Marek Porwolik

Zbiory rozmyte a nazwy nieostre

Studia Philosophiae Christianae 40/2, 355-374

2004

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
40(2004)2

MAREK PORWOLIK

ZBIORY ROZMYTE A NAZWY NIEOSTRE

1. Wprowadzenie. 2. Pojęcie zbioru rozmytego. 3. Zastosowanie pojęcia zbioru rozmytego do opisu zakresu nazwy. 4. Implikacje filozoficzne.

1. WPROWADZENIE

Teorie naukowe, dotyczące ściśle określonych dziedzin badawczych, nierzadko wywierają znaczny wpływ na ujęcie zagadnień na pozór od nich „naukowo odległych". Oddziaływanie to, wydaje się tym większe im bardziej próbują one wyjaśniać czy opisywać kwestie fundamentalne w danej dziedzinie nauki. Przykładem takiego oddziaływania jest wpływ, jaki wywarła idea zbioru rozmytego na konstruowanie aparatu pojęciowego w różnych dziedzinach współczesnej nauki. Sformułował ją w roku 1965 profesor elektrotechniki Lotfi Zadeh[1] pracujący na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley. Dotyczy ona sposobu rozumienia pojęcia zbioru.

Zainicjowanie „teorii"[2], która za punkt wyjścia obiera sobie „nowe" ujęcie tak fundamentalnej dziedziny nauki, jaką jest teoria mnogości, a dokładniej podstawowego jej pojęcia, sprowokowała naukowców do szukania sposobów wyrażenia w „duchu" tej teorii również i innych dziedzin nauki. Nie powinno więc zbytnio dziwić to, że z wykorzystaniem idei zbioru rozmytego możemy się również spotkać w zagadnieniach dotyczących języka, m.in. w związku

---

[1] L. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control 8(1965), 338-353.

[2] W sensie ścisłym trudno tu mówić o teorii rozumianej jako logicznie powiązany system definicji, twierdzeń i hipotez dotyczących danej dziedziny, tworzący spójną całość. L. A. Zadeh jest bardziej inicjatorem niż twórcą nowej teorii, która nadal powstaje i daleka jest od spójnej całości. W związku z tym, posługując się terminami: „teoria zbiorów rozmytych" i „teorie rozmyte", będziemy rozumieli je szeroko, to znaczy jako te, które nie oznaczają ścisłych, już ukształtowanych, teorii naukowych.

z kwestią rozwiązywania problemu dotyczącego posługiwania się nazwami nieostrymi.

Z drugiej strony zagadnienia te, a wśród nich także problematyka nazw nieostrych, wydają się być jak najbardziej aktualne w wielu dziedzinach życia i nauki. Dotyczy to również teologii i filozofii przełomu drugiego i trzeciego tysiąclecia. Potwierdzeniem są tu słowa Papieża Jana Pawła II, który w encyklice *Fides et ratio*, pisząc o „kwestii trwałej wartości pojęć stosowanych w definicjach soborowych", zwraca uwagę na to, że „mimo realistycznego rozumienia wielu pojęć, ich treść często okazuje się niewyraźna. Refleksja filozoficzna mogłaby się stać bardzo pomocna w tej dziedzinie"[3]. Interesująca nas kwestia możliwości wykorzystania teorii zbiorów rozmytych do opisu treści nazwy i posługiwania się nazwami nieostrymi staje więc zadziwiająco blisko najważniejszych zagadnień współczesnej filozofii i teologii.

Idea zbioru rozmytego nie jest gotową receptą umożliwiającą rozwiązywanie problemów, których źródłem jest nieostrość nazw. Propozycja ta ma swoje zalety, ale przy jej realizacji napotykamy także na wiele trudności. Niniejsza publikacja jest próbą ukazania możliwości zastosowania idei zbioru rozmytego przy rozwiązywaniu problemu nazw nieostrych, nie pomijając tu zarówno zalet, jak i pewnych słabości tego rozwiązania.

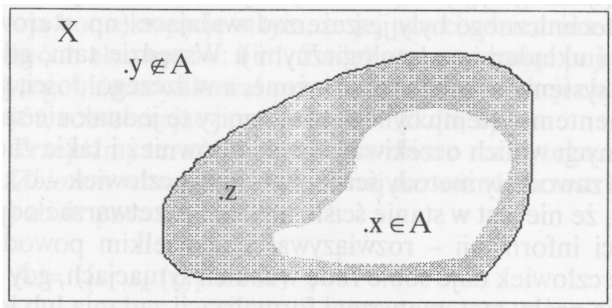
2. POJĘCIE ZBIORU ROZMYTEGO

Jednym z zasadniczych pojęć matematycznych, które umożliwia nam opis otaczającego nas świata, jest pojęcie zbioru. W znaczeniu klasycznym (cantorowskim), przez „zbiór" rozumie się, mówiąc intuicyjnie, zespół pojęć bądź przedmiotów połączonych w całość pewną wspólną własnością, spełniających pewien warunek[4]. W takim ujęciu rzeczywistości zakłada się milcząco, że dany konkretny przedmiot może albo mieć daną własność, albo jej nie mieć. *Tertium non datur*. Klasyczne rozumienie zbioru wymaga więc wyraźnego rozgraniczenia jego elementów od nie-elementów. W życiu codziennym często jednak spotykamy „zbiory", które nie mają ściśle wyznaczonych granic. W większości takich przypadków (zbio-

[3] Por. Jan Paweł II, *Fides et ratio*, Katowice 1999, n. 96.

[4] Por. J. Perzanowski, *Zbiór*, w: *Mała encyklopedia logiki*, red. W. Marciszewski, Wrocław 1970, 361-363; E. Nieznański, *Logika. Podstawy-język-uzasadnianie*. Warszawa 2000, 15-19.

rów o nieostro wyznaczonych granicach) mamy do czynienia z sytuacją przedstawioną na rys. 1.



Rys. 1. Zbiór o nieostro wyznaczonych granicach.

W ustalonej przestrzeni X (ludzi, przedmiotów, liczb itp.) można wyróżnić trzy rodzaje elementów:

a) elementy posiadające rozważaną własność ($x \in A$),

b) elementy nie posiadające rozważanej własności ($y \notin A$),

c) elementy, dla których wątpliwa jest przynależność do poprzednich grup (z).

