty doświadczenia, aczkolwiek idea relacji między teorią a empirią w całej swej złożoności i precyzji kształtować się będzie dopiero w czasach

[1] *An, Post.*, I, 33, 88 b 30—34. Por. także S. Mazierski, *Prolegomena do filozofii przyrody inspiracji arystotelesowsko-tomistycznej*, Lublin 1969, 145—146.

nowożytnych, kiedy to do głosu dojdą metody pomiarowe, opis i systematyzacja zjawisk oraz przewidywanie nowych. Uświadamiał on sobie, że gdy chodzi np. o ruchy ciał niebieskich, to w tej dziedzinie obiekty doświadczenia są niekompletne, fragmentaryczne, a obserwacja niepewna.[2] Zdarzenia nie zawsze jawią się zmysłom bezpośrednio, a wówczas odwołać się trzeba do przyczyn prawdopodobnych.

2. PIERWSZE PRÓBY WYKRYWANIA PRAWIDŁOWOŚCI STATYSTYCZNYCH

Chociaż niektórzy myśliciele starożytni znali ideę prawdopodobieństwa, jednak obce im było pojęcie praw probabilistycznych czy też statystycznych. Wykrywanie prawidłowości typu statystycznego poprzedziły opisy informacyjne, jakich dokonywano w poszczególnych społeczeństwach zorganizowanych w państwa. Początkowo miały one charakter jakościowy i dotyczyły położenia geograficznego, ukształtowania powierzchni, zasobów naturalnych, ludności itd. Pierwotne statystyki miały za zadanie zestawianie faktów z różnych dziedzin życia (np. gospodarczego, społecznego, kulturalnego itp.) i wyrażania ich liczbowo najczęściej w postaci tabel, wykresów, diagramów. Tego rodzaju statystyki znane był od zarania państw cywilizowanych. Na tym poziomie badania obranego aspektu rzeczywistości nie stwierdzamy jeszcze praw statystycznych uteoretyzowanych i uzasadnionych za pomocą teorii statystycznej. Wskazywały one jednak drogę do formułowania praw i teorii statystycznych stosowanych najpierw poza obszarem badań przyrodniczych.

Przełomowy krok w dziedzinie statystyki stanowią prace J. Graunta (1620—1674) i W. Petty'ego (1623—1687). Przedmiotem ich zainteresowania były zagadnienia, które z biegiem czasu nazwane zostaną demograficznymi. Pierwszy z tych autorów [3] na podstawie londyńskich biuletynów urodzeń, umieralności i zawierania związków małżeńskich, opracował dane dotyczące naturalnego ruchu ludności w Londynie (relacje liczbowe między ilością urodzonych chłopców i dziewcząt, między ilością urodzeń i zgonów, między ilością zachorowań na pewne choroby a globalną ilością mieszkańców danego regionu lub

---

[2] *De coelo*, II, 3, 286 a 2—17. Por. też S. Mazierski, dz. cyt., 152.

[3] J. Graunt, *Natural and political observations mentioned in a following Index, and made upon the Bills of Mortality...*, w: *The economic writings of Sir William Petty*, Cambridge 1892, v. II, 317—431.

obszaru państwa). Graunt pierwszy spostrzegł, że w przypadkowych zjawiskach masowych dadzą się zaobserwować pewne prawidłowości, które w przyszłości staną się podstawą formułowania praw statystycznych. S. Konferowicz, opierając się na licznych wypowiedziach Graunta, dochodzi do wniosku, że ten siedemnastowieczny badacz życia społecznego „był bliski zrozumienia praw wielkich liczb, mającego podstawowe znaczenie dla oceny stopnia dokładności ustaleń statystycznych. W każdym razie zapoczątkowując ustalenie na wielką skalę prawidłowości statystycznych J. Graunt intuicyjnie wyczuwał przejawianie się tzw. prawa wielkich liczb" (sc. w badaniach demograficznych).[4] U Graunta możemy doszukać się początków stosowania indukcji statystycznej w celu uzyskania wniosków ogólnych na podstawie konkretnych przesłanek liczbowych otrzymanych drogą obserwacji rzeczywistości społecznej. Ze względu na to, że nikt przed tym autorem tak wnikliwie, rzetelnie i krytycznie nie podchodził do dokumentacji demograficznej jako podstawy wnioskowania staytystycznego, J. Graunt uważany jest za twórcę statystycznej metody badania zjawisk społecznych.

Analogiczne badania statystyczne prowadził W. Petty z tym, że jego zainteresowania badawcze miały szerszy zakres, ponieważ obejmowały także zagadnienia ekonomiczne. W przedmowie do swego dzieła *Political Arithmetick*[5] prezentuje się on jako teoretyk statystyki, charakteryzując metodę jaką się posługuje w swych pracach badawczych: „Metoda, którą tu stosuje, jeszcze się nie upowszechniła (*is not yet very usual*), zamiast używać jedynie słów w stopniu wyższym i najwyższym oraz uciekać się do argumentów spekulacyjnych, wstąpiłem na drogę... wyrażania swych myśli terminami liczby, wagi i miary, stosując li tylko argumenty pochodzące od doświadczenia zmysłów i rozważając jedynie te przyczyny, które posiadają widoczną podstawę w naturze; a te przyczyny, które zależą od niestałości umysłów, opinii, pragnień i namiętności poszczególnych ludzi — pozostawiam do zbadania innym".[6] Stosując metodę arytmetyki polityczej o charakterze statystycznym do różnych działów gospodarki angielskiej, usiłował wykazać, że

---

[4] S. Konferowicz, *Liczby przemówiły. J. Graunt i W. Petty twórcy metod statystycznych*, Warszawa 1957, 23.

[5] J. Petty opracował *Arytmetykę polityczną* w latach 1672—1676, która została opublikowana w Londynie po śmierci autora w 1690, 233—313.

[6] Tamże, 244 (tekst polski cytuję za S. Konferowiczem).

Anglia przewyższa Francję pod względem ekonomicznym i militarnym. Zestawienia statystycze pozwoliły mu przewidzieć szybki ekonomiczny i polityczny rozwój Anglii.

