Piotr Wilczek

Logika racjonalności : w stronę modalnego platonizmu matematycznego

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 49, 98-122

2011

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XLIX (2011), 98–122

Piotr WILCZEK
Foundational Studies Center
ul. Na Skarpie 99/24, 61-163 Poznań

LOGIKA RACJONALNOŚCI. W STRONĘ MODALNEGO PLATONIZMU MATEMATYCZNEGO

1. WSTĘP

Przypomnijmy, że zgodnie z ogólnie przyjętą typologią współczesnych prądów filozoficznych w podstawach matematyki wyróżnić możemy następujące tendencje: *logicyzm*, *intuicjonizm* (oraz inne postawy *konstruktywistyczne*), *formalizm*, *empiryzm* oraz *platonizm matematyczny*[1].

Stanowisko platonizmu matematycznego, zwanego również *realizmem matematycznym*, zakłada istnienie samoistnej oraz niezależnej od umysłu poznającego podmiotu (ang. *mind-independent*) sfery bytu

[1]Z. Król, *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa 2006; P. Maddy, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford 1990; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001, s. 79 oraz nast.; R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, tłum. P. Amsterdamski, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000; R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, tłum. J. Przysława, Prószyński i S-ka, Warszawa 2006; K. Wójtowicz, *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1999; K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, OBI — Biblos, Kraków — Tarnów 2002.

idealnego, którą to dziedzinę utożsamić możemy ze zbiorami jestestw matematycznych. Realizm w teoriobytowych rozważaniach dotyczących podstaw matematyki postuluje ontologiczną autonomię ponadczasowego bytu matematycznego. Jest to odrębność zarówno względem bytu rzeczywistego, jak również bytu intencjonalnego. Zauważmy, że byt idealny, w tym również przedmioty czystej matematyki, można badać z różnych perspektyw poznawczych, takich jak np. *fenomenologia realistyczna* (Roman Ingarden), *holizm językowy* (Willard van Orman Quine, Hilary Putnam), *filozofia procesu* (Alfred N. Whitehead, Charles Hartshorne) oraz innych[2]. Przypomnijmy, że procesualna filozofia Whiteheada zakłada istnienie sfery bytu idealnego w postaci tzw. *wiecznych obiektów* (ang. *eternal objects*), które to stanowią ontologiczne usprawiedliwienie *Racjonalności* poznawczej świata zewnętrznego, złożonego z kolekcji *aktualnych zaistnień* (ang. *actual occasions*)[3]. W dziele Whiteheada zatytułowanym *Nauka i Świat Nowożytny* czytamy:

> Podstawą przyjętego tu stanowiska metafizycznego jest założenie, że zrozumienie tego, co aktualne, wymaga odniesienia do tego, co idealne. Te dwie dziedziny są immanentnie obecne w całości sytuacji metafizycznej [...]. Tak więc przedmioty ponadczasowe są ze swej istoty abstraktami. Przez słowo „abstrakt" rozumiem, iż to, czym przedmioty ponadczasowe są same w sobie — to znaczy w swej istocie — zrozumiałe jest bez odniesienia do jakiegoś szczególnego zaistnienia doświadczenia. Być abstraktem, to wykraczać ponad poszczególne konkretne zaistnienia tego, co aktualnie dzieje się"[4].

---

[2]K. Wójtowicz, *Realizm...*, s.; P. Wilczek, „O sposobie istnienia przedmiotów matematycznych. Poglądy Romana Ingardena a współczesny platonizm matematyczny", [w:] *Spór o istnienie świata. W 40 rocznicę śmierci Romana Ingardena*, red. W. Słomskiego, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Finansów i Zarządzania w Warszawie, Warszawa 2010, s. 175-207; J. Życiński, *Bóg Abrahama i Whiteheada*, Biblos, Tarnów 1992.

[3]J. B. Cobb, *Whitehead Word Book. A Glossary with Alphabetical Index to Technical Terms in Process and Reality*, P&F Press, Claremont 2008.

[4]A. N. Whitehead, *Nauka i świat nowożytny*, tłum. M. Kozłowski oraz M. Pieńkowski, Wydawnictwo Znak, Kraków 1987, s. 217.

Dalej można zauważyć, że wszystko co może być wyabstrahowane z doświadczenia, a następnie stać się przedmiotem myśli jest Whiteheadowskim wiecznym obiektem. Obiekty ponadczasowe są *formami określoności* (ang. *forms of definiteness*). Whitehead stwierdza, że obiekty ponadczasowe, w tym przedmioty matematyczne, stanowią sferę *czystej potencjalności*. W jego głównym dziele — *Process and Reality* czytamy:

> A więc zawsze musimy rozpatrywać dwa znaczenia ...[terminu] potencjalność: a) potencjalność 'ogólna' stanowiąca wiązkę potencjalności, które to są wzajemnie niesprzeczne lub też stanowią względem siebie alternatywy; potencjalność ta zależna jest od wielości obiektów ponadczasowych oraz b) potencjalność 'rzeczywista' uwarunkowana przez dane dostarczone przez świat aktualny[5].

W opinii Whiteheada *dziedzina wiecznych przedmiotów* (ang. *the realm of eternal objects*) to źródło absolutnie ogólnie pojętej potencjalności jaka zawarta jest we wzajemnych związkach pomiędzy poszczególnymi obiektami ponadczasowymi. Można przyjąć, że pod względem ontologicznym wieczne przedmioty konstytuują zbiór możliwości wobec aktualnych zaistnień. Dlatego też mówimy, że poszczególne zaistnienia aktualne stają się tym, czym są, z chwilą, gdy przedmioty ponadczasowe wkraczają w owe zaistnienia. *Wkroczenie* (ang. *ingression*) kolekcji wiecznych obiektów w aktualne zaistnienie jest możliwe dzięki temu, że *stające się* (ang. *becoming*) aktualne zaistnienie *ujmuje* (ang. *prehends*) nieskończoną hierarchę idealnych przedmiotów ponadczasowych. W procesie *ujęcia* (ang. *prehension*) wiecznych bytów idealnych stające się aktualne zaistnienie *realizuje* (ang. *realizes*) pewien zbiór możliwości. „Każde aktualne zaistnienie zdefiniowane jest — co do swej natury — poprzez sposób, w jaki te możliwości aktualizują się w odniesieniu do tego zaistnienia. A zatem aktualizacja, to wybór spośród możliwości"[6]. Proces ten nazywamy procesem *ukon-*

[5] A. N. Whitehead, *Process and Reality: An Essay in Cosmology*, The Free Press, New York 1978, s. 65. Wszystkie tłumaczenia z *Process and Reality* pochodzą od autora — P. W.

[6] A. N. Whitehead, *Nauka...*, s. 218.

kretniania się (ang. *concrescence*) poszczególnych aktualnych zaistnień. Dlatego też ową dziedzinę wiecznych oraz niezmiennych przedmiotów idealnych nazwać można *matrycą świata* (ang. *world's matrix*). Natomiast tą jej część, która jest nam *dostępna poznawczo* (ang. *cognitively accessible*) nazwać możemy — za Józefem Życińskim — Polem Racjonalności (ang. *the Rationality Field*)[7]. W powyższym ujęciu owo *Pole Racjonalności* — będąc poznawalnym za pomocą metod apriorycznych — stanowi uniwersum możliwości względem realizujących się, czyli ukonkretniających się poszczególnych aktualnych zaistnień[8]. A więc „w tej perspektywie nauka nie jest już dłużej postrzegana jako [proces] odnotowywania obserwowalnych parametrów fizycznych ale raczej jako próba określenia ukrytej formalnej struktury stanowiącej osnowę procesów fizycznych"[9]. W naszym ujęciu sedno racjonalnie pojętej nauki oraz *Racjonalności* w ogóle uwarunkowane jest faktem epistemologicznej dostępności wspomnianej powyżej struktury formalnej, wyrażającej się w języku matematyki oraz logiki symbolicznej, a nazwanej *Polem Racjonalności*.