Na gruncie matematyki długo nie widziano potrzeby rozwijania teorii zbiorów o, jak to określano, „rozmytych", niedokładnych brzegach (jedynie za wyjątkiem modeli logiki wielowartościowej). Dopiero w połowie ubiegłego stulecia, w wyniku intensywnego stosowania matematyki do innych dziedzin nauki (m.in. nauk społecznych i lingwistyki), powstała konieczność posługiwania się takimi zbiorami. Bezpośredni wpływ na powstanie teorii zbiorów rozmytych miały: rozwój teorii sterowania i teorii systemów[5] oraz rozwój logik wielowartościowych.

Zadeh, nim wprowadził pojęcie zbioru rozmytego, zajmował się różnorodnymi zagadnieniami teorii sterowania i teorii systemów. W dziedzinach tych wyraźnie nasilały się tendencje do ścisłego

---

[5] Teoria systemów jest nauką zajmującą się sposobami rozwiązywania interdyscyplinarnych zadań w złożonych systemach technologicznych, ekonomicznych, społecznych itp. Zadania te nie mają charakteru akademickiego, lecz praktyczny. Ich rozwiązanie polega na zbudowaniu modelu matematycznego, jego komputeryzacji, a w końcu na wdrożeniu uzyskanych wyników.

i sformalizowanego opisu nawet bardzo skomplikowanych systemów społeczno-ekonomicznych. Formalne opisy uzyskiwane za pomocą matematycznego języka (równań) fizyki i matematyki w zadaniach typu technicznego były jeszcze zadawalające (np. sterowanie rakietami i układami technologicznymi). Wszędzie tam, gdzie rozpatrywane systemy były bardziej złożone, a w szczególności, gdy istotnym elementem systemu był człowiek, opisy te jednak nie spełniały pokładanych w nich oczekiwań. Istniały również i takie zadania, w których zawodziły metody ścisłe, natomiast człowiek – o którym mówiono, że nie jest w stanie ściśle myśleć i przetwarzać odpowiednich ilości informacji – rozwiązywał je z wielkim powodzeniem. Fakt, że człowiek daje sobie radę w takich sytuacjach, gdy zawodzą wszelkie próby matematycznej formalizacji zadania lub jego rozwiązania, Zadeh tłumaczy zdolnością umysłu ludzkiego do myślenia w kategoriach przybliżonych. Dzięki nim człowiek może przetwarzać dane przybliżone i niejednoznaczne oraz tworzyć sobie przybliżone modele, nawet najbardziej skomplikowanych sytuacji, a także wyznaczać przybliżone rozwiązania. Teoria zbiorów rozmytych stała się więc środkiem służącym do formalizowania przybliżonego myślenia w terminach nieostrych i niejednoznacznych[6].

Tak więc sam świat nas otaczający, a raczej trudności powstające przy opisywaniu go za pomocą aparatu klasycznej teorii mnogości, stały się powodem poszukiwania takiej teorii zbiorów, która by te trudności przezwyciężyła. Jest nią, jak wielu uważa, teoria zaproponowana przez Zadeha.

W klasycznej teorii mnogości z każdym zbiorem A, w pewnej przestrzeni X można związać *funkcję charakterystyczną*[7] zbioru A, $\chi_A : X \to \{0,1\}^7$. Funkcja ta określona jest dla każdego elementu x przestrzeni X w następujący sposób:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in A \\ 0 \text{ dla } x \notin A \end{cases}$$

Zgodnie z tym ujęciem element x z przestrzeni X może do zbioru A należeć ($\chi_A(x) = 1$) lub nie należeć ($\chi_A(x) = 0$) i innej możliwości nie ma.

[6] Prof J. Kacprzyk, *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, Warszawa 1986, 23-24.

[7] Uzasadnienie możliwości wykorzystania funkcji charakterystycznych do opisu zbioru podaje np. C. Negoita, D. Ralescu, *Aplications of fuzzy sets to systems analysis*, Stuttgart 1975, 12-13.

Fundamentalnym założeniem powyższych rozważań jest przynależność bądź nieprzynależność każdego elementu x przestrzeni X do zbioru A. W odniesieniu do funkcji charakterystycznej ma to swoją konsekwencję w tym, że jej przeciwdziedzina składa się tylko z dwóch elementów: 0 i 1. Zadeh wprowadzając pojęcie zbioru rozmytego[8], zmodyfikował przeciwdziedzinę funkcji charakteryzującej zbiór, rozszerzając ją na cały odcinek [0, 1].

Przejdźmy teraz do określenia zbioru rozmytego.

Zbiorem rozmytym A w pewnej rozważnej przestrzeni X nazywamy zbiór par:

$$A = \{[x, \mu_A(x)]: x \in X\}$$

gdzie: $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ jest tzw. *funkcją przynależności* (ang. *membership function*) zbioru rozmytego A. Funkcja ta każdemu elementowi x przestrzeni X przypisuje jego *stopień przynależności* $\mu_A(x) \in [0, 1]$ do zbioru rozmytego A.

Z możliwości opisu zbioru za pomocą funkcji charakterystycznej oraz z definicji zbioru rozmytego wynika, że zbiór rozumiany w myśl klasycznej teorii mnogości jest szczególnym przypadkiem zbioru rozmytego. Teoria zbiorów rozmytych okazuje się bowiem nie tyle nową teorią zbiorów, lecz pewnym „uogólnieniem"[9] tej, którą aż do tej pory się posługujemy.

Załóżmy, że X = {1,2,..., 5} i dla tego zbioru chcemy opisać pojęcie „mała liczba". Można tego dokonać określając na przykład następujący zbiór rozmyty:

„mała liczba" = {(1, 1), (2, 3/4), (3, 1/2), (4, 1/4), (5, 0)}.

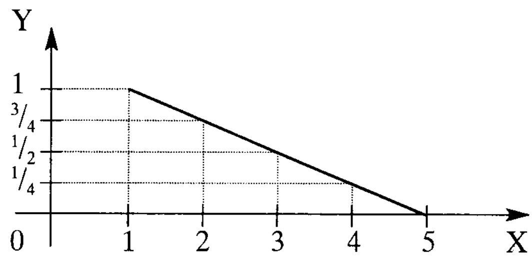
W naszym przypadku „małą liczbą" jest na pewno liczba 1, gdyż funkcja przynależności przyporządkowuje jej wartość 1, czyli „małość" w największym, możliwym stopniu. Ponadto, liczba 5 to taka liczba, która zdecydowanie nie jest „mała" – odpowiada jej wartość 0. Pozostałe liczby, tzn. 2, 3 i 4, których stopnie przynależności przyjmują wartości pośrednie między 0 i 1 są „małe" tylko w mniejszym lub większym stopniu, w zależności od wartości funkcji przynależności.