Prawidłowości dostrzeżone w zjawiskach ekonomiczno-społecznych przez Petty'ego nie mogły jednak stanowić mocnej i szerokiej platformy dla generalizacji statystycznych, gdyż brak im było teoretycznej podbudowy. Stało się to możliwe, gdy pojawiły się początki nowego działu matematyki zwanego teorią prawdopodobieństwa (probabilistyką) obejmującą najpierw rachunek prawdopodobieństwa, a z biegiem czasu również aksjomatyzację rachunku prawdopodobieństwa. Teoria ta zawdzięcza swe powstanie przede wszystkim B. Pascalowi, do którego zwrócił się gracz hazardowy Chevalier de Mère z propozycją wyjaśnienia poczynionych przezeń spostrzeżeń dotyczących gier hazardowych.[7] W związku z tą sprawą Pascal (1623—1662) nawiązał kontakt korespondencyjny z matematykiem P. Fermatem (1601—1665). Wymiana myśli na omawiany temat między tymi dwoma matematykami doprowadziła do powstania pierwszych zrębów rachunku prawdopodobieństwa. Temu zagadnieniu poświęcił także Ch. Huygens (1629—1695) swą pracę o prawidłowościach w grach hazardowych (1657).[8] Wielkie zasługi dla rozwoju probabilistyki ma również Jakub Bernoulli (1654—1705), który w swej pracy pt. *Ars coniectandi* poszerzył i wzmocnił podstawy rachunku prawdopodobieństwa, a w szczególności sformułował i dowiódł tzw. prawa wielkich liczb, które w uproszczonym sformułowaniu słownym brzmi: jeśli pewne zdarzenie ma prawdopodobieństwo W, to przy dostatecznie dużej liczbie doświadczeń zachodzących w takich samych warunkach względna częstość występowania tego zdarzenia jest bliska W (tym bliższa jest W, im więcej doświadczeń przeprowadzono). Twierdzenie Bernoulli'ego pozwoliło stosować probabilistykę w statystyce. Rachunek prawdopodobieństwa wzbogacili ważnymi twierdzeniami matematycy francuscy A. de Moivre [9], P. Laplace i S. Poisson.

Laplace (1749—1827) stosował teorię prawdopodobieństwa w demograficznych badania w Paryżu. Rozważania swe w tym przedmiocie zamieścił on w traktacie *Théorie analitique des*

[7] A. Weryha, *Zasady statystyki,* cz. I, *Statystyka ogólna,* Warszawa 1950, 9.

[8] *De ratiociniis in ludo aleae,* 1657; jest to pierwszy podręcznik rachunku prawdopodobieństwa. O zasługach Ch. Huygensa dla rozwoju nauki pisze A. E. Bell w książce: *Christian Huygens and the development of science in the seventeenth century,* London 1948.

[9] *The doctrine of chances,* 1716.

probabilités, który jest uważany za podstawę statystyki matematycznej. Teorię swą poprzedził wykładem *Essai philosophique sur les probabilités*, w którym podał definicję prawdopodobieństwa postulującą zdarzenia jednakowo prawdopodobne.[10] Według Laplace'a problemy związane z pojęciem prawdopodobieństwa pojawiają się na skutek naszej częściowej wiedzy i częściowej niewiedzy. Konsekwencją takiego spostrzeżenia było jego znane stwierdzenie, które jest skrótową interpretacją osiemnastowiecznego mechanicyzmu: „Inteligencja, która by w danej chwili znała wszystkie siły ożywiające przyrodę i odpowiednie położenia składających się na nią rzeczy, która by ponadto była dostatecznie potężna, aby te dane poddać rachunkowi, zdołałaby objąć tym samym wzorem ruchy największych ciał wszechświata i ruchy najlżejszego atomu: nie pozostawałoby dla niej nic niepewnego — i przyszłość zarówno jak przeszłość roztaczałaby się przed jej oczami" [11].

Do rozbudowy podstaw statystyki matematycznej znacznie przyczynił się jeden z największych matematyków wszystkich czasów C. F. Gauss (1777—1855), który opracował teorię przypadkowych błędów obserwacji.

W pierwszej połowie XIX w. nie mały wpływ na rozwój myśli statystycznej wywarł belgijski matematyk i fizyk A. Quetelet, który stosował rachunek prawdopodobieństwa w dziedzinie badań socjologicznych. W tym przedmiocie dociekań epokowe znaczenie mają szczególnie jego dwie prace: *Sur l'homme et le développement des ses facultés, ou essai de physique sociale* (1836) oraz *Du système social et des lois, qui le regissent* (1848).[12] Będąc z wykształcenia matematykiem, fizykiem i astronomem usiłował przenieść metody badań przyrodniczych na grunt badań rzeczywistości społecznej, anatomicznej, moralnej i politycznej. Dzięki zastosowaniu języka matematycznego w różnych działach wiedzy ludzkiej w celu wykrycia prawidłowości zjawisk Quetelet stał się twórcą matematycznego kierunku w statystyce. Uprawianą przez siebie statystykę nazwał fizyką społeczną, która miała prowadzić do formułowania praw dotyczących rozwoju człowieka i społeczeństwa nie mniej

---

[10] P. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris 1940 [6]. Por. także D. J. Struik, *Krótki zarys matematyki*, tłum. z ang. P. Szeptycki, Warszawa 1960, 214—218.

[11] Tamże, 4.

[12] Przekład z jęz. franc.: *Układ społeczny i jego prawa*, Warszawa 1874. Por. również: L. Waściszewski, *Statystyka. Teoria metody statystycznej*, Lublin 1930, 10—33.

dokładnych i ścisłych niż to czynią nauki przyrodnicze ustalające deterministyczny bieg zjawisk. Dla wykonania tego zadania zastosował teorię średnich wielkości, średnich własności do badań nad człowiekiem, narodem, ludzkością. Uzupełnieniem naszej wiedzy fizycznej o człowieku i społeczeństwie powinny być dociekania idące w kierunku ich własności moralnych i politycznych. Jeśli w tych wszystkich zjawiskach da się stwierdzić określone prawidłowości to widocznie rządzi nimi powszechne prawo przyczynowości, które jest podstawą przewidywania zjawisk

Już w 1829 r. zajął się obliczaniem prawdopodobnych przestępstw i z zadziwiającą dokładnością przewidział na r. 1830 liczbę przestępstw we Francji i to z wyszczególnieniem ich rodzajów. Quetelet nie ustrzegł się przesadnego determinizmu w analizie zjawisk społecznych i moralnych twierdząc, że poszczególne jednostki tylko w pewnej mierze są odpowiedzialne za swe czyny, które są rezultatem uwarunkowań fizycznych, rodzinnych i społecznych.