> Ogólność matematyki to ogólność najbardziej pełna, zgodna z całą wspólnotą zaistnień składających się na naszą sytuację metafizyczną. [...] Użycie logicznego umysłu odnosi się zawsze do tych absolutnie ogólnych warunków. [...] Ta struktura relacji pomiędzy ogólnymi warunkami abstrakcyjnymi narzuca się zarówno jeśli idzie o rzeczywistość zewnętrzną, jak i o nasze o niej abstrakcyjne wyobrażenie [...]. Jest to właśnie potrzeba abstrakcyjnej logiki, która jest założona w samym fakcie „istnienia w związkach wzajemnych" (interrelated existence), objawiających się w każdym danym bezpośrednio za-

[7] J. Życiński, „Filozoficzne aspekty matematyczności przyrody.", [w:] *Filozofować w kontekście nauki*, red. M. Heller, A. Michalik oraz J. Życiński, Polskie Towarzystwo Teologiczne, Kraków, s. 170-185; J. Życiński, „The Rationality Field and the Laws of Nature", [w:] *Wyzwania Racjonalności*, red. S. Wszołek oraz R. Janusz, Wydawnictwo WAM — Ośrodek Badań Interdyscyplinarnych, Kraków, s. 87-101.

[8] Proponentem bardzo podobnej (o ile nie identycznej) koncepcji jest również Michał Heller. Por. M. Heller, *Uchwycić przemijanie*, Wydawnictwo Znak, Kraków 1997, s. 236 oraz nast.; M. Heller, *Filozofia i wszechświat*, Universitas, Kraków 2008, s. 37 oraz nast.

[9] J. Życiński, „The Rationality...", [w:] *Wyzwania...*, s. 92.

> istnieniu doświadczenia. [...] Rozumowanie, to nic innego, jak tylko ujawnienie całej struktury ogólnych warunków zawartych w strukturze wyprowadzonej z wybranych postulatów. Harmonia logicznego umysłu, który przeczuwa istnienie utajonej w postulatach pełnej struktury, to najbardziej ogólna własność estetyczna wynikająca z samego faktu jednoczesnego istnienia w jedności danego zaistnienia. Gdziekolwiek ma miejsce jedność zaistnienia, tam w założeniu już istnieje estetyczny związek pomiędzy ogólnymi warunkami zawartymi w tym zaistnieniu. Ten właśnie związek estetyczny odkrywamy w procesie racjonalnego myślenia[10]. (podkreślenia moje — P. W.)

Metodologia badań racjonalnych polega na tym, że zdobywając aprioryczną wiedzę o obiektach ponadczasowych badamy tym samym poszczególne aktualne zaistnienia konstytuujące dostrzegalny zmysłowo świat fizyczny. Badając struktury matematyczne złożone z idealnych wiecznych przedmiotów, poznajemy zjawiska fizyczne realizujące odpowiednie podzbiory owych ponadczasowych obiektów. Dzięki temu, że ontologiczną osnową rzeczywistości badanej przez nauki fizyczno-przyrodnicze są hierarchie wiecznych przedmiotów — które to z kolei są nam dostępne poznawczo za pomocą metod formalno-dedukcyjnych stanowiących jedną z egzemplifikacji ludzkiej *Racjonalności* — możemy przyjąć, że zyskujemy epistemologiczny dostęp do świata zewnętrznego, złożonego z mnogości aktualnych zaistnień realizujących w aktach *pojęciowych ujęć* (ang. *conceptual prehensions*) ową, wspomnianą na początku, dziedzinę ponadczasowych obiektów (lub jej wyróżnioną podkolekcję).

Aby zapoznać się z wewnętrzną logiką *Racjonalności* musimy poznać logikę bytu wiecznego, a w szczególności tą jej część, która dotyczy obiektów czystej matematyki.

Dlatego też w części drugiej pracy zapoznamy się z semantyką teorii matematycznych (opartą na pracach polskiego logika i filozofa Alfreda Tarskiego) oraz na tej podstawie scharakteryzujemy Whiteheadowską filozofię matematyki[11]; część trzecia stanowić będzie ana-

---

[10] A. N. Whitehead, *Nauka...*, s. 52-53.

[11] Na temat ogólnie pojętej filozofii matematyki Whiteheada por. J. Mączka, „Matematyczne inspiracje filozofii Whiteheada", *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* 19

lizę formalno-logiczną uniwersum matematycznego. Część czwarta zawiera podsumowanie oraz kierunki dalszych badań.

2. SEMANTYKA TEORII MATEMATYCZNYCH ORAZ FILOZOFIA MATEMATYKI ALFREDA N. WHITEHEADA

Językiem matematyki — jako nauki formalno-dedukcyjnej — jest logika predykatów pierwszego rzędu. Zakładamy, że teorie matematyczne mogą być utożsamione z *dedukcyjnie domkniętymi* (ang. *deductively closed*) zbiorami zdań. Przypomnijmy, że Alfred Tarski w 1930 roku określił operację matematyczną, nazwaną później *operacją konsekwencji logicznej Tarskiego* (oznaczoną jako Cn), działającą na zbiorach potęgowych formuł zdaniowych[12]. Załóżmy, że A to przeliczalny zbiór formuł zdaniowych, np. wyrażeń matematycznych. Wtedy operacja Cn ma postać odwzorowania $Cn : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, gdzie $\mathcal{P}(A)$ to zbiór potęgowy zbioru A (czyli zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A). Odwzorowanie to spełnia dla wszystkich podzbiorów $X, Y \subseteq A$ następujące warunki:

1. $X \subseteq Cn(X)$,
2. jeżeli $X \subseteq Y$, to $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$ oraz
3. $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$

określane odpowiednio jako *zwrotność*, *monotoniczność* oraz *idempotentność* operacji Cn. Ponadto każda operacja konsekwencji logicznej jest w sposób naturalny sprzężona z *relacją konsekwencji logicznej* $\vdash \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ pomiędzy podzbiorami zbioru A a elementami zbioru A

(1996), s. 108-126; J. Mączka, „Platonizm w matematycznych pracach Whiteheada", *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* 21 (1997), s. 32-47; J. Mączka, *Od matematyki do filozofii. Twórcza droga Alfreda Northa Whiteheada*, OBI — Biblos, Kraków — Tarnów 1998.

[12] Por. J. M. Font, R. Jansana oraz D. Pigozzi, „A Survey of Abstract Algebraic Logic", *Studia Logica* 74 (2003), s. 13-97; A. Tarski, *Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych*, [w:] tegoż, *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2. Metalogika*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001, s. 31-92.

przez założenie, że dla każdego zbioru $X \subseteq A$ oraz każdej formuły $\varphi \in X$ zachodzi:

$$X \vdash \varphi \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \varphi \in Cn(X).$$