---

[8] L. Zadeh, art. cyt., 338-353.

[9] Nie możemy tutaj mówić o ścisłym uogólnieniu, gdyż teoria zbiorów rozmytych korzysta z pojęć klasycznej teorii mnogości.

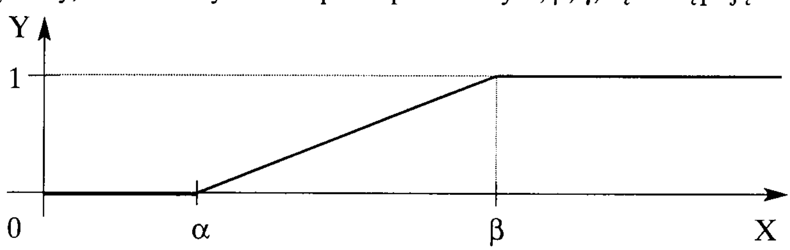
Pojęcie „mała liczba" można określić analogicznie w przypadku przestrzeni X, mającej nieskończenie wiele elementów, np. X = [1,5]. Wówczas dogodniej jest przedstawić funkcję μ_A graficznie, np. tak jak na rys. 2. W tym przykładzie, tak jak w poprzednim, „najmniejszą" liczbą jest liczba 1, największą – liczba 5, a pozostałym został przyporządkowany odpowiadający im stopień „małości".



Rys. 2. Funkcja przynależności opisująca nazwę „mała liczba"

W powyższy sposób, za pomocą zbioru rozmytego, udało się nam opisać nieprecyzyjne pojęcie, jakim jest „mała liczba". Zwróćmy uwagę na to, że nie dałoby się zilustrować tego pojęcia (bez znacznych uproszczeń) na gruncie klasycznej teorii zbiorów.

W praktyce często utożsamia się zbiór rozmyty z jego funkcją przynależności[10]. Łatwiej bowiem jest posługiwać się interpretacją graficzną danej funkcji przynależności niż zbiorem rozmytym w postaci pewnego zbioru par. W większości zastosowań zbiorów rozmytych używa się standardowych postaci funkcji przynależności[11]. Ich wykresy, scharakteryzowane przez parametry α, β, γ, są następujące:

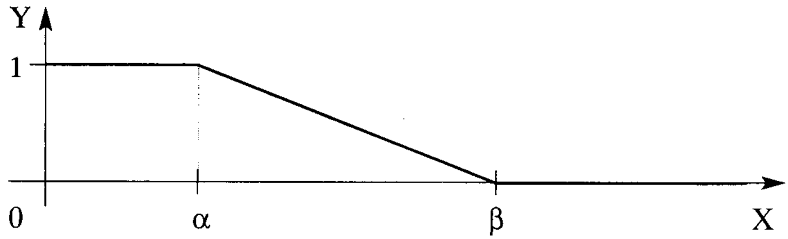


Rys. 3. Przykład funkcji typu Γ.

[10] Analogicznie jak utożsamia się zbiór z jego funkcją charakterystyczną.

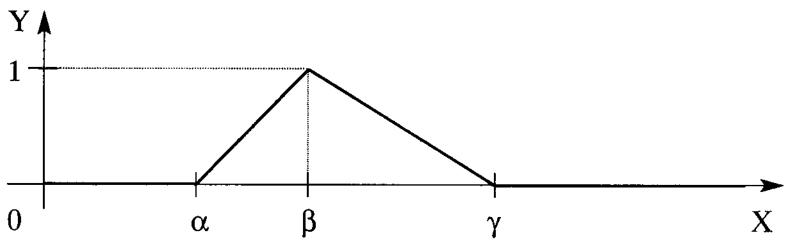
[11] Por. D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, *Wprowadzenie do sterowania rozmytego*, tłum. z ang. L. Bogdan, Warszawa 1996, 67.

Funkcja przynależności jest równa 0 dla argumentów od 0 do α, następnie w sposób liniowy przyjmuje wartości pośrednie od 0 do 1. Dla argumentów większych od β przyjmuje wartość 1.



Rys. 4. Przykład funkcji typu L (funkcje tego typu nazywa się *funkcjami trójkątnymi*[12])

Funkcja przynależności jest równa 1 dla argumentów od 0 do α, następnie w sposób liniowy przyjmuje wartości pośrednie od 1 do 0. Dla argumentów większych od β przyjmuje wartość 0.



Rys. 5. Przykład funkcji typu Λ

Funkcja przynależności jest równa 0 dla argumentów od 0 do α, następnie w sposób liniowy przyjmuje wartości pośrednie od 0 do 1. Dla β przyjmuje wartość 1. Następnie, w sposób liniowy maleje do 0. Wartość tę przyjmuje dla argumentu równego γ i większych od niego.

Za pomocą funkcji przynależności określa się wszelkie pojęcia i działania odnoszące się do pojęcia zbioru rozmytego. Istnieją przy tym różne ich definicje. Wybór najodpowiedniejszej z nich jest sprawą arbitralną[13].

---

[12] Tamże.

[13] Por. J. Kacprzyk, dz. cyt., 38-152; D. Rutkowska, M. Piliński, L. Rutkowski, *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, Warszawa 1997, 70-86; D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, dz. cyt., 71-90.

Kończąc zarys podstawowych zagadnień związanych z pojęciem zbioru rozmytego, należy zwrócić uwagę na kilka kwestii. Odnośnie do funkcji przynależności zauważmy, że dokładne stopnie przynależności nie istnieją same w sobie, lecz jedynie wskazują na pewną tendencję. Jest ona określana w sposób subiektywny przez pojedynczych ludzi lub grupy osób. Stopień przynależności nie jawi się więc jako własność podstawowa. Ponadto, stopnie przynależności nie są zdefiniowane w sposób absolutny, lecz często mniej lub bardziej zależą od kontekstu (np. *niski wzrost* u Eskimosów lub u Szwedów). Zauważmy również, że rozmytość różni się od nieprecyzyjności nie tylko tym, że ta ostatnia odnosi się do braku wiedzy o wartości parametru, ale i tym, że wyrażona jest ona jako ścisły przedział tolerancji, który jest zbiorem wszystkich możliwych wartości parametru[14].

Sformułowana przez Zadeha teoria zbiorów rozmytych stała się inspiracją do powstania w świecie nauki pewnego rodzaju twórczego zamętu. Korzystając z definicji zbioru rozmytego, starano się określać różnorakie pojęcia, które do tej pory opisywane były przez pojęcie zbioru. Aparat formalny związany z teorią zbiorów rozmytych został następnie wykorzystany przy tworzeniu konkretnych zastosowań praktycznych i to w najróżniejszych dziedzinach życia[15].