Spośród autorów stosujących metody statystyczne w różnych gałęziach wiedzy naukowej należy także lekarz i przyrodnik angielski F. Galton (1822—1911).[13] Dzięki zapoczątkowaniu teorii korelacji cech i badaniu metodą statystyczną zagadnienia zmienności i dziedziczności cech stał się prekursorem aplikacji metod statystycznych w biologii. W założonym przez niego czasopiśmie Biometrica publikowano wyniki badań zmienności w populacjach organizmów żywych i rezultaty prac teoretycznych z zakresu statystyki matematycznej. Tak powstała angielska szkoła statystyków-matematyków, do której zaliczyć trzeba m. in. A. Bowley'a a przede wszystkim R. Fishera, twórcę teorii estymatorów.

3. PROCES KSZTAŁTOWANIA SIĘ WZAJEMNEJ RELACJI MIĘDZY PROBABISTYKĄ A STATYSTYKĄ

Paralelnie do rozwoju nauk empirycznych i formalnych można zauważyć proces kształtowania się wzajemnej relacji między probabilistyką i statystyką. Pierwsza z tych dyscyplin naukowych szeroko rozumiana obejmowała najpierw rachunek prawdopodobieństwa a zbiegiem czasu także aksjomatyzację tegoż rachunku. Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się przede wszystkim badaniem praw rządzących zjawiskami lo-

[13] F. Galton, *A descriptive list of anthropometric apparatus...*, Cambridge 1887.

sowymi. Statystyka zaś jest „nauką o wyciąganiu globalnych wniosków, mających charakter prawidłowości matematycznych, z wielkiej ilości danych empirycznych dotyczących częstości występowania zjawisk rozpatrywanego typu".[14] Z historycznego punktu widzenia trzeba stwierdzić, że statystyce przyszła w sukurs matematyka ze swym rachunkiem prawdopodobieństwa; w matematyce szukała ona miary ścisłości naukowej. W XX w. sama statystyka stała się działem matematyki. O ile statystyka elementarna ograniczała się do wyczerpującego badania zbiorowości, ponieważ rozporządzała ograniczoną liczbą indywiduów, a wnioski z niej wyprowadzone miały moc bezwzględnie obowiązującą, o tyle statystyka matematyczna dysponuje zbiorami nieskończonymi i ustala metody wnioskowania o całej zbiorowości na podstawie danych dotyczących części zbiorowości statystycznej. Do rozbudowy teorii prawdopodobieństwa przyczynili się znacznie autorzy rosyjscy i radzieccy jak P. Czebyszew, A. Markow, S. Bernstein, A. Kołmogorow, A. Chinczyn i inni.

Na związki istniejące między probabilistyką i statystyką wskazują pewne wspólne określenia, jakimi się one posługują jak np. „masa statystyczna", „zjawiska masowe", „częstość występowania zjawisk", „prawidłowość matematyczna". Niemniej jednak da się ustalić pewne odrębności natury epistemologicznej między rozważanymi gałęziami wiedzy.

Nie możemy powiedzieć zasadnie że probabilistyka jest „czystą teorią", a statystyka praktycznym zastosowaniem wniosków wyprowadzonych z teorii prawdopodobieństwa.[15] Statystyka bowiem nie ogranicza się do wyprowadzenia wniosków z dostatecznie dużej liczby zdarzeń losowych, gdyż sama staje się również teorią wnioskowania statystycznego, a to znaczy, że ma także swą podbudowę teoretyczną. Różnice tkwią w czymś innym. Dla ich uwidocznienia posłużymy się następującym przykładem. Założymy, że w urnie znajduje się pewna ilość kul w trzech kolorach A, B, C. Niech pierwsza podklasa (A) liczy 20 kul, druga (B) — 30 kul, a trzecia (C) — 40 kul. Jeśli chcemy odpowiedzieć na pytanie, jakiego koloru kulę wyciągniemy na „chybił trafił" z urny, wówczas mamy do czynienia z zagadnieniem typowo probabilistycznym. W przyto-

[14] W. Weaver, *Elementarz rachunku prawdopodobieństwa*, z jęz. ang. tłum. B. Empacher, Warszawa 1970, 251.

[15] Tamże, 252. Por. także W. Skrzywan, *Historia statystyki*, Warszawa 1954, 169—175.

czonym przypadku probabilistyka określa prawdopodobieństwo, że wyciągnięta kula okaże się koloru A, bądź B, bądź C.

Jeżeli zaś nie wiemy, jaka jest zawartość urny, możemy przeprowadzić szereg prób losowych, wyciągając pewną ilość kul z urny. Z kolei zliczamy ilość ciągnięń i ustalamy, ile wyciągnęliśmy kul poszczególnych kolorów (A, B, C). Po wykonaniu tych prób usiłujemy odpowiedzieć, jaka jest zawartość urny. W tej sytuacji nie potrafimy dać jednoznacznej odpowiedzi na postawione pytanie, lecz wysuwamy kilka hipotez, z których akceptuje się najbardziej prawdopodobną. Takie postępowanie metodyczne jest charakterystyczne dla rozumowania statystycznego (dla statystyki).

Jeżeli zawartość urny nazwiemy populacją, powiemy, że statystyka, opierając się na wiedzy o składzie próbek losowych, wyprowadza najprawdopodobniejsze wnioski dotyczące nieznanego składu populacji.

Ażeby zdobyć informację o charakterze całej populacji statystyka nie ogranicza się jedynie do wyprowadzenia wniosków z próbek losowych, lecz również — planuje doświadczenie tak, by uzyskane na jego podstawie rezultaty dostarczały jak najwięcej wiedzy o samej populacji. Chodzi tu o kwestie, jak należy przeprowadzić badania wyrywkowe, jak pobierać próbki losowe i je użytecznie opisywać oraz ocenić, aby otrzymać najwiarygodniejsze i możliwie wyczerpujące informacje o populacji.

Przedstawiony schemat rozumowania statystycznego jest bardzo uproszczony. Właściwie mówiąc, nie jesteśmy uprawnieni do wyprowadzenia jakichkolwiek wniosków dotyczących populacji na podstawie próbek losowych, jeśli uprzednio nie poczyniliśmy pewnych założeń co do samej populacji, czyli „musimy znać wartości prawdopodobieństw a priori otrzymania (w naszym przykładzie, S.M.) kul poszczególnych kolorów, aby można było na podstawie twierdzenia Bayesa zmodyfikować pierwotne założenia; samo twierdzenie Bayesa nie może nam dostarczyć tych założeń".[16] Poza tym trzeba określić teoretycznie wachlarz możliwych składów próbek i to dla każdej populacji, uwzględniając również sposób pobierania próbek. Postuluje się, by wymienione pobieranie dokonywało się w sposób typowy, a więc w drodze losowania. W przeciwnym razie narazilibyśmy się na zarzut tendencyjności w wyborze ciągnięć.

