Michał Heller

Matematyka i kosmologia

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 50 [Numer rocznicowy], 63-74

2012

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
L (2012), 63–74

Michał Heller
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

MATEMATYKA I KOSMOLOGIA

PRZESTRZENIE RÓŻNICZKOWE

Geometrii różniczkowej zacząłem się uczyć po to, żeby lepiej zrozumieć ogólną teorię względności. Już na samym początku oczarowało mnie pojęcie rozmaitości różniczkowej. Pamiętam, że po raz pierwszy, w bardzo odległej przeszłości, zetknąłem się z nim w podręczniku Raszewskiego [1]. Definicja tam podana nie jest jeszcze dziś ogólnie przyjętą definicją tego pojęcia. Jeszcze się ona kształtuje, ale już jest piękna swoją ogólnością. Wprawdzie prototypem rozmaitości różniczkowej jest przestrzeń rozważana w geometrii, wyposażona w odpowiednie układy współrzędnych, ale rozmaitością może być wszystko, byle było odpowiednio gładkie. W swojej oryginalnej pracy Riemann jako przykład rozważał wrażeniowe kontinuum barw. Oczywiście wkrótce dysponowałem już właściwą definicją rozmaitości – jest ona podstawowym narzędziem każdego, kto się zajmuje teorią względności lub kosmologią.

Ale wkrótce zacząłem dostrzegać niewystarczalność tego pojęcia. Przecież świat nie jest gładki: stoły mają kanty, w powierzchniach bywają ostre dziury, czasoprzestrzenie mogą mieć osobliwości, a brzegi wielu obiektów są rozmyte.

Na krótko moją uwagę przyciągnęła matematyczna teoria zbiorów rozmytych. Owocem tych zainteresowań stała się praca napisana razem z Andrzejem Staruszkiewiczem [2], w której zaproponowaliśmy konstrukcję czasoprzestrzeni z rozmytymi stożkami świetlnymi. Ale praca ta nie pociągnęła za sobą dalszych konsekwencji.

Kiedyś, dość przypadkowo, wpadł mi do rąk podręcznik Romana Sikorskiego do geometrii różniczkowej [3]. Kupowałem wówczas prawie wszystkie pozycje Biblioteki Matematycznej PWN i od jakiegoś czasu książkę Sikorskiego miałem już na półce. Pewnego dnia sięgnąłem do niej i spostrzegłem, że Sikorski nie operuje pojęciem rozmaitości różniczkowej lecz jego uogólnieniem, które nazwał przestrzenią różniczkową. Zamiast układami współrzędnych na rozmaitości Sikorski posługuje się algebrami funkcji na danej przestrzeni (spełniającymi odpowiednie aksjomaty). Zysk polega na tym, że funkcje są znacznie bardziej elastyczne niż układy współrzędnych i całkiem dobrze „rosną" na takich obszarach, na których układy współrzędnych już się załamują.

Czy da się wykorzystać techniki przestrzeni różniczkowych, by opisywać relatywistyczne czasoprzestrzenie z osobliwościami? Nasza pierwsza praca [4] (napisana razem z Jackiem Gruszczakiem i Piotrem Multarzyńskim) była bardzo prosta. Zrobiliśmy niewiele więcej ponad opisanie czasoprzestrzeni w języku algebr funkcyjnych, zgodnie z receptą Sikorskiego. Byliśmy nawet trochę zdziwieni, gdy artykuł – bez żadnych poprawek – przyjęto do druku. Zaczęliśmy sprawę drążyć, ale wkrótce odczuliśmy brak naszych kompetencji w teorii przestrzeni różniczkowych. Dowiedzieliśmy się od krakowskich matematyków, kto w Warszawie kontynuuje podejście Sikorskiego. Okazało się, że czyni to prof. Zbigniew Żekanowski z Politechniki Warszawskiej wraz ze swoją grupą. Nawiązaliśmy z nimi kontakt, który okazał się bardzo owocny. My skorzystaliśmy z ich dużej wiedzy i sprawności w posługiwaniu się technikami przestrzeni różniczkowych; oni otrzymali od nas nowe zastosowania, co wkrótce przyczyniło się do rozwoju samej teorii.