Na przykładzie takich pojęć, jak: relacja rozmyta, funkcja rozmyta i liczba rozmyta można prześledzić sposób, w jaki idea zbioru rozmytego była przenoszona na inne pojęcia matematyczne. Z jednej strony proces ten podyktowany był potrzebą utworzenia aparatu formalnego, którego źródłem było pojęcie zbioru rozmytego, a z drugiej próbą bardziej dynamicznego i bardziej zbliżonego do rzeczywistości wyrażenia tych treści, które wiązane są intuicyjnie z danym pojęciem. Nowe pojęcia „rozmyte" tworzono najczęściej w dwojaki sposób: określając je w sposób ostry za pomocą pojęć nieostrych (np. relacja rozmyta rozumiana jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego zbiorów rozmytych[16]) oraz w sposób nieostry za pomocą pojęć ostrych (np. relacja rozmyta traktowana jako podzbiór rozmyty iloczynu kartezjańskiego zbiorów[17]). Te różne możliwości

---

[14] Por. D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, dz. cyt., 53.
[15] Por. B. Miś, *Rozmyty świat*, Wiedza i Życie 2(1997), 54-58.
[16] Por. W. Ostasiewicz, *O zbiorach rozmytych*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria III: Matematyka Stosowana 16(1980), 13.
[17] Por. J. Kacprzyk, dz. cyt., 111.

w tworzeniu nowych pojęć prowadziły do powstawania czasami znacznie różniących się definicji tego samego pojęcia. Uwagi te dotyczą również określania poszczególnych działań dla tychże pojęć. W konsekwencji nie prowadziło to jednak do niepotrzebnego zamieszania, lecz do stopniowego wyłaniania się typowych propozycji sposobów rozumienia danych pojęć nieostrych.

3. ZASTOSOWANIE POJĘCIA ZBIORU ROZMYTEGO DO OPISU ZAKRESU NAZWY

Powstanie teorii zbiorów rozmytych przyniosło ze sobą generalną zmianę w sposobie opisywania innych pojęć. Można mówić tutaj o dwóch tendencjach związanych z tym faktem. Po pierwsze, używając pojęcia zbioru rozmytego przy konstrukcji pojęć, tworzono nowy sposób ich opisu (np. funkcja rozmyta, liczba rozmyta). Po wtóre, definicja zbioru rozmytego umożliwiała taki opis, niekoniecznie przez formalne odwołanie się do tej definicji (np. relacja rozmyta). W praktyce trudno rozdzielić owe tendencje. Razem tworzą one typowe rodzaje sposobów zastosowania pojęcia zbioru rozmytego do opisu innych pojęć.

Biorąc pod uwagę szerokie zastosowania teorii zbiorów rozmytych (wydaje się, że dotyczą one prawie wszystkich dziedzin nauki), można przypuszczać, że również w przypadku sposobu opisu nazw nieostrych teoria ta znajdzie swoje konkretne implikacje.

Najpierw należy dokonać właściwego określenia nazwy nieostrej. Jak powszechnie wiadomo istnieje wiele mniej lub bardziej odbiegających od siebie określeń tej nazwy[18]. Rozpatrzmy tę, która uchodzi za najbardziej powszechną, a którą proponuje Kazimierz Ajdukiewicz[19]. W myśl tejże definicji nazwy nieostre to te, którym zwyczaj językowy lub konwencja nie przyporządkowują żadnego zakresu, jakkolwiek o pewnych przedmiotach przesądza, że są jej desygnatami, a o innych, że nimi nie są. W tym przypadku, poza tymi dwiema klasami przedmiotów, istnieją takie przedmioty, w odniesieniu do których nie jesteśmy w stanie orzec, czy są one desygnatami danej nazwy, czy nimi nie są. Klasę

---

[18] Por. T. Kubiński, *Nazwy nieostre*, Studia Logica 7(1958), 116-179; A Schaff, *Wyrazy nieostre i granice ich precyzowania*, w: *Szkice z marksistowskiej filozofii języka*, red. A. Schaff, Warszawa 1967, 71-102.

[19] Por. K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, Warszawa 1975, 58.

tych przedmiotów nazywa się często brzegiem lub zakresem nieostrości danej nazwy.

W związku z potrzebą posługiwania się nazwami nieostrymi pojawił się postulat ich ścisłego opisu, w tym ścisłego opisu ich brzegu. Nie powinien on być jednak związany z pewną konwencją aprioryczną, umożliwiającą przekształcenie danej nazwy nieostrej w ostrą. Chodzi tu bowiem o to, by nie wchodzić w kolizję z danymi płynącymi do nas z rzeczywistości, lecz aby tę rzeczywistość wiernie i dokładnie opisywać. Założenia te stały się inspiracją dla decyzji, aby do opisu zakresu nieostrości (brzegu) nazwy użyć pojęcia stopnia przynależności, z którym mamy do czynienia w przypadku zbiorów rozmytych. Na taką możliwość zastosowania zbiorów rozmytych zwraca uwagę Mieczysław Lubański[20]. Sama operacja ma polegać na odniesieniu do danego przedmiotu „ostrej" treści danej nazwy w pewnym tylko stopniu. Stopień ten wyraża intensywność zależności istniejącej pomiędzy rozpatrywanym przedmiotem a daną nazwą i w związku z tym przyjmuje wartości pomiędzy 0 a 1, a więc takie, jakie przyjmuje funkcja przynależności opisująca zbiór rozmyty.

Można powiedzieć, że przynależność do pewnego zbioru w sensie klasycznym polega na posiadaniu pewnej własności lub ściśle określonego ich zespołu. Wyznacznikiem przynależności określonego przedmiotu do zakresu danej nazwy jest posiadanie przez ten przedmiot pewnych charakterystycznych własności. Tak, jak odnośnie do zbiorów rozmytych możemy mówić o przynależności danego elementu tylko w pewnym stopniu do tego zbioru, tak w interesującym nas przypadku możemy mówić o częściowej „przynależności" danego przedmiotu do zakresu danej nazwy (byciu jej desygnatem). Treść tej nazwy nie jest określona przez występowanie cech charakterystycznych dla danej nazwy, lecz przez stopień intensywności, z którą te własności występują[21].