Z powyższych uwag wynika, że pojęcia operacji oraz konsekwencji logicznej są pojęciami o charakterze syntaktycznym. W konsekwencji otrzymaliśmy syntaktyczne określenie teorii matematycznej, jako dedukcyjnie domkniętego, tj. domkniętego ze względu na operację Cn lub relację $\vdash$ zbioru zdań dotyczących obiektów matematycznych. Aby podać semantyczne określenie teorii matematycznej, czyli wyznaczyć właściwy przedmiot badań teorii dedukcyjnych musimy posłużyć się pojęciem *modelu*. W pracy Tarskiego zatytułowanej *O pojęciu konsekwencji logicznej* czytamy: „Zdanie X jest wyprowadzalne logicznie z klasy zdań K wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model klasy K jest również modelem zdania X”[13]. Przyjmijmy, że język L logiki predykatów pierwszego rzędu można scharakteryzować za pomocą czwórki o postaci $L = \langle Var, P, F, \rho\rangle$, gdzie Var to skończony lub przeliczalny zbiór zmiennych indywidualnych, P to niepusty skończony lub przeliczalny zbiór liter predykatowych, F to skończony lub przeliczalny (możliwie pusty) zbiór liter funkcyjnych oraz ρ to funkcja arności ze zbioru $P \cup F$ w zbiór liczb naturalnych. Wtedy to modelem dla teorii dedukcyjnych formułowanych w języku L są układy relacyjne o postaci

$$M = \left\langle A, P^M, F^M \right\rangle$$

gdzie A to uniwersum modelu M składające się z przedmiotów matematycznych, których dana teoria dedukcyjna dotyczy; elementy uniwersum A są interpretacjami zbioru zmiennych Var, $P^M = \left\{P_i^M : P_i \in P\right\}$ to interpretacje predykatów $P_i \in P$ w modelu M będące relacjami o odpowiedniej arności nad uniwersum A oraz $F^M = \left\{f_i^M : f_i \in F\right\}$ to interpretacje symboli funkcyjnych $f_i \in F$ w modelu M będące $n-$argumentowymi funkcjami z A^n do A. Dalej zauważmy, że dana formuła matematyczna np. $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ dla $i < n$ jest spełnialna w modelu M, co oznaczamy jako $M \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy

[13] A. Tarski, „On the Concept of Logical Consequence”, [w:] tegoż, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press, Oxford 1956, s. 417. Tłum. moje — P.W.

w uniwersum A modelu M istnieje taki ciąg obiektów $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, że zdanie $\varphi(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ powstałe przez równoczesne zastąpienie zmiennych $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ przez odpowiednie stałe $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jest zdaniem prawdziwym. Wtedy można orzec, że dany model M jest modelem dla zdania $\varphi(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$. Funkcja przyporządkowująca zmiennym stałe taka, że $I(x_i) = a_i$ to *funkcja interpretacji*. Równoważnie można rzec, że stałe a_i są korelatami semantycznymi zmiennych x_i a I to *funkcja korelacji semantycznej* (ang. *the semantic correlate function*). Jedno z podstawowych twierdzeń metalogicznych, mianowicie *Twierdzenie o Pełności* mówi, że każda teoria dedukcyjna sformułowana w logice predykatów pierwszego rzędu ma swój model. Oznacza to, że logika predykatów pierwszego rzędu jest *pełna*. Daną logikę nazywamy pełną, gdy dowodliwość syntaktyczna pokrywa się z teoriomodelowo rozumianą relacją spełnialności (która jest pewnym stosunkiem semantycznym), czyli gdy zachodzi następująca równość:

$$\vdash = \models$$

Konkludując można stwierdzić, że każda teoria matematyczna sformułowana w logice predykatów pierwszego rzędu wyznacza swój model. Zakładając semantyczną perspektywę badań dochodzimy do wniosku, że to właśnie modele teorii dedukcyjnych są właściwym przedmiotem dociekań matematycznych. Zdania teorii matematycznych dotyczą indywiduów matematycznych pogrupowanych w modele; przy czym modele rozumiemy jako pewne struktury relacyjne składające się ze zbiorowisk jestestw matematycznych (wraz z określonymi na nich odpowiednimi relacjami i funkcjami). Każdy taki model jest opisywalny przez niesprzeczny oraz dedukcyjnie domknięty zbiór pierwszorzędowych formuł matematycznych[14].

Przyjmujemy, że modele są bytami istniejącymi niezależnie od umysłu badacza w dziedzinie przedmiotów ponadczasowych. Adap-

[14]Zauważmy, że powyższe rozważania zakładają tradycyjne tj. Arystotelesowskie rozumienie formuł zdaniowych jako form podmiotowo-orzecznikowych. Nie uwzględniają one Whiteheadowskiego spojrzenia na formuły matematyczne, które w jego opinii również są obiektami ponadczasowymi. Por. P. J. Cataldo, „Whitehead and Aristotle on Propositions", *Process Studies* 12 (1) 1982, s. 15-21; A. J. Steinbeck, „Whitehead's "Theory" of Propositions", *Process Studies* 18 (1) 1989, s. 19-29.

tując powyższe rozważania na grunt filozofii procesu otrzymujemy następującą Whiteheadowską definicję modelu:

Whiteheadowska definicja modelu. *Model matematyczny to kolekcja wiecznych przedmiotów idealnych, które to mogą być jednocześnie ujęte pojęciowo (ang. simultaneously conceptually prehended) przez pojedyncze aktualne zaistnienie.*

Zakładając, że zgodnie z filozofią Whiteheada byty idealne stanowią — pod względem metafizycznym — usprawiedliwienie aktualnych zaistnień, a pod względem ontologicznym mogą być rozumiane jako ponadczasowe *wzorce* (ang. patterns), czy też *matryce* (*schematy*, *plany*, *konfiguracje*, *formy*) owych atomowych jednostek doświadczenia jakimi są aktualne zaistnienia można zauważyć, że Whiteheadowska definicja modelu orzeka, iż model konstytuowany jest przez zbiór wewnętrznie powiązanych przedmiotów istniejących poza czasem i mogących się jednocześnie realizować w jednostkowych bytach aktualnych. Oznacza to, że wszystkie byty idealne stanowiące odrębny model mogą jednocześnie wkraczać w partykularne zaistnienia aktualne. Oczywiście tak rozumiany pojedynczy model ma tylko potencjalną zdolność urzeczywistniania się (tj. realizacji) w stającym się aktualnym zaistnieniu. Definicja modelu oparta na metafizyce Whiteheada nie zakłada, że owa kolekcja przedmiotów ponadczasowych (stanowiąca odrębny model) kiedykolwiek musi ulec aktualizacji. Model jest tylko i wyłącznie czystą potencjalnością. Dlatego też odrębne zaistnienia aktualne mogą realizować różne — a nawet wzajemnie wykluczające się — zestawy przedmiotów ponadczasowych. Whitehead stwierdza, że

> nie istnieje cecha charakterystyczna przynależna aktualnemu zaistnieniu poza jego jednoznacznym [oraz wykluczającym inne możliwości] określeniem przez wybrane wieczne obiekty. Określoność aktualnego zaistnienia wypływa z jednoznaczności obiektów ponadczasowych jako determinant [aktualnych zaistnień]. Jeżeli aktualne zaistnienie jest 'tym', czym jest, to z natury rzeczy nie może być 'tym' lub 'tamtym' aktualnym zaistnieniem. <u>Fakt wykluczających się alternatyw jest faktem o znaczeniu fundamentalnym na mocy którego można mówić</u>

> o określoności poszczególnych aktualnych zaistnień[15]. (podkreślenie moje — P. W.).