---

[16] W. Weaver, dz. cyt., 258.

Jeżeli zaś chodzi o probabilistykę, to w niej ze znajomości składu populacji wyprowadza się najprawdopodobniejsze wnioski dotyczące nieznanego charakteru jej próbek losowych.

Klasyczną ilościową definicją prawdopodobieństwową jest tzw. definicja frekwencyjna zaproponowana przez R. von Misesa: $W(c) = \lim_{n \to \infty} m/n$ (gdzie m oznacza liczbę przypadków sprzyjających, n — ogólną liczbę wykonanych doświadczeń). Prawdopodobieństwo zachodzenia zdarzeń jakiegoś typu określa się jako granicę, do której dąży stosunek m/n, gdy n rośnie nieograniczenie. Praktyka pokazuje, że gdy liczba doświadczeń wzrasta prawdopodobieństwo poszczególnych podklas zdarzeń danego typu zbliża się do jedności. Z frekwencyjnej definicji wyprowadzono 5 reguł rachunku prawdopodobieństwa. W XX w. powstała teoria miary, której twórcami są E. Borel i H. Lebesque. Teoria ta określa pojęcie miary za pomocą reguł analogicznych do reguł frekwencyjnego rachunku prawdopodobieństwa z tym, że zamiast reguły IV: $W(X + Y) = W(X) + W(Y)$ wprowadza się mocniejszy postulat IV′, a przez to rozciąga się prawo dodawania na nieskończenie wiele dodajników.[17] Matematycy okresu międzywojennego zauważyli, że niesprzeczność reguł rachunku prawdopodobieństwa jest konsekwencją niesprzeczności teorii miary. Odtąd rachunek prawdopodobieństwa uznano za dział matematyki również ścisły jak inne działy tejże dyscypliny naukowej.

Nowoczesna teoria statystyki wyrosła na podstawach twierdzenia Bayesa, pozostającego w związku z matematyczną teorią rozumowania indukcyjnego. Ze względu na wielką rolę, jaką to twierdzenie odegrało w historii statystyki przedstawimy je w kontekście zabiegu uprawdopodabniania hipotezy czy też prawa naukowego.[18]

Przypuśćmy, że zaszło jakieś zdarzenie c. Postawmy sobie za zadanie znalezienie przyczyny tego zdarzenia, którą można potraktować jako hipotezę h. Nie mogąc w tej sytuacji znaleźć właściwej przyczyny zdarzenia c, odwołujemy się do szeregu hipotez (przyczyn) prawdopodobnych, czyli wykluczających się zdarzeń $h_1, h_2, \ldots, h_n$, które uważać będziemy za jedyne moż-

---

[17] H. Steinhaus, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, w: *Encyklopedia — Przyroda i technika*, Warszawa 1967, 993.

[18] S. Mazierski, *Prawa przyrody jako uogólnienia indukcyjne*, Roczniki Filozoficzne, 11 (1963) z. 3, 27—28; por. też B. Gawecki, *O hipotezach w fizyce*, Roczniki Filozoficzne, 6 (1958) z. 3, 147—156.

liwe przyczyny zjawiska c. Znaczy to, że to zdarzenie zachodzi tylko wtedy, gdy zaszło jedno ze zdarzeń $h_1, h_2, ..., h_n$. Jeśli zdarzenie c nastąpiło, nasuwa się pytanie, które ze zdarzeń $h_1, h_2, ..., h_n$ było jego rzeczywistą przyczyną. Inaczej mówiąc, jakie jest prawdopodobieństwo (W), że zdarzenie h_k (gdzie $k = 1, 2, 3, ..., n$) jest przyczyną zdarzenia c, albo też jakie jest prawdopodobieństwo h_k ze względu na posiadaną wiedzę o c; symbolicznie: $W(h_k/c) = ?$

Na podstawie reguły mnożenia prawdopodobieństwa:
$W(h_1 \cdot h_2/f) = W(h_1/f)\, W(h_2/h_1f) = W(h_2/f)\, W(h_1/h_2f)$
— (gdzie h_1, h_2 oznaczają jakieś dwie wykluczające się hipotezy, f — dane początkowe stanowiące dotychczasową naszą wiedzę o jakiejś hipotezie; $W(h_1/f)$ czytamy: prawdopodobieństwo hipotezy h_1 ze względu na naszą wiedzę f) — można napisać:
$W(c \cdot h_k) = W(c)\, W(h_k/c)$ lub
$W(c \cdot h_k) = W(h_k)\, W(c/h_k)$, a stąd otrzymuje się:

$$W(h_k/c) = \frac{W(h_k)\, W(c/h_k)}{W(c)}$$

Ponieważ założyliśmy, że:
$W(c) = W(h_1c + h_2c, ..., h_nc) =$

$$\sum_{=1}^{n} W(h_1/c) = \sum_{i=1} W(h_i)\, W(c/h_i),$$ wobec tego otrzymujemy:

$$W(h_k/c) = \frac{W(h_k)\, W(c/h_k)}{\sum_{i=1}^{n} W(h_i)\, W(c/h_i)}$$

To ostatnie wyrażenie jest wzorem (twierdzeniem) Bayesa na prawdopodobieństwo a posteriori, czyli na prawdopodobieństwo przyczyny ze względu na zaszły skutek. Zakłada się tu, że prawdopodobieństwo a priori odnośnej hipotezy powinno być różne od zera przed wszelkimi problemami określenia prawdopodobieństwa tejże hipotezy.

4. METODY STATYSTYCZNE STOSOWANE DO ZJAWISK TŁUMNYCH TYPU MECHANICZNEGO

Wraz z rozwojem nauk przyrodniczych a zwłaszcza fizyki rosło również zainteresowanie teorią prawdopodobieństwa i statystyką matematyczną. Fizycy uświadomili sobie, że wiele praw fizycznych ma charakter statystyczny. Metody statystyczne zaczęły stosować inne dyscypliny przyrodnicze jak meteorologia, biologia, bakteriologia, antropologia i inne. Opis fizycznych zjawisk masowych byłby niemożliwy bez probabilistyki i statystyki.

Ilustracją tego faktu może być ewolucja teorii atomistycznej, która prawie do połowy XIX w. miała charakter spekulacji umysłowej nie potwierdzonej doświadczalnie. Do ugruntowania empirycznych podstaw tej teorii przyczynił się Daniel Bernoulli, który w 1738 r. wytłumaczył prawo Boyle'a-Mariotte'a, opierając się na założeniu o istnieniu atomów jako bezładnie poruszających się kuleczek masowych. Dał on również atomowo-kinetyczną interpretację ciśnienia w gazach. Z tego powodu uważa się go za prekursora kinetycznej teorii gazów zbudowanej za pomocą metod statystycznych.