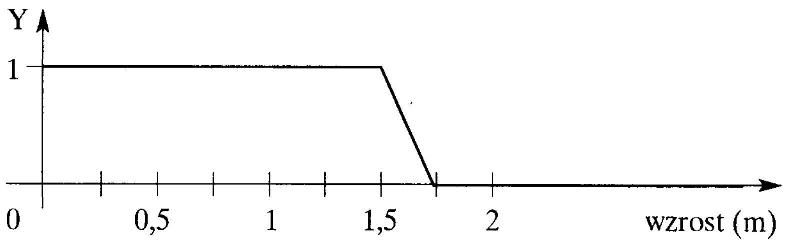
Gdy mamy do czynienia tylko z jedną własnością, która wyznacza treść nazwy, wówczas stopień przynależności (tak jak i w przypadku zbioru rozmytego) wyraża funkcja, której przeciwdziedziną jest od-

---

[20] Por. M. Lubański, *Zbiory rozmyte i operacje na nich*, Roczniki Filozoficzne 26(1978)3, 77-87; Tenże, *Nazwy nieostre a zbiory rozmyte*, Studia Philosophiae Christianae 14(1979)1, 31-48; Tenże, *Zbiory i algebry*, Studia Philosophiae Christianae 18(1982)1, 199-207; Tenże, *Informacja – System*, w: M. Heller, M. Lubański, Sz. W. Ślaga, *Zagadnienia filozoficzne współczesnej nauki*, Warszawa 1997[4], 109-153.

[21] Por. W. Marciszewski, *Treść nazwy*, w: *Mała encyklopedia logiki*, dz. cyt., 333.

cinek [0,1]. Wartość 1 przyjmowana jest wtedy, gdy dany przedmiot posiada w sposób pełny rozpatrywaną własność, natomiast wartość 0, gdy nie można się jej w żaden sposób w nim doszukać.



Rys. 6. Opis nazwy nieostrej „mały człowiek" przy pomocy funkcji przynależności
Ludzie, których wzrost jest mniejszy niż 1,5 m posiadają własność „małości" w pełni, co wyraża wartość 1 funkcji przynależności. Dalej intensywność tej własności maleje do 0 i przyjmuje tę wartość dla wzrostu większego lub równego 1,75 m.

Należy zauważyć, że z podobną koncepcją sposobu opisu zakresu nazwy wychodzi propozycja wykorzystania do takiego opisu określeń metrycznych[22]. Różnica polega jednak na tym, że na funkcję, którą się w tym celu posługuje, nie nakłada się tam żadnych założeń dotyczących jej przeciwdziedziny.

W związku z propozycją, aby opisywać treść danej nazwy, posługując się funkcją przynależności, powstaje problem wyznaczenia tej funkcji w taki sposób, by było to zgodne z rzeczywistością, która ma być przez nią opisywana. Powyższe zagadnienie sprowadza się zasadniczo do sposobu określenia za pomocą funkcji przynależności takich nazw nieostrych, których treść opisywana jest tylko przez jedną cechę charakterystyczną oraz do określenia sposobów wyrażania zależności pomiędzy tymi nazwami.

Nazwy nieostre możemy uważać za wartości pewnych zmiennych lingwistycznych[23]. Przy ich opisie możemy posłużyć się zbiorami

[22] Por. T. Pawłowski, *Tworzenie pojęć i definiowanie w naukach humanistycznych*, Warszawa 1970, 52.

[23] *Zmienna lingwistyczn*, intuicyjnie rzecz biorąc, to taka zmienna, której wartościami nie są liczby, lecz słowa lub zdania w określonym języku.

rozmytymi. Do ich wyznaczenia wystarczy znajomość zbiorów rozmytych, określających nazwy najbardziej podstawowe dla danej nazwy (np. dla nazwy „bardzo młody, ale nie wysoki człowiek" są nimi nazwy „młody człowiek" i „wysoki człowiek") oraz następujących „elementów dodatkowych"[24]:

„nie" $x = \bar{x}$,

x „i" $y = x \cap y$,

x „lub" $y = x \cup y$,

„bardzo" $x = x^2$,

„nieco mniej niż" $x = x^{1,25}$,

„nieco więcej niż" $x = x^{0,75}$,

gdzie x jest daną zmienną lingwistyczną. Kwestia sposobu określenia tych „elementów dodatkowych" jest sprawą arbitralną, a ich ilość nie ogranicza się do wyżej wymienionych. Na postać funkcji przynależności opisującej daną nazwę ma wpływ ponadto sposób określenia samych działań na zbiorach rozmytych.

Za pomocą funkcji przynależności określających nazwy najbardziej podstawowe oraz zbioru „elementów dodatkowych" możemy wyznaczyć funkcję przynależności opisującą daną nazwę. W ten sposób nie trzeba niezależnie, dla każdej nazwy z osobna, wyznaczać postać tej funkcji. W oparciu o takie, wcześniej przyjęte, formy funkcji przynależności oraz postacie „elementów dodatkowych" można próbować budować „rachunek nazw nieostrych". W związku z możliwością istnienia wielu (choć niekoniecznie znacznie różniących się między sobą) postaci funkcji przynależności opisujących nazwy podstawowe oraz sposobów wyrażenia „elementów dodatkowych" może powstać wiele różnych rachunków tych samych nazw nieostrych.

Kwestia wyznaczenia funkcji przynależności opisujących nazwy najbardziej podstawowe jest również sprawą arbitralną, choć postać tych funkcji, z założenia, nie może nigdy stracić związku z rzeczywistością, którą ma opisywać. W tym celu dokonuje się dla danych elementów empirycznego pomiaru ich stopnia przynależności. Wyraża on sposób rozumienia przez użytkowników danego pojęcia rozmytego, np. „młody człowiek". Powstają tu podobne trudności, z którymi mamy do czynienia, w przypadku skalowania psycholo-

[24] Por. J. Kacprzyk, dz. cyt., 170-175.

gicznego. Spowodowane są one między innymi kwestią wiarygodności i przetwarzania danych oraz niestałością sądów ludzkich[25].

Stopień przynależności danego elementu do zbioru rozmytego określa się zazwyczaj jako stosunek ilości odpowiedzi respondentów mówiących, że element ten należy do danego zbioru rozmytego, do wszystkich udzielonych przez nich odpowiedzi[26]. Powstaje jednak niebezpieczeństwo zatarcia różnicy pomiędzy „rozmytością" i prawdopodobieństwem[27]. Nie chodzi bowiem w tym przypadku o wyrażenie prawdopodobieństwa danego sądu, lecz o odzwierciedlenie jego intensywności, co nie zawsze musi być identyczne.