Pierwszym owocem była moja praca z Piotrem Multarzyńskim [5], w której zdefiniowaliśmy stożkową strukturę czasoprzestrzeni w języku algebraicznym i badaliśmy niektóre jej własności. A potem nastąpił szereg prac z grupą warszawską. Naturalnym kandydatem do potraktowania jako przestrzenie różniczkowe stały się czasoprzestrzenie z osobliwościami [6, 8, 12, 13, 18, 22]. Ciekawym wynikiem było wykrycie źródła kłopotów z osobliwym brzegiem czasoprzestrzeni wedle konstrukcji B. Schmidta (tzw. b-boundary). Okazało się, że jedynymi gładkimi funkcjami, jakie z czasoprzestrzeni można przedłużyć na jej brzeg Schmidta są funkcje stałe, co powoduje, że czasoprzestrzeń z brzegiem, z topologicznego punktu widzenia, redukuje się do jednego punktu (dzieje się tak, ponieważ we wszystkich punktach funkcje stałe przybierają tę samą wartość) [13]. Własność tę eksploatowaliśmy potem w szeregu następnych prac [17, 19].

Nieco odmienną strategię zastosowaliśmy w pracy [16]. Połączenie geometrycznej metody rozwiązywania równań różniczkowych z metodą Sikorskiego dało wgląd w strukturę osobliwości równania Friedmana, opisującego ewolucję modeli kosmologicznych.

Prace dotyczące osobliwości skierowały naszą uwagę na zagadnienie wymiaru (różniczkowego) przestrzeni różniczkowych [7] oraz skłoniły do dokonania przeglądu różnych uogólnień pojęcia rozmaitości analogicznych do ujęcia Sikorskiego [11]. Dość szybko sytuacja dojrzała do tego, że można się było pokusić o numer specjalny czasopisma *Demonstratio Mathematica*, (wydawanego przez Politechnikę Warszawską) podsumowujący dotychczasowe wyniki [10].

Robert Geroch w 1972 r. zaproponował ujęcie ogólnej teorii względności w języku algebraicznym [15], ale udało mu się to zrobić tylko dla dodatnio określonej metryki. Algebraiczny język przestrzeni różniczkowych okazał się pod tym względem znacznie skuteczniejszy, o czym świadczą prace [9, 20]. W drugiej z tych prac uogólniliśmy metodę Sikorskiego, stosując zamiast pojedynczej algebry (jako strukturę różniczkową) snop algebr. Uogólnienie okazało się o tyle skuteczne, że pozwoliło nam na przedstawienie w języku snopowym superprzestrzeni znanej z teorii supergrawitacji [23, 29]. To nas naprowadziło na myśl, by systematycznie rozbudować snopowe uogólnienie teorii przestrzeni różniczkowych Sikorskiego. Uogólnienie to nazwaliśmy przestrzeniami strukturalnymi, a ich teorię przedstawiliśmy w pracy [21].

GEOMETRIA NIEPRZEMIENNA

Po jednym z seminariów w Instytucie Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Warszawskiego, na którym przedstawiłem pewne wyniki, uzyskane metodami przestrzeni różniczkowych, prof. Andrzej Trautman zwrócił mi uwagę, że mogłoby to być jeszcze ciekawsze, gdybyśmy się nie ograniczali do algebr przemiennych. Pod wpływem tej rozmowy postarałem się o książkę Alaina Connesa *Noncommutative Geometry* [24] i zacząłem stawiać pierwsze kroki w bogatej dziedzinie geometrii nieprzemiennej. Owocem tego były artykuły [25, 26]. Artykuł [25] zapoczątkował poważniejszy ciąg prac, w których jako narzędzia używaliśmy geometrii nieprzemiennej. I tym razem pierwszym problemem, z jakim zmierzyliśmy się przy pomocy nowej metody, był problem osobliwości [27, 28, 31].