W obrębie pojedynczego aktualnego zaistnienia nie mogą realizować się *niezgodne* (ang. *incompatible*) zbiory idealnych przedmiotów ponadczasowych. Oznacza to, że w sferze aktualności sprzeczność nie istnieje. Natomiast w dziedzinie wiecznych obiektów matematyki mogą istnieć wzajemnie się wykluczające (ang. *exlusive*) oraz niezgodne alternatywy. Na tej podstawie można przyjąć, że — w obrębie metafizyki Whiteheada — choć sprzeczność nie istnieje aktualnie, to istnieje ona realnie. Jest to możliwe tylko i wyłącznie dlatego, że sfera idealnego bytu wiecznego jest czystą potencjalnością. Jest ona zasiedlana przez przedmioty ponadczasowe, które nie mogą być jednocześnie ujęte pojęciowo przez aktualizujące się pojedyncze zaistnienie. Fakt, że dany zbiór wiecznych obiektów tworzy uniwersum pojedynczego modelu M jest uwarunkowany tym, „że każdy przedmiot ponadczasowy posiada «relacjonalną istotę» [relational essence]"[16]. Przypomnijmy, że wewnętrzną logiką modeli teorii matematycznych jest logika predykatów pierwszego rzędu. Dlatego też predykaty P_i języka L tej logiki są interpretowane wewnątrz modelu, jako relacje P_i^M określone na przedmiotach ponadczasowych stanowiących uniwersum M. Whitehead stwierdza, że jeżeli A oznacza wieczny obiekt, to

> do istoty A należy jego określoność w zakresie relacji do innych przedmiotów ponadczasowych i nieokreśloność w zakresie relacji A do aktualnych zaistnień. Skoro relacje A do innych przedmiotów ponadczasowych określone są w istocie A, są to relacje wewnętrzne. Mam tu na myśli, iż są to relacje konstytutywne dla A; bowiem byt pozostający w relacjach wewnętrznych nie może istnieć jako byt poza tymi relacjami. [...] Określone

[15]Z uwagi na frazeologię tekstu Whiteheada przytaczamy powyższy fragment *Process and Reality* w oryginale: „There is no character belonging to the actual apart from its exclusive determination by selected eternal objects. The definiteness of the actual arises from the exclusiveness of eternal objects in their function as determinants. If the actual entity be 'this', then by the nature of the case it is not 'that' or 'that'. The fact of incompatible alternatives is the ultimate fact in virtue of which there is definite character", s. 240.

[16]A. N. Whitehead, *Nauka...*, s. 218.

> powiązania [relatedness] przedmiotu ponadczasowego A z każdym innym przedmiotem ponadczasowym, to sposób, w jaki A regularnie i na mocy konieczności swej natury wchodzi w relacje z każdym innym przedmiotem ponadczasowym. Powiązania takie ukazują możliwość urzeczywistnienia[17].

Oznacza to, że powiązania pomiędzy poszczególnymi elementami uniwersum modelu M, czyli pomiędzy odrębnymi wiecznymi przedmiotami czystej matematyki egzemplifikują się w aktualnych zaistnieniach. W tym sensie są one matrycą świata aktualnego. Na poziomie ontologii matematyki można stwierdzić, że fakt posiadania przez każdy ponadczasowy przedmiot matematyczny *istoty relacjonalnej* (ang. *relational essence*) może być rozważany jako argument przemawiający za *strukturalizmem matematycznym*. Jest to pogląd w podstawach matematyki orzekający, że matematyka zajmuje się tylko i wyłącznie *strukturami*, a nie obiektami posiadającymi *wewnętrzne własności*. A więc przedmioty matematyczne są tylko i wyłącznie *miejscami w strukturach*, a poza nimi są pozbawione indywidualności[18]. Jednak Whitehead zauważa, że oprócz wspomnianej powyżej istoty relacyjnej przedmioty matematyczne posiadają *istotę indywidualną* (ang. *individual essence*). Mianowicie w cytowanej już pozycji *Nauka...* czytamy:

> [...] każdy przedmiot ponadczasowy stanowi indywiduum, które we własny, specyficzny sposób jest tym, czym jest. Ta szczególna indywidualność, to indywidualna istota [individual essence] przedmiotu. Nie sposób opisać jej inaczej, jak przez fakt, iż jest ona sobą. Tak więc indywidualna istota to po prostu istota rozważana ze względu na swą unikalność[19].

Dalej angielski filozof konkluduje, że tożsamość istotowa wiecznych obiektów jest zagwarantowana faktem ich identyczności we wszystkich sposobach wkraczania w aktualne zaistnienia. Oznacza to, że

[17]Ibidem, s. 218-220.

[18]M. Heller, *Filozofia...*, s. 197 oraz nast.; R. Murawski, *Filozofia...*, s. 165 oraz nast.; M. Resnik, „Mathematics as Science of Patterns: Ontology and Reference", *Noûs* 15 (1981), s. 529-550; M. Resnik, „Mathematics as a Science of Patters: Epistemology", *Noûs* 16 (1982), s. 93-105; M. Resnik, „Mathematics from the Structural Point of View", *Revue Internationale de Philosophie* 43 (1988), s. 400-424.

[19]A. N. Whitehead, *Nauka...*, s. 218.

z punktu widzenia metafizycznego system Whiteheada jest strukturalizmem, ale *strukturalizmem realistycznym.* A więc dziedzina przedmiotów ponadczasowych — choć poprzeplatana różnymi wzajemnymi relacjami — istnieje niezależnie od owych relacji wewnętrznych, gdyż każdy obiekt matematyczny jest sam ze sobą tożsamy; posiada on unikalną, jednoznaczną oraz niezmienną w czasie indywidualność. Dualna (tj. *indywidualno-relacjonalna*) natura Whiteheadowskich wiecznych przedmiotów zapewnia, że jego system filozoficzny w dziedzinie podstaw matematyki może być rozpatrywany jako strukturalizm, a zarazem jako platonizm[20]. Dlatego nazwijmy go strukturalnym platonizmem.

Ponadto w systemie autora *Process and Reality* dostrzec można komponent empiryczny. Przypomnijmy, że jednym z częstych zarzutów kierowanym pod adresem platonizmu matematycznego jest zarzut dotyczący niedostępności poznawczej przedmiotów czystej matematyki[21]. Argument ten próbowano odeprzeć na różne sposoby, na przykład powołując się na możliwość wglądu ejdetycznego w sferę idealnych przedmiotów matematycznych[22]. Whitehead rozwiązuje ten problem powołując się na swoją teorię ujęć pojęciowych. Mianowicie — co zostało już wcześniej zasygnalizowane — poszczególne aktualne zaistnienia ujmują wieczne przedmioty idealne w procesie aktualizacji.

3. FORMALNO-LOGICZNA ANALIZA UNIWERSUM MATEMATYCZNEGO JAKO SFERY CZYSTEJ POTENCJALNOŚCI

Whitehead proponował oprzeć całą matematykę na *teorii typów*; dzisiaj teoria typów ma już tylko znaczenie czysto historyczne i przyj-

[20]Pojęcie *dualnej* natury Whiteheadowskich wiecznych obiektów nie powinno być mylone z pojęciem *dwubiegunowej* (ang. *bipolar*, *dipolar*) natury ponadczasowych przedmiotów wypracowanej przez Amerykańskiego procesualistę Ch. Hartshorne'a. Por. P. Gutowski, *Filozofia procesu i jej metafilozofia. Studium metafizyki Ch. Hartshorne'a*, Redakcja Wydawnictw KUL, Lublin 1995.

[21]P. Benacerraf, „Mathematical Truth", [w:] *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge 1983, s. 403-420.

[22]P. Wilczek, *O sposobie...*, s. 175-207.

muje się, że całą wiedzę matematyczną można zaksjomatyzować w systemie teorii mnogości ZFC (tj. *teorii Zermelo-Fraenkela z aksjomatem wyboru*). My również w poniższej pracy zakładamy, że ontologiczną podstawą dla całej matematyki jest teoria mnogości, co oznacza, że wszystkie abstrakcyjne obiekty matematyczne mogą być rozpatrywane jako zbiory i w tym znaczeniu uniwersum teoriomnogościowe stanowi środowisko badań dla całej matematyki[23]. Na przykład każda funkcja na płaszczyźnie jest zbiorem par uporządkowanych, grupa to zbiór z określoną pewną operacją binarną; również liczby naturalne, rzeczywiste oraz porządkowe są konstruowane jako zbiory. Zbiory z uniwersum teoriomnogościowego tworzą hierarchię pozaskończoną. Można przyjąć, że ta hierarchia stanowi dziedzinę badań całej matematyki. Wszelka praca matematyków polega na odkrywaniu podstawowych prawd dotyczących uniwersum teoriomnogościowego. Stanowisko platonizmu matematycznego zakładające, że to właśnie uniwersum teoriomnogościowe stanowi ontologiczny fundament dla całej matematyki przyjmuje, że uniwersum to jest *statyczne* (ang. *static*) oraz *niezmienne* (ang. *immutable*). Jest to klasyczna wersja *realizmu teoriomnogościowego*. Jednak w tym miejscu należy postawić pytanie *czy istnieje jedno czy też wiele uniwersów teoriomnogościowych*?