Bezpośrednio w oparciu o dane uzyskane w badaniach empirycznych można również próbować tworzyć pewien rachunek pojęć rozmytych. W tym celu, dla wyrażenia zależności między tymi pojęciami, wprowadza się *metrykę*[28], która służy do „mierzenia odległości" pomiędzy ich funkcjami przynależności. Możemy się posługiwać wieloma różnymi postaciami takiej metryki[29].

W przypadku zastosowań praktycznych, w celu przeprowadzania odpowiednich obliczeń, wskazana jest jednolita pod względem postaci reprezentacja funkcji przynależności. Podyktowane jest to ograniczonością i efektywnością komputera i wymaganiami analizy danych. Tym wymaganiom można sprostać, stosując funkcje przynależności o ujednoliconym kształcie oraz parametryczną definicję funkcji[30]. Tworzy się je najczęściej z funkcji trójkątnych, trapezoidalnych (tzn. o wykresie w kształcie trapezu) i z funkcji, których wykres ma postać dzwonu[31]. Wybór tego rodzaju funkcji podyktowany jest łatwością uzyskania opisu parametrycznego, minimalną

---

[25] Tamże, 69.

[26] Por. Tamże; M. Nowakowska, *Metodologiczne problemy pomiaru pojęć nieostrych*, Przegląd Psychologiczny 20 (1977) 1, 142.

[27] Por. W. Ostasiewicz, art. cyt., 17; C. Negoita, D. Ralescu, dz. cyt., 31.

[28] *Metryką* nazywamy funkcję d określoną na iloczynie kartezjańskim XxX, przyjmującą wartości rzeczywiste nieujemne i spełniającą następujące warunki:

1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ dla wszelkich $x, y \in X$;
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ dla wszelkich $x, y, z \in X$.

Zbiór F wraz z metryką (odległością) d nazywamy *przestrzenią metryczną*.

Por. R. Engelking, *Topologia ogólna*, Warszawa 1975, 303-304; J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, Warszawa 1989, 18.

[29] Por. M. Nowakowska, art. cyt., 133-135.

[30] Por. D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, dz. cyt., 135-136.

[31] Por. Tamże, 65-68; J. Kacprzyk, dz. cyt., 135.

ilością pamięci potrzebnej do jego przechowywania i efektywnością w przetwarzaniu przez maszynę wnioskującą. Szczególne miejsce pod względem powyższych własności zajmuje opis dokonywany za pomocą funkcji trójkątnej, które też znajdują najczęstsze praktyczne zastosowania[32].

4. IMPLIKACJE FILOZOFICZNE

Jak pisze Lubański[33], dla celów poznawczych próbuje się często wyrazić świat nas otaczający w postaci pewnego modelu. Takie modele stosowane w nauce, pomimo pewnych uproszczeń, zwiększają szansę rozwiązywania istotnych zagadnień dotyczących tego, co opisują. Generalnie rzecz biorąc, można mówić o dwóch podstawowych modelach rzeczywistości: statycznym i dynamicznym.

Model statyczny ujmuje rzeczywistość jako zespół indywiduów, mających stałą „naturę" i ściśle określony sposób działania. Indywidua te mogą powstawać i zanikać, lecz w czasie, gdy istnieją charakteryzują się pewną „istotową" stałością. Model ten pozwala twierdzić, że albo dany przedmiot istnieje albo nie istnieje, pozwala orzekać posiadanie przez przedmiot danej własności lub jej nieposiadanie i leży u podstaw klasycznej logiki dwuwartościowej[34].

Nie zawsze jednak ta logika dwuwartościowa spełniała stawiane jej wymagania. W 1944 roku Hans Reichenbach wykazał, że mechanika kwantowa nie da się bez sprzeczności zaksjomatyzować na bazie klasycznej logiki. Można natomiast łatwo i bezsprzecznie tego dokonać na gruncie logiki trójwartościowej Łukasiewicza[35]. Często więc konieczne jest przy opisie rzeczywistości posługiwanie się logiką szerszą od klasycznej, która uwzględnia „stawanie się" jako element struktury otaczającej nas rzeczywistości. Traktuje się tu rzeczywistość nie jako zespół niezmiennych indywiduów, ale jako zespół pewnych procesów. Zmiany te zachodzą na płaszczyźnie subatomowej, atomowej, cząsteczkowej, wśród istot żywych, w skali kosmicznej. Rozumie się je nie tyle jako przemiany jednych typów w inne, ale jako nieustanny proces tworzenia. Czymś realnym jest

[32] Por. D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, dz. cyt., 136.
[33] Por. M. Lubański, *Informacja - System*, art. cyt., 109-153.
[34] Tamże, 141-142.
[35] Por. J. M. Bocheński, *Współczesne metody myślenia*, Poznań 1993, 89.

w tym ujęciu raczej proces stawania się, niż konkretne, ściśle określone stany[36].

Takie dynamiczne ujęcie rzeczywistości można, jak twierdzi Lubański, opisywać przy użyciu teorii zbiorów rozmytych. Z podobnym dynamizmem spotykamy się na płaszczyźnie języka. W przypadku interesujących nas w sposób szczególny nazw nieostrych, mamy do czynienia raczej z pewnym procesem lub, mówiąc ściślej, z wieloma procesami określania znaczenia danych słów, niż z czymś określonym przez jasne, sztywne ramy. Język jest w tym ujęciu pojmowany jako pewna dynamiczna całość podlegająca nieustannym przemianom, tak jak i cała rzeczywistość, której język jest elementem.

Postulując właśnie taki sposób opisu nazw, Lubański podkreśla ponadto[37], że opis ten przyznaje priorytet świata nas otaczającego w stosunku do naszych koncepcji poznawczych. Taki opis nazw nieostrych nie rozstrzyga bowiem definitywnie kwestii przyczyn samej nieostrości. Mogą one mieć swe źródło zarówno w samej specyfice rzeczywistości nas otaczającej, jak i w samym procesie poznawania jej czy jej opisu. Teoria zbiorów rozmytych nie ustala ich liczby oraz w przypadku, gdyby istniało ich wiele (co wydaje się najbardziej zgodne z faktycznym stanem rzeczy), nie rozstrzyga o tym, które z nich tworzą główny nurt.

Dzięki zastosowaniu „teorii" zbiorów rozmytych do nazw nieostrych, jak podkreśla Lubański, powiększono zakres pojęć, którym możemy przypisać względnie ścisłe znaczenie. Dotyczy to szczególnie pojęć występujących w naukach humanistycznych. Przez takie poszerzenie zakresu ścisłego języka w nauce, poszerzono automatycznie i sam zakres ścisłości w naukach[38].