Na przełomie XVIII i XIX w. przedmiotem szczególnego zainteresowania chemików było wyodrębnienie czystych pierwiastków. Metoda operowania czystymi pierwiastkami i związkami chemicznymi doprowadziła do eksperymentalnego wykrycia prawa stałych wagowych relacji (J. L. Proust, J. B. Richter).[19] W stosunkowo krótkim czasie (1804—1808) J. Dalton w prosty sposób wytłumaczył prawo stałych stosunków przy założeniu, że każdy pierwiastek składa się z atomów o jednakowych masach; w relacjach chemicznych pierwiastki łączą się w określony ilościowo sposób w jednakowe drobiny. W tymże okresie czasu (1805) J. Gay-Lussac i A. v. Humboldt stwierdzili eksperymentalnie, że w związkach chemicznych, których wyjściowe pierwiastki znajdują się w stanie gazowym, stosunek ich objętości jest stały przy tym samym ciśnieniu i temperaturze. W kilka lat później (1811) A. Avogadro na podstawie teorii atomowej i prawa Gay-Lussaca wysunął hipotezę, że równe objętości różnych gazów, będących pod tym samym ciśnieniem i w tej samej temperaturze, zawierają jednakową liczbę drobin.

Hipoteza stałości składu związków chemicznych i przeświadczenie o istnieniu drobiny o stałej strukturze atomowej stały się przedmiotem teoretycznych rozważań w połowie XIX w. Ten kierunek badań powstał w związku z zainteresowaniami fizyków termodynamiką, która w swych początkach miała charakter fenomenologiczny i makroskopowy. To samo należy powiedzieć o elektrodynamice J. Maxwella. Wymienione działy fizyki posługiwały się takimi parametrami i funkcjami parametrów jak temperatura, ciśnienie, energia wewnętrzna, entropia, przenikliwość dielektryczna i magnetyczna, ale nie potrafiły

[19] J. Werle, *Rozwój i perspektywy fizyki*, Warszawa 1970, 103.

dać im podbudowy teoretycznej i właściwej interpretacji. Z tego powodu nie można było prognozować liczbowych wyników teoretycznych i konfrontować ich z obiektami doświadczenia. Dopiero w drugiej połowie XIX w. przyrodnicy, idąc drogą wskazaną przez Waterstona, usiłowali wyjaśnić zjawiska występujące w makrokosmosie przy pomocy założeń dotyczących mikrostruktury ciał.[20] Przyjęto prosty model oparty na założeniu, że drobiny gazu są kuleczkami o określonej masie, znajdującymi się w ciągłym ruchu. Stosując do drobin gazu metodę kolejnych przybliżeń (zaniedbywano najpierw rozmiary drobin oraz ich rozrzut prędkości, a potem uwzględniano rozmiary drobin, nieelastyczność zderzeń i statystyczny rozkład prędkości) skonstruowano kinetyczną teorię gazów. Przez uśrednienie niektórych mikroskopijnych własności drobin gazu (w odpowiednio dużej masie statystycznej) można było zinterpretować i obliczyć odpowiednie wielkości makroskopowe ściśle związane z mechanicznymi własnościami mikroskopowymi. Uczynili to R. Clausius i K. Krönig, (zaniedbując jeszcze rozmiary drobin i oddziaływanie między nimi), którzy z kinetycznej teorii gazów wyprowadzili wzór: [21]
$pv = 1/ Nmc^2$ (gdzie p oznacza makroskopowe ciśnienie gazu, v — objętość jednego mola gazu, N — liczbę Avogadro, m — masę drobiny, c^2 — średni kwadrat prędkości).

Na podstawie równania stanu gazów doskonałych $pv = RT$ (gdzie T oznacza temperaturę w stopniu Kelvina, R — uniwersalną stałą gazową) otrzymuje się następujący wzór:

$$T = \frac{1}{3k} m\, c^2 = \frac{2}{3k} E_{kin}$$

(gdzie $k = R/N$ oznacza stałą Boltzmanna). Okazało się, że tem-

---

[20] Na wielkie znaczenie probabilistyki i statystyki dla rozwoju fizyki zwrócił uwagę wybitny polski fizyk M. Smoluchowski, pisząc: „Wprowadzony po raz pierwszy w latach 1857—1860 przez Clausiusa i Maxwella do kinetycznej teorii gazów jako swoisty pomocniczy środek matematyczny — rachunek prawdopodobieństwa zdobył sobie po przejściowym okresie zastoju zupełnie podstawowe znaczenie dla całej fizyki — gdy atomistyczny punkt widzenia odniósł ostateczne zwycięstwo; dziś rachunek ten stanowi jedno z najważniejszych narzędzi przy badaniach w dziedzinie nowoczesnych teorii materii, elektroniki, promieniotwórczości i promieniowania, gdyż jego istota najzupełniej odpowiada panującej dziś tendencji sprowadzania — na wzór kinetycznej teorii gazów — wszystkich praw fizyki do statystyki ukrytych zdarzeń elementarnych..." (*Wybór pism filozoficznych*, Warszawa 1956 296—297).

[21] Por. J. Werle, dz. cyt., 106—107.

peratura T jest proporcjonalna do średniej energii kinetycznej drobin gazu. W ten sposób statystyczne ujęcie dostatecznie dużej ilości drobin gazu doprowadziło do zinterpretowania podstawowej wielkości fizycznej jaką jest niewątpliwie temperatura.

Dalszy postęp w rozwoju pierwszej mikroskopowej statystycznej teorii zjawisk makroświata zawdzięczamy Maxwellowi, który scharakteryzował matematycznie rozkład prędkości drobin w stanie równowagi termodynamicznej.[22] Opierając się na Maxwelowskim rozkładzie prędkości molekuł L. Boltzmann dokonał uogólnienia kinetycznej teorii gazów i na tej drodze skonstruował ogólniejszą teorię fizyczną, która nazwana została klasyczną mechaniką statystyczną. Tenże autor, wychodząc z przesłanek teoretycznych, zinterpretował statystycznie prawo wzrostu entropii i drugą zasadę termodynamiki. W trakcie tych badań wykazał on, że entropia jest proporcjonalna do logarytmu naturalnego termodynamicznego prawdopodobieństwa ($S = k \ln W$, gdzie k oznacza pewną stałą uniwersalną, W — prawdopodobieństwo danego stanu gazu) a bieg zjawisk w układach izolowanych dąży do stanów najbardziej prawdopodobnych. Ze względu na to, że w zjawiskach tych biorą udział miliony cząsteczek, będących w ruchu jednostajnym lub drgających „prawdopodobieństwo zupełnego nieuporządkowania tych cząsteczek jest tyle razy większe od prawdopodobieństwa pewnego ich porządku, że wszystkie zjawiska biegną, praktycznie biorąc, zawsze w kierunku tych ugrupowań bardziej prawdopodobnych" [23]. Każdemu wzrostowi entropii układu odpowiada przejście tegoż układu do bardziej prawdopodobnych ugrupowań molekuł, przy czym zjawisku temu towarzyszy degradacja energii, ponieważ żaden układ samorzutnie nie powraca do stanu mniej prawdopodobnego. W ten sposób pojęcie entropii zostało wyjaśnione za pomocą metod statystycznych.