Zauważmy, że w ciągu ostatnich pięćdziesięciu lat prace teoriomnogościowców skupione są głównie na budowaniu alternatywnych modeli teorii mnogości, w których obowiązują alternatywne prawdy. Takie wyrafinowane techniki matematyczne jak metoda *ultrapotęg*, *modeli permutacyjnych*, *modeli wewnętrznych*, a przede wszystkim technika *forsingu* (ang. *forcing*) umożliwiły konstruowanie alternatywnych uniwersów matematycznych z alternatywnymi prawdami[24]. Przypatrzmy się dokładniej metodzie forsingu odkrytej w 1963 roku przez Paula Cohena. Załóżmy, że V to *model podstawowy* (ang. *the ground model*) teorii mnogości Zermelo-Fraenkela z aksjomatem wyboru, co oznaczamy jako $V \models ZFC$; dalej przyjmijmy, że P to zbiór częściowo

[23] R. Murawski, *Filozofia...*, s. 173 oraz nast.

[24] T. Jech, *Set Theory*, Springer — Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 2003.

uporządkowany znajdujący się wewnątrz modelu V, czyli $P \in V$[25]. Określmy teraz V*–generyczny filtr* $G \subseteq P$ za pomocą, którego możemy zbudować pożądane *rozszerzenie forsingowe* (ang. *a forcing extension*) modelu V. Mianowicie dołączamy do modelu podstawowego V *idealny* (ang. *ideal*) generyczny element G i w ten sposób otrzymujemy nowy model teorii mnogości oznaczony jako $V[G]$. Jest to procedura podobna do procedur rozszerzania ciał algebraicznych. Ponadto zachodzi:

$$V \subseteq V[G].$$

Rozszerzenia o postaci $V[G]$ mogą być równoważnie nazwane *modelem generycznym* (ang. *the generic model* uniwersum V). Zbiór częściowo uporządkowany z modelu podstawowego V, czyli para uporządkowana o postaci $(P, \leq)$ nosi nazwę *pojęcia forsingu* (ang. *a forcing notion*); elementy zbioru P to *warunki forsingu* (ang. *forcing conditions*). Zauważmy, że obiekty wewnątrz modelu $V[G]$ są konstruowane algebraicznie z obiektów znajdujących się w modelu podstawowym V oraz nowego obiektu G. Rozpatrując rozszerzenia generyczne $V[G]$ modelu V widzimy, że zbiory znajdujące się wewnątrz modeli o postaci $V[G]$ są definiowalne z idealnego obiektu G oraz skończenie wielu elementów zbioru V. Każdy przedmiot matematyczny znajdujący się wewnątrz rozszerzenia $V[G]$ posiada *nazwę* w modelu podstawowym V opisującą jak został skonstruowany. Istotną własnością forsingu jest fakt, że model generyczny $V[G]$ może być opisany w obrębie modelu podstawowego V. Z każdym pojęciem forsingu sprzężony jest pewien język, zwany *językiem forsingu* (ang. *a forcing language*) oraz *relacja forsingu* $\Vdash_P$ (ang. *the forcing relation*), zwana też relacją wymuszania. Relacja ta zachodzi pomiędzy warunkami forsingu, a zdaniami języka forsingu, czyli symbolicznie

$$p \Vdash_P \varphi$$

[25]Przypomnijmy, że parę uporządkowaną $(X, \leq)$, gdzie X to dowolny zbiór a $\leq$ to binarna relacja na X nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym*, gdy $\leq$ spełnia warunki zwrotności, przechodniości oraz antysymetryczności. Por. T. Jech, *Set...*, s. 17.

co oznacza, że warunek forsingu $p \in P$ *wymusza* (ang. *forces*) prawdziwość zdania φ. Z punktu widzenia modeli generycznych powyższa relacja może być określona za pomocą następującej równoważności:

$p \Vdash_P \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego V–generycznego filtru G takiego, że $p \in G \subseteq P$ zachodzi relacja $V[G] \models \varphi$.

Jest to *Twierdzenie o Forsingu.* Za pomocą powyżej opisanej metody Cohen skonstruował modele teorii mnogości ZFC spełniające hipotezę continuum (CH), jak również modele falsyfikujące CH[26]. Z punktu widzenia modeli generycznych oznacza to, że w modelu podstawowym V teorii ZFC istnieją elementy V–generyczne $G \subseteq P$ oraz $F \subseteq Q$ takie, że:

$V[G] \models ZFC + CH$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists p \in G \subseteq P$ oraz $p \Vdash_P CH$

oraz

$V[F] \models ZFC + \neg CH$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists q \in F \subseteq Q$ oraz $q \Vdash_P \neg CH$

Jest to równoznaczne z wykazaniem, iż hipoteza continuum jest niezależna od aksjomatów teorii Zermelo-Fraenkela.

Metoda *forsingu* posłużyła do konstruowania zdumiewającej rozmaitości nowych modeli teorii mnogości ZFC, w których obowiązują alternatywne, często wzajemnie wykluczające się prawdy matematyczne. Z punktu widzenia epistemologicznego należy zauważyć, że rozszerzenia forsingowe $V[G]$ są ściśle związane z modelem podstawowym V, ale obowiązują w nich alternatywne prawdy teoriomnogościowe, które to są ściśle kontrolowane przez odpowiednie zbiory częściowo uporządkowane znajdujące się w modelu podstawowym V. Postawmy teraz kluczowe dla nas pytanie:
*Czy owe alternatywne uniwersa matematyczne istnieją **realnie** czy przysługuje im tylko status bytu **intencjonalnego**?*

[26]Przypomnijmy, że *hipoteza continuum* (CH) orzeka, iż $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, gdzie $\aleph_0$ to moc zbioru liczb naturalnych, a $\aleph_1$ to pierwsza nieprzeliczalna liczba kardynalna. Por. K. Wójtowicz, *Realizm...*, s. 177.

Mianowicie posługując się kryterium równouprawnienia epistemologicznego musimy przyjąć, że owe modele uniwersum teoriomnogościowego istnieją realnie ponieważ nie możemy wskazać żadnej zasady teoriopoznawczej, która falsyfikowałaby zdania dotyczące obiektów matematycznych będące prawdami w owych alternatywnych uniwersach teoriomnogościowych. Dlatego też musimy przyjąć *tezę o równouprawnieniu* — zarówno z punktu widzenia teoriopoznawczego, jak również ontologicznego — wszystkich dostępnych modeli uniwersum matematycznego. Z wewnętrznego punktu widzenia teorii mnogości nazwijmy powyższy pogląd — zakładający mnogość uniwersów matematycznych — teorią *Multiuniwersum* (lub *Multiwersum*) *Matematycznego* (ang. *the Multiverse view*), w skrócie teorią *MM*[27,28]. Widzimy, że teoria *MM* jest platonizmem, ale *platonizmem drugiego rzędu*, bowiem dotyczy realnego istnienia alternatywnych uniwersów teoriomnogościowych. Ów *drugorzędowy realizm matematyczny* stwierdza obiektywne istnienie wszystkich dostępnych pod względem poznawczym uniwersów matematycznych. Mianowicie każdej kolekcji przedmiotów matematycznych, która nie zawiera elementów wzajemnie wykluczających się w pełni — pod względem ontologicznym — przysługuje istnienie w sferze ponadczasowych przedmiotów idealnych. Oznacza to, iż uniwersum matematyczne w świetle teorii *MM* nie jest statyczną oraz niezmienną strukturą, lecz ma charakter *heterogeniczny*. Dana formuła matematyczna może zmieniać swoją wartość logiczną w zależności od regionów owego uniwersum matematycznego. Jeden z najwybitniejszych współczesnych badaczy podstaw matematyki — Saharon Shelah tak charakteryzuje *dynamizm* dziedziny przedmiotów matematycznych[29]:

[27] J. D. Hamkins, „Some Second Order Set Theory", *Lecture Notes in Computer Science* 5378 (2009), s. 36-50.