Ponieważ dobrze znaliśmy strukturę osobliwego brzegu czasoprzestrzeni według konstrukcji Schmidta, zaczęliśmy nasze badania właśnie od tej konstrukcji. Wiedzieliśmy, że na czasoprzestrzeni z brzegiem Schmidta może istnieć tylko algebra funkcji stałych. Jest to typowa sytuacja, z jaką potrafi radzić sobie geometria nieprzemienna. Zastosowaliśmy zatem do tego problemu konstrukcję proponowaną przez Connesa [24, s. 99 i nast.]. Zgodnie z tą konstrukcją, czasoprzestrzeń z osobliwym brzegiem reprezentuje pewna nieprzemienna algebra z konwolucją jako mnożeniem, ale w praktyce pracuje się z jej regularną reprezentacją w wiązce przestrzeni Hilberta. Matematyczny aparat tej reprezentacji bardzo przypomina standardowy aparat mechaniki kwantowej. Wygląda to tak, jakby struktura osobliwości „wiedziała coś o efektach kwantowych". To nam nasunęło pomysł, aby podjąć próbę zbudowania modelu kwantowej grawitacji [30], ale już wkrótce zorientowaliśmy się, że na tym etapie nie należy mówić o kwantowej grawitacji, lecz jedynie o unifikacji ogólnej teorii względności i mechaniki kwantowej [32]. Potem nastąpiły dalsze próby rozwijania modelu [33, 34, 35, 36]; nie zawsze szły one we właściwym kierunku, ale dzięki tym próbom w problemie osobliwości uczyniono pewien postęp [37, 38, 46].

Ażeby uściślić nasz model, postanowiliśmy ograniczyć się tymczasowo do uproszczonego modelu (ze skończoną grupą strukturalną) [39, 40]. W szczególności zajęliśmy się problemem obserwabli w naszym modelu [41] oraz zagadnieniem uogólnionego rachunku prawdopodobieństwa, okazało się bowiem, że elementy rozważanych przez nas algebr są operatorami losowymi [42, 44]. W pracy [41] po raz pierwszy w naszych rozważaniach pojawiły się bialgebry; są to algebry z nowym rodzajem działania (ściślej kodziałania), zwanym koproduktem.

Po tych pracach uznaliśmy, że nasz model unifikacji ogólnej teorii względności z mechaniką kwantową zasługuje na rodzaj całościowego przedstawienia. Matematyczne aspekty modelu zostały opracowane w artykule [43], a jego fizyczne i pojęciowe aspekty w artykule [45]. Uważamy, że te dwa artykuły łącznie stanowią najpełniejsze przedstawienie naszego modelu. Nie zamykają one jednak dalszych prac nad nim; przeciwnie – ukazują, w jakim kierunku powinny iść dalsze badania. Za najmocniejszą stronę naszego modelu uważamy to, co nazywaliśmy „pojęciową unifikacją" ogólnej teorii względności z mechaniką kwantową. Tak, wydawałoby się, różne struktury jak: probabilistyka, dynamika i pewne aspekty termodynamiki, w naszym modelu są opisywane przez tę samą strukturę matematyczną (algebrę von Neumanna z pewnym normalnym stanem na niej). Model jest z natury globalny, a więc wszelkie nielokalności mechaniki kwantowej (w rodzaju stanów splątanych, efektów typu EPR, itp.) znajdują w nim naturalne wyjaśnienie. Odpowiednie „uśrednianie" powoduje „zabijanie" nieprzemienności, w wyniku czego otrzymuje się znane struktury matematyczne wraz z ich standardową interpretacją fizyczną. Interesująca, nowa możliwość pojawia się w zagadnieniu osobliwości początkowej i końcowej w kosmologii. Według dotychczasowego paradygmatu przyszła teoria kwantowej grawitacji albo osobliwości usunie, albo je pozostawi. W naszym modelu pojawia się trzecia możliwość. Jest ona związana z jego probabilistycznym charakterem: może być mianowicie tak, że z punktu widzenia makroskopowego obserwatora osobliwość początkowa istnieje, ale z perspektywy świata subkwantowego jest ona probabilistycznie nieistotna (w przestrzeni nieprzemiennej osobliwości należą do podzbioru miary zero). To samo dotyczy osobliwości końcowej i innych silnych osobliwości krzywizny [38, 43,45, 46]. Ta pozornie paradoksalna sytuacja ma miejsce dlatego, że przejście od reżimu nie-przemiennego (świat subkwantowy) do przemiennego (świat makroskopowy) dokonuje się, jak wspomnieliśmy wyżej, przy pomocy pewnego rodzaju uśrednień. Osobliwości w perspektywie makro okazują się artefaktami tego uśredniania, podczas gdy w perspektywie submikro całkowicie „rozmywają się w prawdopodobieństwach".

