Michał Heller

Bolzano i podstawy matematyki

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 43 [Numer specjalny: Nagroda Templetona 2008], 141-145

2008

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLIII (2008)

BOLZANO I PODSTAWY MATEMATYKI

◇ Jerzy Dadaczyński, *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, Rozprawy OBI, OBI — Kraków, Biblos — Tarnów 2006, s. 441.

Książka, jaką mamy przed sobą, jest dziełem monumentalnym nie tylko ze względu na objętość, lecz także ze względu na swoją zawartość — jest to ważna i oryginalna monografia z historii podstaw matematyki. Jej celem jest uzasadnienie nowatorskiej tezy, że poprzednikiem tezy logicyzmu był Bernard Bolzano, już 70 lat przed „klasykami logicyzmu": Fregem, Russellem i Whiteheadem. Jak pisze autor rozprawy, na początku XX w. logicyzm rozumiano jako koniunkcję czterech tez: (1) Wszystkie pojęcia matematyki można zdefiniować przy pomocy pojęć logicznych. (2) Wszystkie aksjomaty matematyki można wyprowadzić z aksjomatów logiki. (3) Z aksjomatów matematyki można wyprowadzić wszystkie tezy matematyki. (4) Wyprowadzania, o których mowa w (2) i (3) opierają się na jednej logice. Wprawdzie Bolzano nigdzie tego programu *explicite* nie sformułował, ale w swojej badawczej praktyce „był blisko" niego. Analiza jego prac pokazuje, że „dążył on do sprowadzenia matematyki do pewnej, szkicowanej przez siebie, teorii, w którą, w „sposób naturalny", uwikłany był aksjomat nieskończoności" (s. 16). Trzeba oczywiście wziąć też pod uwagę fakt, że Bolzano pracował w „paradygmacie Euklidesowym", kiedy to jeszcze nowoczesne pojęcie systemu dedukcyjnego nie było skrystalizowane. Powyższa teza jest o tyle nowatorska, że przed wydaniem w drugiej połowie XX w. przedtem niepublikowanych prac Bolzana nie było podstaw do takiej tezy, a po ich opublikowaniu historycy matematyki nie zwrócili na omawiany fakt baczniejszej uwagi.

Warunkiem programu logicyzmu, jaki *de facto* realizował Bolzano, była „unifikacja" ówczesnej matematyki. Aby to osiągnąć, należało przede wszystkim dać analizie matematycznej solidne podstawy (m.in. uwolnić ją z "szaty rozumowań mechanicznych i geometrycznych i od intuicyjnie rozumianych 'nieskończenie małych'"). I pod tym względem Bolzano okazał się prekursorem. W tym programie należy wyróżnić dwa podprogramy: (1) tzw. płytka geometryzacja analizy, tzn. oparcie jej na arytmetyce liczb rzeczywistych oraz (2) dogłębna arytmetyzacja analizy, tzn. oparcie jej na arytmetyce liczb naturalnych. Płytką arytmetyzację analizy Bolzano wykonał przez poprawne zdefiniowanie granicy ciągu, granicy funkcji, ciągłości funkcji i pochodnej funkcji. Warunkiem przeprowadzenia dogłębnej arytmetyzacji analizy jest skonstruowanie modelu liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych (model tych ostatnich w dziedzinie liczb naturalnych był już znany). Tu ma miejsce interesujący epizod.

Ponieważ rękopisy Bolzana, opublikowane w 1962 r., zawierały pod tym względem wiele niejasności, należało zaproponowaną przez niego procedurę konstrukcji liczb rzeczywistych odpowiednio zrekonstruować. J. Dadaczyński obszernie omawia trzy takie rekonstrukcje, a mianowicie rekonstrukcję K. Rychlika, B. van Rootselaara oraz D. Laugwitza. Ta ostatnie okazała się trafna. Gdy w 1976 r. opublikowano resztę rękopisów Bolzana, stało się jasnym, że uściślił on swoje pierwotnie nieścisłe definicje dokładnie tak, jak zrekonstruował je Laugwitz. Dadaczyński konkluduje: „Interpretacja konstrukcji Bolzana, dokonana przez Laugwitza i potwierdzona zmianami tekstu samego Bolzana, pokazuje, że była ona oparta wyłącznie na podstawach arytmetycznych — nieskończonych ciągach liczb wymiernych" (s. 211). W ten sposób Bolzano dokonał w istocie dogłębnej arytmetyzacji analizy matematycznej.

