Andrzej Fuliński

Słabe łamanie ergodyczności vs. determinizm

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 59 [Numer specjalny: filozofia fizyki], 83-100

2015

Słabe łamanie ergodyczności vs. determinizm

Andrzej Fuliński
Polska Akademia Umiejętności
Instytut Fizyki UJ

Weak ergodicity breaking vs. determinism of physical processes

Abstract

All physical processes are deterministic *de iure*. Physicists speak about different types of determinism of physical processes, depending on the degree with which their course can be anticipated. Usually, the course of ergodic processes can be predicted with less certainty than the non-ergodic ones, the latter being integrable.

Recent measurements of motions of single particles in composite systems, especially in living biological cells, show that such motions are, in most cases, breaking the Boltzmann's ergodic hypothesis. On the other hand, their trajectories are random, i.e., one cannot know *a priori* where the particle will be even in near future. This leads to conclusion that many existing in nature processes are nonergodic but not integrable, therefore predictable only in the mean, representing still other type of determinism.

Keywords

Boltzmann hypothesis, ergodic theory, deterministic chaos, Brownian motion, anomalous diffusion, single-particle trajectory

Ergodyczność

Tak zwaną hipotezę ergodyczną wprowadził Boltzmann dla uzasadnienia termodynamiki poprzez mechanikę (dokładniej, poprzez równanie Boltzmanna i twierdzenie H). Hipoteza ta jest uważana za podstawę mechaniki statystycznej i orzeka, że średniowanie stanu układu wzdłuż jego trajektorii w przestrzeni fazowej (średniowanie po czasie – równoważność rzeczywistego pomiaru) może być zastąpione przez średniowanie po odpowiednim zespole statystycznym[1]:

$$< f\,[X(t)] >_{\mathrm{t}} = < f\,[X(t)] >_{\mathrm{ens}} . \quad (1)$$

Zaletą takiego sformułowania jest jego prostota: (a) nie wymaga spełnienia dodatkowych warunków, na przykład stacjonarności itp., (b) dla udowodnienia *nieergodyczności* wystarczy

[1] Boltzmann *de facto* używał średniowania po tak zwanej przestrzeni fazowej μ, czyli przestrzeni jedno-cząstkowej (trajektorie będące rozwiązaniami równań ruchu pojedynczych cząstek, np. równania Boltzmanna), nie, jak się to robi w obecnej formalnej teorii ergodycznej, w tak zwanej przestrzeni γ, czyli przestrzeni opisującej cały makroskopowy układ (trajektorie będące rozwiązaniami równania Liouville'a).

złamanie równości (1) dla jednej obserwabli, (c) z punktu widzenia pomiaru jest to definicja operacyjna. Wadą jest to, że dla udowodnienia *ergodyczności* układu lub procesu konieczne byłoby wykazanie równości (1) dla *wszystkich* obserwabli $f[X(t)]$ układu dynamicznego (procesu) $X(t)$, co jest praktycznie niewykonalne. Nie da się zatem osiągnąć głównego celu Boltzmanna – użycia metod statystycznych do opisu własności układów makroskopowych, w szczególności dla uzasadnienia zgodności termodynamiki z mechaniką.

Ponadto przy dokładniejszej analizie formalnej hipotezy ergodycznej (m.in. własności trajektorii układów dynamicznych w przestrzeni fazowej) okazuje się, że sformułowanie Boltzmanna zawiera również inne wady. Spowodowało to powstanie całej nowej gałęzi fizyki matematycznej – teorii ergodycznej[2]. Należy jednak wspomnieć, że warunki formalne wymagane dla stosowalności kolejnych twierdzeń teorii ergodycznej są spełnione tylko dla wąskiej klasy układów dynamicznych. Z kolei znana klasa układów na pewno nieergodycznych jest także wąska. Pozostaje cała obszerna klasa układów dynamicznych, o których nie można na pewno orzec, że są ergodyczne lub nieergodyczne.

[2] Kilka elementarnych informacji o współczesnej teorii ergodycznej i parę podstawowych twierdzeń jest podanych w „Dodatku" na końcu tego tekstu.