Bardziej abstrakcyjnie i aksjomatycznie potraktował problematykę statystyczną w przyrodoznawstwie W. Gibbs.[24] Bio-

---

[22] Ewolucję teorii atomistycznej do r. 1911 przedstawił M. Smoluchowski na posiedzeniu Polskiej Akademii Umiejętności 20.V.1911 r. (*Wybór pism filozoficznych,* 235—256).

[23] S. Pieńkowski, *Fizyka doświadczalna,* t. I, Warszawa 1952, 502.

[24] Istotną różnicę pomiędzy kinetyczną teorią gazów a mechaniką statystyczną upatruje Smoluchowski w tym, „że pierwsza opiera się na pewnych wprawdzie silnie przemawiających do przekonania, ale nie dowiedzionych ściśle ideach z dziedziny przypadku i prawdopodobień-

rąc za punkt wyjścia własności ensembli w przestrzeni fazowej określił on dwa podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa: kanoniczny i mikrokanoniczny. Z zestawienia i porównania rozkładów Gibbs doszedł do wniosku, że Maxwellowski rozkład jest szczególnym przypadkiem rozkładu kanonicznego.

5. METODY STATYSTYCZNE STOSOWANE W FIZYCE XX W.

W miarę wykrywania nowych zjawisk świata atomowego jasnym się stawało, że nie wszystkie zjawiska fizyczne dają się opisać za pomocą mechanistycznej aparatury pojęciowej. Do nich należą zjawiska elektromagnetyczne nie mieszczące się w schemacie mechaniki klasycznej. Dla ich opisu należało uwzględnić przede wszystkim elektryczną strukturę materii i własności pola elektromagnetycznego. Jednym z pierwszych, który zajął się badaniem tej dziedziny zjawisk był H. A. Lorentz (1853—1928). Opracował on podstawy mikroskopowej statystycznej teorii zjawisk elektromagnetycznych, zwanej teorią elektronową. Autor ten wysunął supozycję, że atomy i drobiny składają się z elektrycznie naładowanych cząstek, a prąd elektryczny jest niczym innym jak ruchem swobodnych ładunków elektrycznych w przewodnikach. Chcąc otrzymać makroskopowe wielkości elektromagnetyczne i relacje między nimi wyrażone za pomocą Maxwellowskich praw, Lorentz dokonał uśrednienia odpowiednich wielkości mikroskopowych (atomów i drobin). W wyniku tego zabiegu mógł ująć wielkości makroskopowe w formie funkcji ciągłych położenia i czasu.

Ze względu na to, że teorie statystyczne czyniły założenia dotyczące struktury mikroobiektów, przeto odgrywały rolę łącznika między mikro- a makroświatem. Pokazują bowiem, jaki wpływ wywierają własności i prawa mikroświata na własności i prawa makroświata z jednej strony, a z drugiej ujawniają fakt, że prognozy wyprowadzone z teorii statystycznych i skonfrontowane z obiektami doświadczenia wymagają korektury poczynionych założeń co do struktury i praw mikroświata.[25]

Niezmiernie ważny etap na drodze ewolucji teorii budowy materii zawdzięcza fizyka M. Planckowi, który zaproponował

stwa, podczas gdy druga... pomijając owe idee, jest zbudowana przy pomocy metod ściśle statystycznych" (*Wybór pism filozoficznych...*, 327, przyp.).

[25] J. Werle, dz. cyt., 111.

rozwiązanie problemu promieniowania za pomocą kwantów energii. Według niego najmniejsza porcja energii jaką może wypromieniować lub absorbować harmoniczny oscylator, jest proporcjonalną do częstości fali E = h , gdzie h jest stałą Plancka, a ν — częstością drgania fali elektromagnetycznej. Tego rodzaju zjawiska (i innych zjawisk atomowych) nie potrafi wyjaśnić mechanika klasyczna mająca charakter deterministyczny w sensie ścisłym. W celu opisania wyjaśnienia zjawisk świata atomowego trzeba było stworzyć nową mechanikę, zwaną mechaniką falową, którą cechuje indeterminizm. Do powstawania nowej fizyki w sposób szczególny przyczynili się L. V. de Broglie, W. Heisenberg, M. Born, E. Schrödinger, P. A. Dirac i W. Pauli. Opis zjawisk atomowych stał się możliwy dzięki równaniu falowemu Schrödingera. Podobnie jak w fizyce klasycznej tak i w mechanice kwantowej istotnym elementem stanu układu (który usiłuje się wyznaczyć) jest położenie obiektu fizycznego. W teorii klasycznej lokalizację układu i jego ewolucję w czasie ustala się na podstawie newtonowskich równań ruchu przy zachowaniu pewnych warunków, natomiast w teorii kwantów w odniesieniu do mikrocząstek rolę tę przejęło ogólne równanie Schrödingerra spełniające funkcję ψ. Nie ma jednak wśród fizyków zgodnej odpowiedzi na kwestię, co właściwie reprezentuje funkcja falowa. W związku z tym powstały różne interpretacje tej funkcji, do których m. in. należą: (1) interpretacja operacjonistyczna, (2) interpretacja standardowa (realistyczna), (3) interpretacja kopenhaska, (4) fizyków Związku Radzieckiego interpretacja mechaniki kwantów.[26]