Należy w tym miejscu zadać pytanie, w jakim sensie Bolzano antycypował Cauchy'ego, Weierstrassa, Cantora i innych. We wstępie do swej rozprawy Dadaczyński pisze, iż będzie „'życzliwie' dopatrywać się w poszczególnych poczynaniach Bolzana antycypacji późniejszych rozwiązań" (s. 20). Ale co to znaczy? Rozpatrzmy przykład: Na s. 106 Dadaczyński przytacza twierdzenie sformułowane przez Bolzana, które w dzisiejszym języku można by ująć następująco: Każdy ciąg Cauchy'ego zmierza do pewnej granicy (abstrahuję od tego, że — wedle dzisiejszych standardów — twierdzenie to jest nieścisłe bez podania przestrzeni, w której ma ono zachodzić). Należy się zgodzić, że poprzednik tego twierdzenia (w sformułowaniu Bolzana) jest w istocie poprawną definicją ciągu Cauchy'ego i że łatwo ją przełożyć na współczesny „język delt i epsilonów". Następnik tego twierdzenia miałby być antycypacją późniejszej definicji granicy ciągu. Następnik ten w sformułowaniu Bolzana brzmi: „to za każdym razem istnieje pewna stała wielkość, i to tylko jedna, do której wyrazy tego ciągu coraz bardziej się zbliżają, i które mogą podejść do niej tak blisko, jak tylko się chce, jeśli ten ciąg odpowiednio się przedłuża" (s. 106). Widzimy, że pozostały tu niejasne intuicje „zbliżania się" i "podchodzenia". Dadaczyński pisze: „Bolzano był w stanie podać definicję granicy ciągu, posługując się ’algebrą nierówności’ i wyrażeniami kwantyfikatorowymi, a nie uczynił tego ze względów stylistycznych. Musiałby bowiem w następniku implikacji — wewnątrz jednego zdania złożonego — użyć tych samych lub bardzo zbliżonych sformułowań do tych, których użył w jego poprzedniku” (ss. 108–109). Jest to niewątpliwie interpretacja „życzliwa”. Musimy także pamiętać, że nie jest to definicja *explicite*, lecz jedynie „w uwikłaniu” (jako następnik w twierdzeniu). Jest to stopień życzliwości, który chętnie akceptuję.

Większe opory miałbym w stosunku do tego, co Dadaczyński pisze na temat Bolzana definicji granicy funkcji. Jego zdaniem, definicja ta jest *implicite* zawarta w Bolzanowskiej definicji ciągłości funkcji. Dadaczyński powołuje się na fakt, że funkcja f jest ciągła w danym punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy posiada w tym punkcie skończoną granicę $f(x_0)$. „Jest zatem oczywiste, że jeśli Bolzano był w stanie prawidłowo — z punktu widzenia weierstrassowskiego paradygmatu analizy — zdefiniować ciągłość funkcji, to był też w stanie prawidłowo zdefiniować granicę funkcji” (s. 120). „Był w stanie”, ale nie zdefiniował. Oprócz tego, że się „jest w stanie”, należy jeszcze dostrzec konieczność wprowadzenia odpowiedniej definicji.

Wróćmy do zagadnienia dokładnej arytmetyzacji analizy matematycznej. Okazuje się, że w swojej konstrukcji liczb rzeczywistych Bolzano w istocie posłużył się wielkościami nieskończenie małymi („niearchimedesowymi”). Dadaczyński jest zdania, że mimo tej niekonsekwencji w Bolzanowskim programie arytmetyzacji analizy, można jednak z niego „wyrugować” „wielkości niearchimedesowe” i tym samym ocalić program arytmetyzacji. W rozumieniu Bolzana, nieskończenie małe to jakikolwiek ciąg liczb wymiernych zbieżny do zera. „Zatem wszystkie Bolzanowskie wielkości niearchimedesowe [...] są konstruowane za pomocą metod ściśle arytmetycznych, dokładniej: za pomocą nieskończonych ciągów liczb wymiernych” (s. 218). Można zgodzić się z tym, że — jak pisze Dadaczyński — koncepcja Bolzana jest „redukowalna do dziedziny liczb wymiernych” (s. 218), ale czy nie jest to jednak przejaw pewnej „pojęciowej inercji”?

Sprawa ma dalszy ciąg. W oparciu o koncepcję Bolzana C. Schmeiden i D. Laugwitz skonstruowali tzw. przez nich dziedzinę Ω-liczb, a potem Laugwitz wykazał, że jest ona jednym z niestandardowych modeli arytmetyki liczb rzeczywistych, na których A. Robinson oparł swoją niestandardową analizę. Ponieważ zaś — jak pisze Dadaczyński — dziedzina tzw. liczb mierzalnych, skonstruowana przez Bolzana „stanowi precyzyjną antycypację dziedziny Ω-liczb" (s. 225), więc i Bolzano jest, w jakimś sensie, poprzednikiem analizy niestandardowej. Oczywiście, nie można temu zaprzeczyć, ale należy to do natury matematyki, że poprawne wyniki w jakiejś dziedzinie z reguły stanowią etap do dalszych osiągnięć.