Nie wolno jednak zapomnieć, że nasz model jest jedynie modelem roboczym. Raczej ukazuje on pewne pojęciowe możliwości na drodze unifikacji fizyki i opracowuje pewne matematyczne narzędzia, być może prowadzące do tego celu, raczej niż kandyduje na model już taką unifikację proponujący. Przede wszystkim brak mu aspektu teoriopolowego, dlatego mówimy w nim o unifikacji ogólnej teorii względności z mechaniką kwantową a nie wprost o kwantowaniu grawitacji. Na obecnym etapie nie mamy również nawiązania do standardowego modelu cząstek elementarnych, a zagadnienie przewidywań empirycznych wciąż czeka na gruntowniejsze opracowanie (por. [41]).

Oczywiście myślimy o zaradzeniu tym brakom, ale najpierw trzeba zmierzyć się z problemami matematycznymi, bez których dalszy postęp nie będzie możliwy. W tym kierunku zmierzają prace [51, 52, 53]. Pierwsza z nich ma pewien wydźwięk filozoficzny, dotyka bowiem genezy geometrii nieprzemiennej. Pokazaliśmy w niej, że w obszarach, w których załamuje się aksjomat Hausdorffa, jedynym możliwym opisem jest opis probabilistyczny (w uogólnionym sensie), co w naturalny sposób prowadzi do geometrii nieprzemiennej. W pracy [52] udało nam się połączyć metodę grup różniczkowych Sikorskiego z (z nieco zmodyfikowaną) metodą grup kwantowych (algebr Hopfa). W pracy [53] sformułowaliśmy definicję półprostego iloczynu grupoidów z odpowiednimi algebrami stowarzyszonymi z takimi iloczynami. Szczególnym przypadkiem tej konstrukcji jest grupoid Poincaré'go, będący uogólnieniem grupy Poincaré'go (czyli półprostego iloczynu przekształceń Lorentza i przesunięć czasoprzestrzennych). Może to mieć duże znaczenie dla przyszłych zastosowań nie tylko do naszego modelu.

Interesują nas również filozoficzne aspekty poruszanej przez nas problematyki. W pracy [50] przedyskutowaliśmy, w świetle naszego modelu, symptomy pojęciowej rewolucji, jakiej należy spodziewać się, gdy zostanie wreszcie sformułowana właściwa teoria grawitacji. W pracach [55, 56] skupiliśmy się na wpływie, jaki geometria nieprzemienna wywiera na nasze rozumienie czasu i jego genezy. W pracy [56] został także przedstawiony program Shahna Majida stworzenia ostatecznej teorii fizycznej, oparty na poszukiwaniu odpowiednio bogatych samodualnych struktur matematycznych, i jego filozoficzne perspektywy. Ogólno filozoficzne, a nawet pewne teologiczne, konsekwencje geometrii nieprzemiennej (z naszym modelem w tle) zostały poruszone w pracy [57].

SUMMARY

MATHEMATICS AND COSMOLOGY

The mathematical and cosmological works of a group associated with the Copernicus Center for Interdisciplinary Studies in Cracow are summarized. The group consists mainly of M. Heller, L. Pysiak, W. Sasin, Z. Odrzygóźdź, M. Eckstein and J. Gruszczak. The first paper by members of the group was published in 1988, and research has been continued to the present day. The main mathematical tool used in the first part of the group's activity was the theory of differential spaces and, in the second, methods of noncommutative geometry. Among the main topics investigated have been classical singularities in relativistic cosmology and the unification of general relativity with quantum mechanics.

PRZYPISY

[1] Raszewki, P. K., Geometria Riemanna i analiza tensorowa, PWN, Warszawa 1958.

[2] Heller, M., Staruszkiewicz, A., Fuzzy Space-Time, Zeitschrift für Naturforschung 36a, 1981, 609-610.

[3] Sikorski, R., Geometria różniczkowa, PWN, Warszawa 1972.

[4] Gruszczak, J,. Heller, M., Multarzyński, P. A Generalization of Manifolds as Space-Time Models, J. Math. Phys. 29, 1988, 2576-2580.

[5] Multarzyński, P., Heller, M., The Differential and Cone Structures of Spacetime, Foundations of Physics 20, 1990, 1005-1015.

[6] Heller, M., Sasin, W. Regular Singularities in Space-Time, Acta Cosmologica 17 1991, 7-18.

[7] Heller, M., Multarzyński, P., Sasin, W., Żekanowski, Z., Local Differential Dimension of Space-Time, Acta Cosmologica 17, 1991, 19-26.

[8] Gruszczak, J., Heller, M., Pogoda, Z., Cauchy Boundary and b-Incompletness of Space-Time, International Journal of Theoretical Physics 30, 1991, 555-565.