Sam formalizm mechaniki falowej wskazuje na jej indeterministyczny charakter. Aczkolwiek równanie falowe odtwarza teoretyczne zachowanie się mikroukładu w miarę upływu czasu, jednak za jego pomocą nie można opisać procesu pomiarowego, który powoduje „skokową", niezdeterminowaną zmianę stanu. Znaczy to, że układ U, który był w stanie ψ, w chwili pomiaru wykonuje nie dający się przewidzieć „skok" do jednego ze stanów wyróżnionych przez przyrząd. Znajomość więc stanu ψ nie jest podstawą jednoznacznej prognozy, którą z możliwych wartości wielkości mierzonej przyrząd uwidoczni. Można jedynie wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia jednego ze stanów możliwych. Nie można również wyznaczyć dokładnie położenia mikroobiektu. Funkcja ψ opisuje tylko praw-

[26] S. Mazierski, *Elementy kosmologii filozoficznej i przyrodniczej*, Poznań 1972, 324—337.

dopodobieństwo znalezienia cząstki w danym elemencie objętości. Dokładniej mówiąc, kwadrat bezwzględnej wartości funkcji falowej określa lokalizację mikroukładu. Konsekwencją takiego stanu rzeczy jest akceptacja indeterminizmu zasadniczego teorii kwantowej, który wyraża relacje statystyczne, zachodzące między funkcją ψ a danymi eksperymentalnymi. Należy zaznaczyć, że odmiennie interpretuje się rozbieżności — w fizyce klasycznej i mechanice kwantowej — pomiędzy wynikami pomiaru otrzymanymi eksperymentalnie a rezultatami wywnioskowanymi odpowiednio z tych dwóch typów teorii. Dyspersję wyników w mechanice klasycznej tłumaczy się błędami pomiarów w chwili początkowej, natomiast w teorii kwantów oprócz tego rodzaju niedokładności mierzenia bierze się pod uwagę fakt, że „założenia i reguły wiążące teoretyczny stan układu z danymi eksperymentalnymi zawierają nie dającą się usunąć komponentę statystyczną".[27] A jeżeli tak się rzeczy mają, to mechanika falowa w swej naturze jest teorią indeterministyczną, gdyż opis stanu układu przez nią stosowany i wnioski (prognozy) z nich wyprowadzone mają zasadniczy charakter statystyczny.[28]

Jednakże w teorii kwantów stosuje się innego rodzaju statystykę niż w fizyce newtonowskiej. Zadecydował o tym odmienny (w stosunku do cząstek w sensie makroskopowym) charakter cząstek elementarnych, które mają własności korpuskularne i falowe. Nadto posiadają one tzw. spin czyli wewnętrzny moment pędu, wyrażający się całkowitą lub połówkową wielokrotnością stałej Plancka. Cząstki elementarne podlegają również zasadzie nierozróżnialności, która głosi, że czą-

---

[27] E. Nagel, *Struktura nauki,* przekład zbiorowy z jęz. ang., Warszawa 1970, 270.

[28] Odmienną interpretację teorii kwantów zaproponował D. Bohm. W tym celu podjął próbę skonstruowania deterministycznej, dynamicznej teorii mikrozjawisk, która miała być odpowiedzią na „dogmatyczną" interpretację szkoły kopenhaskiej. Zob. D. Bohm, *Filozoficzne problemy nowego ujęcia mechaniki kwantowej,* Studia Filozoficzne, (1959) z. 1, 30—60; (1959) z. 2, 70—94; tenże: *Przyczynowość i przypadek w fizyce współczesnej,* tłum. z ang. S. Rouppert, Warszawa 1961. Por. także Z. Hajduk, *D. Bohma determinizm wobec niektórych współczesnych ujęć tego zagadnienia,* Roczniki Filozoficzne, 14 (1966) z. 3, 75—91.

Na potrzebę powrotu do obrazów przestrzenno-czasowych (deterministycznych) w mechanice kwantowej zwrócili uwagę L. de Broglie i A. Einstein. Kopenhaska interpretacja bowiem mechaniki kwantowej prowadzi do subiektywizmu zbliżonego do idealizmu w sensie filozoficznym i zaprzeczenia realności fizycznej istniejącej niezależnie od obserwatora.

stki kwantowe nie mają indywidualności. Nie możemy ich oznaczyć odrębnymi dwiema nazwami. W oddziaływaniach bowiem jednych cząstek z drugimi nie da się np. wskazać, która cząstka elementarna pobiegła w prawą stronę a która w lewą. Przytoczone własności cząstek elementarnych sprawiły, że w mechanice kwantowej fizycy posługują się specyficznymi statystykami do których należą dwie zasadnicze: statystyka Bosego-Einsteina oraz Fermiego-Diraca. Pierwszą z nich stosuje się do cząstek o spinie równym całkowitej wielokrotności stałej Plancka, opisanych przez funkcje symetryczne (ψ_s). Cząstki takie nazywają się bozonami, a zbiory takich cząstek zbiorami Bosego—Einsteina, którzy opracowali statystykę dla tego rodzaju cząstek.[29]

Natomiast cząstki o spinie równym połówkowej wielokrotności stałej Plancka opisane są przez antysymetryczne funkcje (ψ_a). Cząstki tego rodzaju noszą nazwę fermionów a ich zbiory zwą się zbiorami Fermiego—Diraca. Fizycy ci, opierając się na tzw. zasadzie Pauliego, według której dwie identyczne cząstki nie mogą się znaleźć w takim samym stanie, stworzyli statystykę dla wymienionego typu cząstek.

6. GRUPA REPREZENTATYWNYCH PRAW STATYSTYCZNYCH

Dzięki metodom statystycznym stosowanym do opisu wielkich zbiorowisk jako całości udało się wykryć w nich szereg prawidłowości typu statystycznego, które są podstawą do formułowania praw statystycznych. Jednakże dotychczas nie rozporządzamy adekwatną klasyfikacją tych praw dlatego w zakończeniu naszych rozważań ograniczymy się do przedstawienia najbardziej reprezentatywnych ujęć praw statystycznych.[30] Spośród nich wyróżniamy: (1) prawa wyrażające związki między cechami stałymi (2) prawa stwierdzające związki między cechami zmiennymi oraz (3) prawa ustalające relacje między pewną cechą stałą a cechą zmienną.

Do pierwszych należą twierdzenia, które podają jak często jakiejś cesze A (albo jej brakowi A) towarzyszy różna od niej cecha B (albo jej brak B). Związek taki zachodzi również między układem cech A_1, A_2, ..., A_n lub A_1, A_2, ..., A_n, a różną od nich cechą B (lub B). Tego rodzaju prawa stwierdzają, jaki

[29] D. Błochincew, *Podstawy mechaniki kwantowej*, tłum, z ros. Z. Kopeć i J. Werle, Warszawa 1954. 446—450, 474—477; por. też J. Rayski, Mechanika kwantowa, w: *Enc. Przyroda i technika*, 716—718.