Nazwami nieostrymi zaczęto się również posługiwać w zastosowaniach praktycznych. Posłużyły one zarówno do opisania samej rzeczywistości nas otaczającej, jak i wykorzystano je przy konstrukcji zasad wnioskowania rozmytego. Było to możliwe dzięki ich matematycznemu opisowi, który podsunęła teoria zbiorów rozmytych.

Postulowane rozwiązanie kwestii nazw nieostrych nie wyklucza oczywiście innych sposobów rozwiązania tego zagadnienia. Ponad-

---

[36] Por. M. Lubański, *Informacja – System*, art. cyt., 141-142.

[37] Por. Tenże, *Nazwy nieostre a zbiory rozmyte*, art. cyt., 42.

[38] Por. Tenże, *Informacja – System*, dz. cyt., 142-143.

to rozwiązanie to nie jest wolne od pewnych braków, których chciałoby się uniknąć. Przyjrzyjmy się im teraz.

Jednym z nich jest sprawa wyznaczenia funkcji przynależności, opisującej daną nazwę nieostrą. Wiadomo, że zastosowania praktyczne preferują pewne standardowe typy funkcji. Z drugiej strony, otaczający nas świat wydaje się na tyle bogaty, że nie sposób go, posługując się tylko takimi funkcjami w sposób precyzyjny opisać. Ten problem zdaje się być stale otwarty. Napotykamy tu znowu na pewne uproszczenia w opisie nazw nieostrych, których przecież pragnęliśmy uniknąć. Pocieszającym jest jednak fakt, że nie są one aż tak drastyczne jak w przypadku innych sposobów opisu nazwy nieostrej.

Opis nazw nieostrych za pomocą funkcji przynależności jest opisem, który nie zawsze ściśle ujmuje treści charakterystyczne danej nazwy. To „dopasowywanie" postaci funkcji przynależności do danej nazwy pozwala uwzględnić nie tylko dynamiczny charakter języka. Biorąc pod uwagę ciąg funkcji przynależności, które aproksymują treść danej nazwy nieostrej, stajemy przed odpowiedzią na pytanie, czy i na ile nasze poznanie i szerzej nauka mają charakter aproksymacyjny[39]. W naszym przypadku, elementami tego ciągu przybliżeń są kolejne funkcje przynależności, „bardziej adekwatne" do opisywanej przez nie rzeczywistości. Można wówczas postawić pytanie o jego zbieżność. W celu rozstrzygnięcia tej kwestii, można by próbować użyć odpowiedniego aparatu matematycznego, np. w postaci twierdzeń o punkcie stałym lub dotyczących zbieżności ciągów funkcyjnych[40].

Z kwestią takiej aproksymacji związane jest również pytanie, czy wystarczy w tym celu użyć jedynie funkcji pewnych określonych typów. Matematyka teoretyczna zna bowiem twierdzenia, które mówią, że w pewnych przestrzeniach funkcje, posiadające określone własności, mogą być aproksymowane za pomocą np. ciągu wielomianów[41]. Pytanie jest o tyle ważne, że odpowiedź na nie może sugerować taki typ funkcji, jaki najdokładniej, a przynajmniej w sposób wystarczający, opisuje daną rzeczywistość.

---

[39] Por. E. Hisdal, *The philosophical issues raised by fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems 25(1988)3, 352.

[40] Por. M. Heller, *Szczęście w przestrzeniach Banacha*, Kraków 1995, 84-98; W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, Warszawa 1986, 50-52; R. Engelking, dz. cyt., 493-495; J. Musielak, dz. cyt., 231-252.

[41] Por. R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej*, cz. III, Warszawa 1994, 299.

Pozostaje jednak do rozwiązania problem możliwości zmiany treści danej nazwy w przeciągu rozpatrywanego czasookresu, którego dotyczy ciąg funkcji przynależności. Ciąg przybliżeń, z powodu dynamicznej natury języka, mógłby nie być nigdy zbieżny do określonej funkcji „doskonałe" opisującej daną nazwę. Z takim przypadkiem mielibyśmy do czynienia między innymi wtedy, gdy nieostrość nazwy nie wynikałaby z niezakończonego jeszcze procesu konstytuowania się treści danej nazwy, lecz była spowodowana samą specyfiką danej nazwy.

Przy wyznaczaniu funkcji przynależności nie możemy brać pod uwagę tylko rzeczywistości, której dotyczy dana nazwa, ale należy również uwzględnić wzajemne związki pomiędzy poszczególnymi nazwami. Nie zawsze jednak w danej dziedzinie życia i nauki dysponujemy odpowiednio precyzyjnym aparatem pojęciowym, mającym postać na przykład systemu szeroko rozumianych „terminów pierwotnych" i operacji dokonywanych na nich. W przypadku braku takiej aparatury pojęciowej, aby ustalić związki syntaktyczne między nazwami, należy przynajmniej z pewną ostrożnością podejść do wyznaczania funkcji przynależności opisujących te zależności.

Z problemem tym mamy do czynienia na przykład przy charakterystyce nazw, którym przyporządkowano pewną rodzinę znaczeń[42]. Funkcje przynależności opisujące nazwy takiego typu powinny być identyczne w stosunku do tych cech, które są wspólne dla danej rodziny znaczeń. „Zbyt dalekie" jednak uproszczenia mogą prowadzić do nieporozumień. Weźmy na przykład pod uwagę nazwę nieostrą „mały zbiór". Nazwa ta posiada pewną rodzinę znaczeń. Elementy tej rodziny mogą być wyznaczone przez różne kategorie małości. Są nimi takie, jak na przykład: „małość" w sensie miary, czy mocy zbioru i w sensie topologii. Odpowiednio mamy tu zbiory miary zero, zbiory przeliczalne i zbiory pierwszej kategorii. Nie jest jednak tak, że każdy zbiór miary zero jest również przeliczalnym zbiorem pierwszej kategorii. Przykładem może być tzw. *zbiór Cantora*[43], który jest nieprzeliczalnym zbiorem pierwszej kategorii miary zero. Jak dalece te „małości" mogą się różnić od siebie świadczy fakt, że przestrzeń $\mathbf{R}^k$ można rozłożyć na rozłączną sumę

[42] Por. T. Pawłowski, dz. cyt., 121-148.
[43] Por. Z. Moszner, *Elementy teorii mnogości i topologii*, Kraków 1973, 159-163.

zbioru pierwszej kategorii i zbioru miary zero[44]. Wynika stąd, że zbiory w tak rozumianej „małości" nie mogą mieć identycznie takich samych funkcji przynależności, gdyż wówczas cała przestrzeń $\mathbf{R}^k$ byłaby mała pod względem miary i pod względem topologii, co jest nieprawdą. W kontekście analizy tego przykładu pewnym „zaskoczeniem" jest jednak twierdzenie o dualności mówiące, że pod określonymi warunkami istnieje możliwość wymiany orzekań w pewnych rodzajach twierdzeń dotyczących zbiorów miary zero i zbiorów pierwszej kategorii[45].