[28] Omawiana powyżej teoria Multiuniwersum Matematycznego, zwana również Teorią Wieloświata Matematycznego nie ma nic wspólnego i nie powinna być mylona z teorią Wieloświata występującą na terenie współczesnej kosmologii. Na temat tej ostatniej por. M. Heller, *Filozofia...*, s. 417 oraz nast.; M. Heller, *Ostateczne wyjaśnienia wszechświata*, Universitas, Kraków 2008, s. 109 oraz nast.; M. Tegmark, „Parallel Universes", *Scientific American* 6 (2003), s. 41-51.

[29] Matematyk ten opublikował blisko 1000 prac z dziedziny podstaw matematyki (w połowie 2011 roku internetowe archiwum prac Shelaha — Shelah's Archive

> Typowe uniwersum teorii mnogości można przyrównać do życia pana Johna Smitha, typowego Amerykanina. Moje typowe uniwersum matematyczne jest bardzo interesujące (a nawet pluralistyczne): zawiera ono na przykład duże fragmenty, w których obowiązuje uogólniona hipoteza continuum, podczas gdy w innych fragmentach obowiązuje jej negacja [...][30]. Wydaje się to nie mniej usprawiedliwione niż stwierdzenie, że pan John Smith wychował się w stanie Nowy York, podjął wyższą edukację w Kalifornii, rzucił college na trzecim roku, a obecnie mieszka gdzieś na przedmieściach w północno-wschodniej części kraju; głównie jest pochodzenia anglo-saksońskiego, przy czym jeden z jego dziadków był Irlandczykiem lub Włochem oraz ma domieszkę hiszpańskiej lub afroamerykańskiej krwi; z żoną żyje w separacji oraz ma z nią 2,4 dzieci[31]. (podkreślenie moje — P. W.)

Teraz staje się oczywistym, że analiza bytu idealnego przeprowadzona przez Whiteheada może być zinterpretowana w kategoriach teorii MM. Można założyć, iż owe wzajemnie wykluczające się ze względu na realizację w pojedynczych aktualnych zaistnieniach kolekcje obiektów ponadczasowych tworzą alternatywne uniwersa teoriomnogościowe. Przypomnijmy, że modelem w sensie autora *Process and Reality* nazywamy zbiór wiecznych przedmiotów matematycznych, które mogą być jednocześnie ujęte pojęciowo poprzez pojedyncze, stające się zaistnienie. Dlatego też każde alternatywne uniwersum matematyczne może być rozpatrywane jako indywidualny zbiór ponadczasowych obiektów, które posiadają potencjalną zdolność jednoczesnego wkroczenia w aktualizujące się pojedyncze zaistnienie.

---

http://shelah.logic.at/ — liczyło dokładnie 982 pozycje, z czego większość to artykuły opublikowane w czasopismach z listy Filadelfijskiej); jego prace dotyczą gównie teorii klasyfikacji modeli matematycznych, logik infinitarnych, arytmetyki liczb kardynalnych oraz zastosowań logiki matematycznej w algebrze.

[30] *Uogólniona hipoteza continuum* (GCH) to asercja o postaci $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, gdzie α to liczba porządkowa, $\aleph_{\alpha+1}$ to następnik kardynalny liczby $\aleph_\alpha$. Por. T. Jech, *Set...*, s. 55.

[31] S. Shelah, „The Future of Set Theory", [w:] *Set Theory of Reals. Israel Mathematical Conference Proceedings*, Vol. 6, red. H. Judah, *Proceedings of the Winter Institute held at Bar-Ilan University*, Ramat Gan, 1991; artykuł dostępny również jako preprint pod adresem arXiv:math/0211397 (14 czerwiec 2011).

Jaki charakter ma dziedzina czystej potencjalności w postaci rozmaitości alternatywnych uniwersów teoriomnogościowych? Aby odpowiedzieć na to pytanie oddajmy głos Whiteheadowi. Oznaczmy przez A pewien przedmiot ponadczasowy. W pracy *Nauka...* stwierdza on, że

> tak więc ogólną zasadą wyrażającą wkroczenie A w poszczególne aktualne zaistnienie α jest mieszcząca się w istocie A nieokreśloność co do wkroczenia w α i określoność mieszcząca się w istocie α co do wkroczenia A w α. [...] Każde aktualne zaistnienie α, to rozwiązanie wszelkich modalności w aktualnych, kategorycznych wkroczeniach; miejsce możliwości zajmują prawda i fałsz[32]. (podkreślenie moje — P. W.)

Z powyższego wynika, że sfera czystej potencjalności ma charakter modalny. Obejmuje ona wszelkie dostępne epistemologicznie potencjalności dotyczące poszczególnych aktualizacji alternatywnych uniwersów matematycznych. Oczywiście rozważania z zakresu ontologii matematyki nic nie mówią o metafizycznych realizacjach poszczególnych modeli teorii ZFC w świecie aktualnym. Nasze badania odnoszą się tylko i wyłącznie do bytu idealnego, czyli dziedziny czystych, idealnych możliwości. Dlatego też teorię MM nazwać można *drugorzędowym realizmem modalnym.* Stwierdza ona, że ponadczasowe przedmioty czystej matematyki — pogrupowane w alternatywne, samoistne modele teorii dedukcyjnych — istnieją realnie w obszarze czystej, niezrealizowanej potencjalności bytującej niezależnie od umysłu badaczy.

Używając narzędzi formalnych zaczerpniętych z teorii logik modalnych oraz ich semantyk załóżmy, że każde alternatywne uniwersum teoriomnogościowe w postaci rozszerzeń generycznych to jeden *świat możliwy* (ang. *a possibile word*), natomiast relacja dostępności epistemologicznej pomiędzy dwoma alternatywnymi modelami teorii ZFC to dobrze znana z teorii semantyk Kripkiego *relacja dostępności* (ang.

---

[32] A. N. Whitehead, *Nauka...*, s. 219; P. Wilczek, „The Ontological Approach to Mathematics: Whitehead and Contemporary Mathematical Platonism", [w:] *The Dynamical Ontologies of A. N. Whitehead and N. Hartmann*, Towarzystwo Metafizyczne im. A. N. Whiteheada, Katowice 2001, s. 83-86.

the accessibility relation) pomiędzy możliwymi światami[33]. Mówimy, że jeden możliwy świat (w postaci uniwersum teoriomnogościowego) jest dostępny względem innego możliwego świata (również w postaci uniwersum teoriomnogościowego), gdy jest on jego rozszerzeniem forsingowym. Określmy teraz — za Joelem D. Hamkinsem — funkcję nazwaną później *translacją Hamkinsa* (ang. *Hamkins translation*) odwzorowującą asercje zdaniowe sformułowane w języku logiki modalnej na formuły języka teorii zbiorów[34]. Zakładając, że 0 oznacza logiczny fałsz, funkcja ta ma postać:

$$H(0) = 0$$

$$H(\neg\varphi) = \neg H(\varphi)$$

$$H(\varphi \vee \phi) = H(\varphi) \vee H(\phi)$$

$H(\Diamond\varphi)$=istnieje rozszerzenie forsingowe modelu podstawowego V teorii mnogości ZFC, w którym prawdziwa jest formuła $H(\varphi)$.
Zbiór możliwych asercji z punktu widzenia zdaniowej logiki modalnej pokrywa się ze zbiorem zdań wymuszalnych w języku forsingu teorii ZFC. Zbiór ten ma postać:

$$Force := \{\varphi\colon \exists G \subseteq P \in V, V[G] \models ZFC + H(\varphi)\}\,.$$