[30] S. Mazierski, *Elementy kosmologii...*, 367—372.

procent przedmiotów mających cechę A posiada też cechę B ($p^0/_0$ A jest B) lub jaki jest stosunek liczby przedmiotów A mających cechę B do liczby przedmiotów A, czyli jaka jest częstość występowania przedmiotów B wśród przedmiotów A. $\frac{N(A, B)}{N/A} = k$, gdzie N (A) symbolizuje liczbę przedmiotów A; N (A, B) — liczbę przedmiotów A, które są B, k zaś spełnia warunek $0 \leqslant k \leqslant 1$.[31]

Prawa statystyczne ustalające związek między pewną cechą stałą a pewną cechą zmienną nazywają się prawami rozkładu statystycznego pewnej cechy zmiennej w zbiorze przedmiotów wyróżnionym przez pewną cechę C. Cechy zmienne są bądź ciągłe, bądź skokowe. Wartości zmiennej ciągłej tworzą zbiór ciągły (np. zbiór liczb rzeczywistych). Zmienne, które nie są ciągłe, nazywają się zmiennymi skokowymi. Ich wartościami są zbiory skończone. Zróżnicowanie praw rozkładu statystycznego jest uwarunkowane występowaniem w nich zmiennych ciągłych lub skokowych. Prawa rozkładu dla cechy skokowej X podają częstość, z jaką w zbiorze przedmiotów C występują przedmioty posiadające różne wartości cechy zmiennej X i nazywają się prawami rozkładu prawdopodobieństwa. Jeżeli bowiem cecha X posiada skończoną liczbę wartości, wtedy częstość z jaką pewna wartość tej cechy występuje, równa jest prawdopodobieństwu wystąpienia tej wartości.[32] Dla zmiennych ciągłych formułujemy analogiczne prawa rozkładu z tym tylko, że nie interesujemy się prawem rozkładu ich prawdopodobieństwa na poszczególne wartości zmiennej, lecz raczej prawem, na podstawie którego dałoby się obliczyć dla każdego przedziału (x_i, x_j) prawdopodobieństwo, z jakim zmienna X przyjmuje wartość z tego przedziału. Takim prawem jest tzw. prawo rozkładu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej X na poszczególne wartości, jakie ta zmienna może przyjmować.

Występująca w tym prawie gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X w przedziale (x_i, x_{i+1}) dana jest zależnością: $G(\Delta x_i) = \frac{W(\Delta x_i)}{\Delta x_1}$. Obszar zmienności zmiennej ciągłej X dzielimy na przedziały: (x_1, x_2), (x_2, x_3) ... (x_i, x_{i+1}). Przez $W(\Delta x_i)$ wyrażamy stosunek przedmiotów C, którym przysługują wartości zmiennej cechy X z przedziału (x_i, x_{i+1}), do ogółu przedmiotów C. Gęstością prawdopodobieństwa zmiennej X w prze-

[31] K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, Warszawa 1965, 291 n.
[32] Tamże, 298 nn.

dziale (x_i, x_{i+1}) zwie się stosunek prawdopodobieństwa znalezienia się wartości zmiennej X w przedziale (x_i, x_{i+1}) do rozpiętości tego przedziału. Przez *gęstość* prawdopodobieństwa zmiennej X dla wartości x_i rozumie się granicę, do której dąży gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X w przedziale (x_i, x_{i+1}), gdy rozpiętość przedziału zmierza do zera. Jeśli gęstość prawdopodobieństwa w punkcie x_i oznaczymy przez $g(x_i)$, wtedy

$$g(x_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0} G(\Delta_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{W(x_i)}{x_i}$$

Prawa statystyczne wyrażają również związki między dwiema cechami zmiennymi X i Y. Cechami takimi mogą być np. objętość i ciężar ciała. W tym przypadku interesuje nas kwestia, czy określona wartość cechy X wyznacza wartość cechy Y. Czy więc przyrostowi wartości cechy X towarzyszy przyrost cechy Y, czy też odwrotnie — przyrost wartości cechy X jest związany z ubytkiem wartości cechy Y. Prawa statystyczne określające związki między cechami zmiennymi stwierdzają zachodzenie tendencji do tego, że przyrostowi jednej cechy zmiennej towarzyszy przyrost lub ubytek drugiej i podają ilościową charakterystykę tychże tendencji. Tego rodzaju tendencje nazywane są korelacjami cech a prawa je stwierdzające i podające ich ilościową charakterystykę — prawami korelacji cech zmiennych. Istnieje różnica między zależnością funkcyjną a korelacyjną. Zależność funkcyjna między zmiennymi X i Y zachodzi wówczas, gdy każdej określonej wartości jednej zmiennej odpowiada pewna określona wartość drugiej zmiennej. Jeśli zaś określonej wartości jednej zmiennej odpowiadają różne wartości drugiej zmiennej, mamy do czynienia z zależnością korelacyjną lub korelacją.[33]

Na gruncie nauk empirycznych, wyznaczających stan układu badanego na drodze zabiegów pomiarowych można określić prawa statystyczne następująco: jeśli stan układu U w chwili t dany jest jako S_i (symbolicznie: $f(t) = S_i$), wtedy w chwili $t + 1$ zostanie zrealizowany jeden z następujących stanów układu $S_{j1}, \ldots, S_{jn}$ z prawdopodobieństwem odpowiednio $w_1, \ldots, w_n$, przy czym $\Sigma w_i = 1$. Symbolicznie:

$$f(t) = S_i \rightarrow f(t+1) = \begin{cases} S_{j1};\ w_1 \\ S_{j2};\ w_2 \\ S_{jn};\ w_n \end{cases}$$

---

[33] Tamże, 319—337.

S_{ji} — oznacza możliwe stany układu, jakie zdolny jest on przyjąć, jeśli dany jest stan początkowy układu; w_i — prawdopodobieństwo wystąpienia S_{ji}. Suma tych prawdopodobieństw równa jest jedności, ponieważ jeden z możliwych stanów końcowych układu musi się zrealizować, gdy jest dany stan początkowy.[34]

Pojęcie prawdopodobieństwa występujące w twierdzeniach probabilistycznych o treści empirycznej ma charakter empiryczny. Jednakże eksplikacja empiryczności tego pojęcia napotyka pewne trudności i dokonuje się na różne sposoby. Przedstawienie różnych stanowisk wobec tego zagadnienia wykroczyłoby poza ramy tematyczne niniejszego artykułu.

---

[34] W. Stegmüller, *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie*, Berlin 1969, Bd. I, 211—212.