Z filozoficznego punktu widzenia ciekawym wydaje się również pytanie, czy funkcję przynależności trzeba wyznaczać dla wszystkich elementów jej dziedziny. Pytanie to staje się zasadne w kontekście trudności, jakie trzeba przezwyciężyć wyznaczając jej wartości, na przykład w pracochłonnych badaniach empirycznych. Wówczas, wystarczyłoby określenie ich tylko dla pewnych „szczególnych" elementów dziedziny tej funkcji. W matematyce istnieją twierdzenia mówiące o tym, że w pewnych przestrzeniach topologicznych równość dwóch ciągłych funkcji na zbiorze gęstym w tej przestrzeni pociąga za sobą ich identyczność w całej dziedzinie[46]. Zbiorem gęstym w przestrzeni liczb rzeczywistych jest na przykład zbiór liczb wymiernych. W tym przypadku wyznaczanie wartości funkcji przynależności wystarczyłoby zawęzić tylko do zbioru liczb wymiernych. Na pewno nie rozwiąże to całkowicie trudności w wyznaczaniu wartości funkcji przynależności. Możliwość wykorzystania takich twierdzeń wskazuje jednak, że próby „uproszczenia" procedury wyznaczania funkcji przynależności są zasadne i możliwe (przynajmniej na płaszczyźnie teoretycznej) do zrealizowania.

Implikacje filozoficzne teorii zbiorów rozmytych dotyczą zarówno samego otaczającego nas świata, jak i językowych rezultatów jego poznawania. Otaczająca nas rzeczywistość, poznanie, język mają bowiem charakter dynamiczny, dający się stosunkowo adekwatnie opisać za pomocą idei zbioru rozmytego. Szybki rozwój różnych „teorii rozmytych" może skłonić nas także do postawienia pytania o relację ich do rozważań teologicznych. Wynika to z bardziej ogólnego ujęcia uznającego filozofię jako warunek konieczny teologii.

[44] Por. J. Oxtoby, *Measure and Cathegory*, New York 1970, 74-79.
[45] Tamże.
[46] Por. R. Engelking, dz. cyt., 58.

Nie da się tej ostatniej uprawiać bez posłużenia się odpowiednią aparaturą pojęciową zaczerpniętą z filozofii oraz przesłankami dotyczącymi bytu w ogóle, a człowieka w szczególności[47].

Odnośnie do związku zbiorów rozmytych i nazw nieostrych i ich relacji do teologii, można by prześledzić dorobek myśli teologicznej w aspekcie pojęć urabianych za pomocą pewnych „stopni przynależności". Przykładem może być określenie Kościoła w *Konstytucji Dogmatycznej o Kościele „Lumen Gentium" Soboru Watykańskiego II.* W punktach 14-16 tej Konstytucji mowa jest o tak zwanych „kręgach przynależności" do społeczności Kościoła. Mamy tu ludzi, którzy do Niego *wcieleni są w pełni* (katolicy), dalej tych, z którymi jest *związany z licznych powodów* (chrześcijanie), następnie tych, którzy *w rozmaity sposób przyporządkowani są do Niego* (wymienianych w następującej kolejności: Żydzi, wszyscy uznający Stworzyciela w tym przede wszystkim muzułmanie, szukający nieznanego Boga po omacku i wśród cielesnych wyobrażeń, ci, którzy bez własnej winy nie znają Ewangelii ale kierują się głosem swego sumienia i pragną wieść życie uczciwe)[48]. Mimo pewnych nieprecyzyjności („wcielenie do Kościoła", „związanie z Nim", „przyporządkowanie do Niego"), posługując się powyższymi kryteriami, można próbować wyrazić sposób przynależenia do społeczności Kościoła za pomocą funkcji przynależności. To jednak nie jest tu najważniejsze. O wiele ciekawsze zdaje się być pytanie, czy spotykamy się tutaj z tą samą ideą, z którą mamy do czynienia przy opisie treści nazwy za pomocą zbioru rozmytego. Jeżeli na nie będziemy w stanie udzielić twierdzącej odpowiedzi, zrodzi ona nowe kwestie otwarte. Dotyczyć one mogą m.in. zastosowania dorobku teorii zbiorów rozmytych do opisu i posługiwania się pojęciami teologicznymi, czy samych metodologicznych założeń różnych sposobów ich opisu.

Zastosowanie teorii zbiorów rozmytych do nazw nieostrych nie jest dotychczas w pełni opracowane. Na wiele pytań rodzących się w związku z tym zagadnieniem, nie znamy jeszcze satysfakcjonującej odpowiedzi. Obszar naszej „niewiedzy" jest jednak na pewno znacznie większy, gdyż wiele pytań dotyczących tego zagadnienia nie zostało jeszcze postawionych. Idea zbioru rozmytego wywarła

---

[47] Por. A. B. Stępień, *Wstęp do filozofii*, Lublin 1995, 41.

[48] Por. *Konstytucja dogmatyczna o Kościele „Lumen gentium"*, w: *Sobór Watykański II, Konstytucje, Dekrety, Deklaracje*, Poznań 1986, nn. 14-16.

i nadal jeszcze wywiera silny wpływ na współczesną naukę. Dalsze badania pokażą, czy koncepcja ta przyjmie postać ściśle określonej teorii. Rozstrzygną one, czy idea zbioru rozmytego była tylko pewną „naukową modą" końca XX wieku, czy jest kolejnym krokiem w procesie poznawania i opisu świata nas otaczającego.

FUZZY SETS AND VAGUE NAMES

Summary

In 1965 L. A. Zadeh introduced the concept of a fuzzy set. The aim of this article is to present a proposal to use the fuzzy set theory for describing denotations of names. Such an application of fuzzy sets was also suggested in the works of M. Lubański. The article reveals the advantages of that solution, discusses the probable difficulties, and suggests a possible use of theorems concerning mathematical functions.