Formułę matematyczną φ (na przykład formułę wyrażającą hipotezę continuum) sformułowaną w języku teorii mnogości ZFC nazywamy *możliwą* (ang. *possibile*) lub *wymuszalną* (ang. *forceable*), co oznaczamy jako $\Diamond\varphi$, gdy zachodzi ona w ***pewnym*** rozszerzeniu forsingowym modelu podstawowego V teorii ZFC. Natomiast formułę φ, również w języku ZFC, nazywamy *konieczną* (ang. *necessary*), co oznaczamy jako $\Box\varphi$, gdy zachodzi ona we ***wszystkich*** rozszerzeniach forcingowych modelu podstawowego V teorii ZFC. Jeżeli P oznacza częściowo uporządkowany zbiór taki, że $P \in V$ oraz na P określamy V–generyczny filtr G to zachodzą następujące równoważności:

$$\Diamond\varphi \leftrightarrow \exists P \exists p \in P\ p \Vdash_P \varphi$$

[33]K. Świrydowicz, *Podstawy logiki modalnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004.

[34]J. D. Hamkins oraz B. Löwe, „Modal Logic of Forcing”, *Transaction of American Mathematical Society* 360 (2008), s. 1793-1817.

$$\Box\varphi \leftrightarrow \forall P \forall p \in P \; p \vDash_P \varphi.$$

Na przykład asercje CH lub $\neg CH$ są zdaniami możliwymi, tj. wymuszalnymi w pewnych rozszerzeniach forsingowych, ale nigdy nie są one zdaniami koniecznymi ponieważ mogą być prawdziwe lub fałszywe w konkretnych modelach teorii mnogości ZFC.
Zakładamy, że asercja modalna $\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ to obowiązująca zasada forsingu, gdy dla wszystkich zdań $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sformułowanych w języku teorii mnogości ZFC następujące podstawienie $\sigma(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ jest prawdziwe. J. Hamkins oraz B. Löwe wykazali, że poniższe asercje modalne są obowiązującymi zasadami forsingu:

K	$\Box(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\phi)$
Dualność	$\Box\neg\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\varphi$
S	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$
4	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
.2	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

...dowodząc tym samym następującego twierdzenia:

Twierdzenie o Modalności Forsingu. *Każda asercja zdaniowa logiki modalnej S4.2 jest obowiązującą zasadą forsingu, czyli $Force$=S4.2.*

Oznacza to, że dowodliwymi w teorii mnogości ZFC prawami forsingu są wszystkie asercje zdaniowej logiki modalnej S4.2.

Na podstawie powyższych analiz widzimy, że każdy model generyczny o postaci $V[G]$, jak również samo uniwersum teoriomnogościowe V, wyczerpują Whiteheadowską definicję modelu, tj. zbioru wiecznych przedmiotów matematycznych mogących się równocześnie realizować w pojedynczym stającym się aktualnym zaistnieniu. Przykładowo możemy sobie wyobrazić pojedyncze aktualizujące się zaistnienie ujmujące pojęciowo (tj. konceptualnie) kolekcję ponadczasowych obiektów czystej matematyki w postaci modelu generycznego $V[G]$ takiego, że $V[G] \vDash ZFC + CH$. Inne, również stające się aktualne zaistnienie może realizować zbiór wiecznych przedmiotów w postaci rozszerzenia forsingowego $V[F]$ takiego, że $V[F] \vDash ZFC + \neg CH$. A więc aktualność — w przeciwieństwie do dziedziny czystej potencjalności — nie realizuje warunków wzajemnie się wykluczających.

Nie może istnieć aktualne zaistnienie, które równocześnie ujmowałoby pojęciowo przeciwstawne kolekcje idealnych, ponadczasowych obiektów matematycznych (np. wzajemnie się wykluczające modele generyczne), w których obowiązywałyby sprzeczne twierdzenia matematyczne jak na przykład hipoteza continuum oraz jej negacja. *Wewnętrzną* logiką pojedynczych aktualizujących się zaistnień oraz *wewnętrzną* logiką modeli matematycznych (np. rozszerzeń forsingowych) jest logika predykatów pierwszego rzędu. Natomiast *metalogiką* rozmaitości kolekcji wiecznych przedmiotów matematycznych należących do sfery czystych potencjalności jest zdaniowa logika modalna S4.2.

Używając operatorów modalnych możliwości oraz konieczności określmy zdanie φ jako *możliwie konieczne* (ang. *possibly necessary*) lub też jako *wymuszalnie konieczne* (ang. *forceably necessary*), gdy φ zachodzi w pewnym rozszerzeniu forsingowym modelu podstawowego V oraz we wszystkich dalszych rozszerzeniach modelu $V[G]$, tj. w modelach generycznych o postaci $V[G][\dot{F}]$, gdzie $\dot{F}$ oznacza nazwę $V[G]$–generycznego filtru określonego na zbiorze częściowo uporządkowanym $\dot{Q}$ znajdującym się w pierwszym rozszerzeniu generycznym $V[G]$ modelu podstawowego V (oznacza to, że rozszerzenia forsingowe mogą być iterowane)[35]. W symbolice modalnej zdania wymuszalnie konieczne zapisujemy jako $\Diamond\Box\varphi$. Wspomniany już badacz teorii mnogości — Joel Hamkins — wprowadził nowy postulat teorii zbiorów, nazwany *Zasadą Maksymalności* (ang. *the Maximality Principle*), w skrócie MP orzekający, iż każde zdanie sformułowane w języku teorii mnogości ZFC będące wymuszalnie konieczne jest zdaniem prawdziwym[36]. Symbolicznie MP ma postać:

$$\Diamond\Box\varphi \to \varphi$$

MP może być wzmocniona do asercji o następującej postaci:

$$\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$$

[35] Jech, *Set...*, s. 280 oraz nast.

[36] J. D. Hamkins, „A Simple Maximality Principle", *Journal of Symbolic Logic* 68 (2) (2003), s. 527-550.

mówiącej, że każde możliwie konieczne zdanie sformułowane w języku teorii ZFC jest koniecznie prawdziwe. Jest to dobrze znany z teorii logik modalnych *aksjomat Euklidesa* (ang. the *the Euclidean Axiom*). Równoważnie MP może być sformułowana w postaci implikacji:

$$\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$$

orzekającej, że każde nie koniecznie prawdziwe zdanie sformułowane w teorii ZFC jest koniecznie nie koniecznie prawdziwe. Zauważmy, że schemat wnioskowania o powyższej postaci jest aksjomatem, który dodany do logiki modalnej S4 tworzy wraz z jej własnymi postulatami teorię modalną S5. Można wykazać, że aksjomat MP jest niesprzeczny z pewnikami teorii mnogości ZFC. Przyjmując MP jako dodatkowy pewnik teorii ZFC otrzymujemy następującą charakterystykę zbioru zdań wymuszalnych $Force$:

$$\mathrm{S4.2} \subseteq Force \subseteq \mathrm{S5}.$$

Pozostaje kwestią otwartą zbadanie statusu ontologicznego oraz interpretacji aksjomatu MP jako nowego pewnika teorii ZFC na tle zarysowanej Whiteheadowskiej analizy ponadczasowego bytu idealnego.