Chcąc wykazać, że Bolzano antycypował wykonanie programu logicyzmu, należy zbadać, czy dysponował on jakąś dziedziną, do której mógłby sprowadzić arytmetykę liczb naturalnych. Okazuje się, że Bolzano „naszkicował" pewną tego rodzaju dziedzinę; nazwijmy ją dziedziną podstawową. Dziedzinę tę, w postaci systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego zrekonstruował F. Krickel (system KRI). Opierając się na tym systemie, Dadaczyński podejmuje próbę skonstruowania modelu arytmetyki liczb naturalnych (na wzór Peana). W tym celu modyfikuje on system KRI, zmieniając definicję wielości i rozwija system w pożądanym przez siebie kierunku. Rozdział czwarty zawiera półformalne przedstawienie zmienionego systemu KRI, natomiast Aneks (68 stron druku) przedstawia system w postaci sformalizowanej. Konstruując swoją formalizację, Dadaczyński odwołuje się do tekstów Bolzana i przekonuje, że konstruowane przez niego formalne definicje odpowiadają intuicjom Bolzana. Najpierw pokazuje, że „Bolzano dysponował *de facto* pojęciem liczby kardynalnej, konstruowanej w dziedzinie podstawowej" (s. 273). Natomiast Bolzano nie podał aksjomatyki liczb naturalnych, ale Dadaczyński przekonuje, że taką aksjomatykę można skonstruować w oparciu o elementy, które znajdują się u Bolzana. (Przy okazji bardzo interesujące i wnikliwe są analizy Dadaczyńskiego, dotyczące pytania, czy Bolzano znał definicję zbioru nieskończonego; powszechnie przyjmuje się, że to właśnie Bolzano podał jako pierwszy taką definicję.) Konstrukcja taka jest przeprowadzona w rozdz. 4. Na str. 321 czytamy: „Zatem wszystkie pojęcia pierwotne arytmetyki liczb naturalnych Peana można zdefiniować w kategoriach teorii mnogości i wtedy aksjomaty tej arytmetyki stają się twierdzeniami teorii mnogości. Arytmetyka liczb naturalnych Peana posiada w ten sposób model teoriomnogościowy, co oznacza realizację najważniejszego punktu programu logicyzmu (szeroko rozumianego): sprowadzenie arytmetyki liczb naturalnych do teorii mnogości — dyscypliny bardziej podstawowej".

Znając współczesne formalizacje arytmetyki, uderza ogromne skomplikowanie systemu Bolzana. Żeby go dobrze uporządkować i zrozumieć, trzeba było mrówczej pracy Dadaczyńskiego, który wprowadził aksjomatyczny porządek w często luźne notatki praskiego uczonego.

Ma rację Dadaczyński, gdy twierdzi, że jedno z głównych źródeł skomplikowania systemu Bolzana leży w jego trudnym do operowania pojęciu wielości, któremu brak logicznej przejrzystości cantorowskiego zbioru. Ciekawa jest również inna różnica pomiędzy ujęciem Bolzana a klasycznym programem logicyzmu. Bolzano starał się wyprowadzić arytmetykę liczb naturalnych „nie z samych aksjomatów (twierdzeń i definicji) logiki, jak to postulował G.W. Leibniz, ale z pewnej ontologii (za pomocą narzędzi logicznych), bo tak należy pojmować dziedzinę podstawową ’naszkicowaną’ przez praskiego matematyka...” (s. 326).

Książka Jerzego Dadaczyńskiego nie jest lekturą łatwą, ale stanowi ważny wkład do dziejów filozofii matematyki.

Michał Heller

KWANTOWE NIELOKALNOŚCI Z PERSPEKTYWY LOGIKA

◇ Tomasz F. Bigaj, *Non-Locality and Possible Worlds. A Counterfactual Perspective on Quantum Entanglement*, Ontos Verlag, Frankfurt — Paris — Ebikon — Lancaster — New Brunswick, 2006, s. 294.

O pęknięciu między kulturą humanistyczną a kulturą nawiązującą do nauk (*sciences*) mówi się od dawna. Mniej znane, ale niemal równie głębokie jest pęknięcie pomiędzy fizyką a filozofią fizyki (w wersji tzw. anglosaskiej filozofii analitycznej). Filozofowie fizyki są z reguły sami dobrze wykształconymi fizykami, ale sposób uprawiania ich dyscypliny zwykle z czasem zmienia ich perspektywę widzenia. W efekcie fizycy i filozofowie fizyki na ogół mało interesują się wynikami kolegów z przeciwnego obozu i niezmiernie rzadko analizy filozoficzne są wykorzystywane przez fizyków. Książka Tomasza Bigaja sytuuje się zdecydowanie w obozie filozofów fizyki.

Po słynnych nierównościach Bella i serii nawiązujących do nich zaawansowanych doświadczeń (których liczba i wyrafinowanie nieustannie rosną), powstała — a w każdym razie bardzo ożywiła się — nowa dziedzina badań. Zainicjowana słynną pracą Einsteina, Rosena i Podolsky’ego z 1935, była ona dotychczas uważana za dziedzinę filozoficzną, teraz jednak stała się domeną badań wręcz laboratoryjnych. Nie zmniejszyło to bynajmniej zainteresowań nią filozofów. Wręcz przeciwnie, liczba analiz filozoficznych rośnie lawinowo. Nic dziwnego, chodzi bowiem o tak filozoficzne pojęcia, jak: przyczynowość, nielokalność, realizm. Książka Tomasza Bigaja mieści się właśnie w tym nurcie.