[9] Heller, M., Einstein Algebras and General Relativity, International Journal of Theoretical Physics 31, 1992, 277-278.

[10] Seminar on Differential Spaces, Demonstratio Mathematica [numer specjalny] 24, no 3-4, 1991, 347-348.

[11] Heller, M., Multarzyński, P., Sasin, W., Żekanowski, Z., On Some Generalizations of the Manifold Concept, Acta Cosmologica 18, 1992, 31-44.

[12] Gruszczak, J., Heller, M., Sasin, W., Quasiregular Singularity of a Cosmic String, Acta Cosmologica 18, 1992, 45-55.

[13] Heller, M., Sasin, W., Trafny, A., Żekanowski, Z., Differential Spaces and New Aspects of Schmidt's b-Boundary of Space-Time, Acta Cosmologica 18, 1992, 57-75.

[14] Schmidt, B.G., A New Definition of Singular Points in General Relativity, General Relativity and Gravitation 1, 1971, 269–280.

[15] Geroch, R., Einstein Algebras, Communications in Mathematical Physics 26, 1972, 271-275.

[16] Heller, M., Sasin, W., Generalized Friedman's Equation and Its Singularities, Acta Cosmologica, 19, 1993, 23-33.

[17] Sasin, W., Heller, M., Space-Time with Boundary as a Generalized Differntial Space, Acta Cosmologica, 19, 1993, 35-44.

[18] Gruszczak, J., Heller, M., Differential Structure of Space-Time and Its Prolongations to Singular Boundaries, International Journal of Theoretical Physics 32, 1993, 625-648.

[19] Heller, M., Sasin, W., The Structure of the b-Completion of Space-Time, General Relativity and Gravitation, 26, 1994, 797-811.

[20] Heller, M., Sasin, M., Sheaves of Einstein Algebras, International Journal of Theoretical Physics, 34, 1995, 387-398.

[21] Heller, M., Sasin, M., Structured Spaces and Their Application to Relativistic Physics, Journal of Mathematical Physics 36, 1995, 3644-3662.

[22] Heller, M., Sasin, M., Anatomy of the Elementary Quasi-Regular Singularity, Acta Cosmologica, 21, 1995, 47-60.

[23] Heller, M., Sasin, M., Superstructured Spaces, Acta Cosmologica, 21, 1995, 61-70.

[24] Connes, A., Noncommutative Geometry, Academic Press, New York, 1994.

[25] Heller, M., Commutative and Non-Commutative Einstein Algebras, Acta Cosmologica 21, 1995, 111-130.

[26] Heller, M., Sasin, W., Non-Commutative Differential Geometry, Acta Cosmologica 21, 1955, 235-245.

[27] Heller, M., Sasin, W., Noncommutative Structure of Singularities in General Relativity, Journal of Mathematical Physics, 37, 1996, 5665-5671.

[28] Heller, M., Sasin, W., The Closed Friedman World Model with the Initial and Final Singularities as Non-commutative Space,

Banach Center Publications, vol. 41: Mathematics of Gravitation, part I: Lorentzian Geometry and Einstein Equations, red.: P.T. Chruściel, Warszawa 1997, pp. 153-162.

[29] Heller, M., Sasin, W., Rigorous Model of Classical Spacetime Foam, International Journal of Theoretical Physics 36, 1997, 1441-1455.

[30] Heller, M., Sasin, W., Lambert, D., Groupoid Approach to Noncommutative Quantization of Gravity, Journal of Mathematical Physics 38, 1997, 5840-5853.

[31] Heller, M., Sasin, W., Origin of Classical Singularities, General Relativity and Gravitation 31, 1999, 555-570.

[32] Heller, M., Sasin, W., Noncommutative Unification of General Relativity and Quantum Mechanics, International Journal of Theoretical Physics 38, 1999, 1619-1642.

[33] Heller, M., Some Conceptual Problems of the Groupoid Approach to Noncommutative Quantization of Gravity, Acta Cosmologica 24, 1998, 71-85.

[34] Heller, M., Sasin, W., Odrzygóźdź, Z., State Vector Reduction as a Shadow of Noncommutative Dynamics, Journal of Mathematical Physics 41, 2000, 5168-5179.

[35] Demaret, J., Heller, M., Sasin, W., Noncommutative Unification of General Relativity with Quantum Mechanics and Canonical Gravity Quantization, Revue des Questions Scientifiques, 172 (4), 2001, 357-370.