4. ZAKOŃCZENIE

W artykule tym analizując ontologiczne koncepcje Alfreda N. Whiteheada (zamieszczone głównie w pracach *Nauka i świat nowożytny* oraz *Process and Reality*), a dotyczące jestestw matematycznych przyjęto Arystotelesowski punkt widzenia. Egzemplifikuje się on w założeniu kategorii potencjalności oraz aktualności mogących przysługiwać bytom określonego rodzaju. Mianowicie Whiteheadowskie wieczne obiekty — w tym przedmioty czystej matematyki — choć są realne, to nie są aktualne. Tworzą one dziedzinę czystych potencjalności. Bazując na pracach angielskiego procesualisty próbowano zastosować osiągnięcia współczesnej logiki matematycznej w celu ukazania — od strony formalnej — owej czysto potencjalnej rzeczywistości. Wykazaliśmy, że owa sfera niezaktualizowanych możliwości ma charakter modalny i właściwą logiką opisującą tą dziedzinę jest dokładnie zdaniowa logika modalna S4.2.

Posługując się terminem — zaczerpniętym z prac Alfreda Tarskiego — teorii matematycznej jako domkniętego zbioru zdań sformułowanych w logice predykatów pierwszego rzędu określiliśmy pojęcie modelu matematycznego jako zbioru ponadczasowych obiektów matematycznych zdolnych do jednoczesnej aktualizacji w pojedynczym stającym się zaistnieniu. Z prac współczesnych logików matematycznych wiemy, że metalogiką tak rozumianych modeli — w tym modeli forsingowych teoriomnogościowego uniwersum V — jest właśnie logika modalna S4.2. Relacja dostępności epistemologicznej pomiędzy modelami generycznymi teorii mnogości ZFC jest dobrze znaną — z semantycznych prac Saula Kripkiego — relacją dostępności pomiędzy światami możliwymi aksjomatyzowalną w modalnej teorii S4.2. Na podstawie prac z ostatnich paru lat poświęconych metateorii uniwersum matematycznego pokazano, iż filozofia Whiteheada dotycząca dziedziny wiecznych przedmiotów może stanowić podstawę heurystyczną dla współcześnie rozwijanej teorii Multiuniwersum Matematycznego będącą próbą formalizacji naszych intuicji odnoszących się do drugorzędowego realizmu matematycznego postulującego obiektywne istnienie alternatywnych oraz samodzielnych ontologicznie modeli uniwersum mnogościowego V.

Z punktu widzenia filozoficznych podstaw matematyki można przyjąć, że teoria Whiteheada dotycząca wiecznych przedmiotów matematycznych jest realizmem matematycznym drugiego rzędu. Mianowicie postuluje ona nie tylko samoistne istnienie przedmiotów matematycznych, ale również samoistne bytowanie alternatywnych uniwersów teoriomnogościowych. Jest to więc realizm dotyczący zarówno odrębnych przedmiotów matematycznych jak również ich — często wzajemnie się wykluczających — hierarchii, którymi są na przykład alternatywne modele teorii mnogości Zermelo-Fraenkela. Ponadto autor *Process and Reality* zakłada, iż ponadczasowe idealne obiekty nauk dedukcyjnych posiadają tak zwaną dwoistą naturę. Jest to natura indywidualno-relacjonalna, co też oznacza, iż każdy wieczny przedmiot jest tożsamy sam ze sobą jak również pozostaje w wielości relacji z innymi obiektami matematycznymi. Dlatego też Whiteheadowskie spojrzenie na matematykę jest strukturalizmem i to strukturalizmem realistycznym, gdyż owe współwystępujące w strukturach przedmioty matematyczne pozostają w relacji identyczności (tj. tożsamości bytowej) we wszystkich przypadkach realizacji w poszczególnych aktualizujących się zaistnieniach. Oznacza to, iż aby w pełni zrozumieć naturę pojedynczego jestestwa matematycznego musimy pytać o jego miejsce w strukturze. Ponadto kategoria ujęć konceptualnych wiecznych przedmiotów przez stające się aktualne zaistnienia pozwala rozumieć dziedzinę czystych potencjalności w sposób empiryczny.

W naszych dociekaniach przyjęliśmy hipotezę badawczą tak zwanego *Pola Racjonalności*, czyli przypuszczenie postulujące istnienie ponadczasowej dziedziny czystych potencjalności, które to stanowią ontologiczną osnowę dla wszystkich aktualnych zaistnień. Ponadto przyjmuje się, iż owo *Pole Racjonalności* wyznacza — pod względem teoriobytowym — granice dla wszystkich realizujących się w świecie aktualnym zaistnień. Jest więc ono sferą czystych możliwości dla ukonkretniających się (tj. stających się) bytów aktualnych. W przypadku przyjętych przez nas założeń należy zaznaczyć, że — z punktu widzenia epistemologicznego — *Pole Racjonalności*, choć konstytuowane przez wieczne przedmioty idealne pozbawione aktualności, ale nie realności, stanowi poznawcze usprawiedliwienie naszego poznania apriorycznego. Badając — za pomocą metod dedukcyjnych — ową dziedzinę czystych możliwości oraz wzajemne związki o charakterze logiczno-ontologicznym zachodzące pomiędzy jej elementami składowymi (tj. poszczególnymi ponadczasowymi obiektami lub ich zbiorami) zdobywamy wiedzę o otaczającym nas aktualnym świecie rzeczywistym. Sfera czystych potencjalności stanowiących ontologiczną podstawę dla realnie zachodzących procesów stanowi obszar badań podatny — z punktu widzenia teorii poznania — na stosowalność metod dedukcyjno-logicznych.

Dlatego też powyższa praca może być potraktowana jako przyczynek do badań nad formalizacją — za pomocą ścisłych metod logiczno-matematycznych — owego hipotetycznego *Pola Racjonalności* konstytuowanego przez sferę czystych możliwości (tj. potencjalności realizujących się w obszarze bytu aktualnego), a tym samym jako pierwszy krok w kierunku zbudowania koherentnej *Logiki Racjonalności*. Heurystycznym usprawiedliwieniem tak rozumianej *Logiki Racjonalności* są między innymi: idee semantyczne Alfreda Tarskiego, teorie zdaniowych logik modalnych oraz teoria Multiuniwersum Matematycznego będąca formalizacją ontologii drugorzędowego realizmu matematycznego. Z powyższej perspektywy badawczej uzasadniona wydaje się hipoteza mówiąca, iż choć *Racjonalność* jest jedna, to ma ona różne, nierzadko wzajemnie się wykluczające oblicza. Jeżeli przyjmiemy istnienie *Pola Racjonalności* jako źródła wszelkich potencjalności, to musimy założyć, iż owa sfera — istniejąca niezależnie od umysłów badaczy — ma w istocie swojej charakter modalny. Zawiera ona wszystkie możliwe związki wynikania mogące się realizować w świecie aktualnym.

SUMMARY

THE LOGIC OF RATIONALITY

In this article Whitehead's philosophy of mathematics is characterized as a Structural Second-Order Platonism and it is demonstrated that the Whiteheadian ontology is consistent with modern formal approaches to the foundation of mathematics. We follow the pathway taken by model-theoretically and semantically oriented philosophers. Consequently, it is supposed that all mathematical theories (understood as deductively closed sets of sentences) determine their own models. These models exist mind-independently in the realm of eternal objects.

From the metatheoretical point of view the hypothesis (posed by Józef Życiński) of the Rationality Field is explored. It is indicated that relationships between different models can be described in the language of modal logics and can further be axiomatized in the framework of the Second Order Set Theory. In conclusion, it is asserted that if any model (of a mathematical theory) is understood, in agreement with Whitehead's philosophy, as a collection of eternal objects, which can be simultaneously realized in a single actual occasion, then our external world is governed by the hidden pattern encoded in the field of pure potentialities which constitute the above mentioned Field of Rationality. Therefore, this work can be regarded as the first step towards building a Logic of Rationality.