[36] Heller, M., Sasin, W., Odrzygóźdź, Z., Noncommutative Quantum Dynamics, Gravitation and Cosmology 7, 2001, 135-139.

[37] Heller, M., Sasin, W., Differential Groupoids and Their Application to the Theory of Spacetime Singularities, International Journal of Theoretical Physics 41, 2002, 919-937.

[38] Heller, M., Odrzygóźdź, Z., Pysiak, L., Sasin, W., Structure of Malicious Singularities, International Journal of Theoretical Physics 42, 2003, 427-441.

[39] Heller, M., Odrzygóźdź, Z., Pysiak, L., Sasin, W., Noncommutative Unification of General Relativity and Quantum Mechanics. A Finite Model, General Relativity and Gravitation 36, 2004, 111-126.

[40] Heller, M., Odrzygóźdź, Z., Pysiak, L., Sasin, W., Quantum Groupoids of the Final Type and Quantization on Orbit Spaces, Demonstratio Mathematica, 37, 2004, 671-678.

[41] Pysiak, L., Heller, M., Odrzygóźdź, Z., Sasin, W., Observables in a Noncommutative Approach to the Unification of Quanta and Gravity: A Finite Model, General Relativity and Gravitation 37 (3), 2005, 541-555.

[42] Heller, M., Pysiak, L., Sasin, W., Noncommutative Dynamics of Random Operators, International Journal of Theoretical Physics 44, 2005, 619-628.

[43] Heller, M., Pysiak, L., Sasin, W., Noncommutative Unification of General Relativity and Quantum Mechanics, Journal of Mathematical Physics 46, 2005, 122501-16.

[44] Heller, M., Pysiak, L., Sasin, W., Inner Geometry of Random Operators, Demonstratio Mathematica 39 (nr 4), 2006, 971-978.

[45] Heller, M., Pysiak, L., Sasin, W., Conceptual Unification of Gravity and Quanta, International Journal of Theoretical Physics 46, 2007, 2492-2512.

[46] Heller, M., Odrzygóźdź, Z., Pysiak, L., Sasin, W., Anatomy of Malicious Singularities, Journal of Mathematical Physics 48, 2007, 092504-092511.

[47] Heller, M., Odrzygóźdź, Z., Pysiak, L., Sasin, W., Gravitational Aharonov-Bohm Effect, International Journal of Theoretical Physics 47, 2008, 2566-2575.

[48] Heller, M., Pysiak, L., Sasin, W., Golda, Z., Noncommutative Closed Friedman Universe, General Relativity and Gravitation 41, 2009, 1625-1637.

[49] Heller, M., A Noncommutative Friedman Cosmological Model, Annalen der Physik 19, 2010, 196-201.

[50] Heller, M., Pysiak, L., Sasin, W., Fundamental Problems in the Unification of Physic, Foundations of Physics 41, 2011, 905-918.

[51] Heller, M., Pysiak, L., Sasin, W., Geometry of Non-Hausdorff Spaces and Its Significance for Physics, Journal of Mathematical Physics 52, 2011, 043506.

[52] Heller, M., Odrzygóźdź, Z., Pysiak, L., Sasin, W., Hopf-Sikorski Algebras, Demonstatio Mathematica, vol. 44, 2011, 213-221.

[53] Pysiak, L., Eckstein, M., Heller, M., Sasin, W., Semidirect Product of Groupoids, Its Representations and Random Operators, arXiv:1107.1775 [math-ph]

[54] Heller, M., Time and Physics – A Noncommutative Revolution, w: A Collection of Polish Works on Philosophical Problems of Time and Spacetime, Synthese Library, vol. 309, red. H. Eilstein, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 2002, ss. 47-56.

[55] Heller, M., Time of the Universe, w: The Far-Future Universe – Eschatology from a Cosmic Perspective, red.: G.F.R. Ellis, Templeton Foundation Press, Philadelphia-London, 2002, ss. 63-64.

[56] Heller, M., Algebraic Self-Duality as the Ultimate Explanation, Foundations of Science, 9, 2004, 369-385.

[57] Heller, M., Where Physics Meets Metaphysics, in: A. Connes, M. Heller, Sh. Majid, R. Penrose, J. Polkinghorne, A. Tylor, On Space and Time, red.: Shahn Majid, Cambridge University Press, Cambridge 2008, pp. 238-277.