Anomalny ruch Browna

Do niedawna fizycy nie poświęcali wiele uwagi problemowi ergodyczności, tym bardziej, że zarówno termodynamika (zwłaszcza równowagowa) jak i fizyka statystyczna dobrze opisywały wszystkie obserwowane (w odpowiednich zakresach stosowalności tych teorii) zjawiska fizyczne. Przyjmowano zatem, że dla układów makroskopowych hipoteza ergodyczna jest prawdziwa, nawet wtedy, gdy nie były spełnione wszystkie warunki formalne wymagane przez ogólną teorię. Dopiero z początkiem obecnego wieku pojawiły się przypuszczenia teoretyczne, związane z zaobserwowanym zjawiskiem tzw. anomalnej dyfuzji, a raczej anomalnego ruchu Browna[3], że niektóre takie ruchy mogą nie spełniać warunku (1). Kilka lat temu przypuszczenia te uzyskały potwierdzenie doświadczalne w pomiarach ruchów pojedynczych molekuł wewnątrz żywych komórek i organelli biologicznych. Analiza zmierzonych pojedynczych trajektorii potwierdziła, że w niektórych przypadkach rzeczywiście równość (1) nie jest spełniona, czyli następuje w takich warunkach tak zwane słabe łamanie ergodyczności.

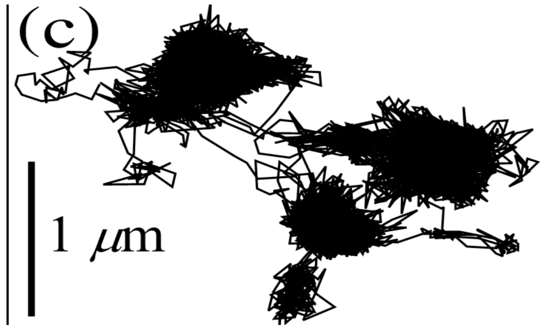
Komentarz: o silnej nieergodyczności mówimy, gdy w przestrzeni fazowej istnieją obszary o niezerowej mierze niedostępne dla trajektorii układu (zob. „Dodatek"), o słabej – gdy (prawie) cała przestrzeń fazowa jest (być może) dostępna dla trajektorii,

[3] Dyfuzja makroskopowa to średni efekt ruchów Browna wielu dyfundujących cząsteczek. Dla normalnej dyfuzji średnia wartość $[x(\mathrm{t}) - x(0)]^2$ jest proporcjonalna do t, dla anomalnej – do t^{a}, $0 < \mathrm{a} < 2$.

ale zachodzi złamanie równości Boltzmanna. Obserwowano to dotychczas na trajektoriach pojedynczych cząstek[4], w procesach dyfuzji (ruchu Browna)[5]. Anomalny ruch Browna był w kilkunastu ostatnich latach obserwowany eksperymentalnie w wielu układach złożonych i/lub nieuporządkowanych: w szkłach, komórkach i organellach biologicznych, ruchu cen na giełdach, itd.

Większość takich układów to układy nierównowagowe i niestacjonarne.

Na poniższym rysunku pokazuję typowe zachowanie się cząstki w środowisku silnie nieuporządkowanym z „pułapkami": zarejestrowano tutaj (Wong i in, 2004) 600-sekundową trajektorię cząstki o średnicy 250 nm poruszającą się w splątanej sieci F-aktyny:



[4] Istnieją w literaturze wcześniejsze przypuszczenia, że słabe łamanie ergodyczności występuje też w szkłach (zarówno ceramicznych jak metalicznych i spinowych).
[5] Dyfuzja: makroskopowo typowy proces termodynamicznie nieodwracalny, mikroskopowo superpozycja ruchów wielu cząstek Browna. Ruch Browna: archetypowy proces stochastyczny – ruch cząstki pod wpływem szumu termicznego.

Widać wyraźnie charakterystyczny ruch błądzący z długimi przeskokami pomiędzy kolejnymi „pułapkami", wewnątrz których cząstka wykonuje typowy ruch termiczny. Przypuszcza się, że podobny charakter mają ruchy w szkłach. Ruch taki, jak wynika z teorii[6], jest (słabo) nieergodyczny.

Kilka kolejnych przykładów (pominiemy modele teoretyczne i symulacje komputerowe):

1. ruch cząstek polimeru o długości 100–200 nm wstawionych sztucznie do żywych komórek rakowych (Gal i Weihs, 2010);
2. ruch kanału potasowego (białko o średnicy ok. 10 nm) w błonie komórkowej żywej komórki (Weigel et al., 2011);
3. ruch telomerów (długość kilkadziesiąt nm) wewnątrz jądra komórki rakowej (Kepten, Bronshtein i Garini, 2011).

Zaobserwowano, między innymi, że ruch telomerów jest dość silnie nieergodyczny, ruch kanału potasowego – nieergodyczny, ale po podaniu substancji (leków) wpływających na stan błony komórkowej staje się ergodyczny. Dalsze przykłady będą omówione w drugiej części tego tekstu.

[6] Tzw. CTRW = *continuous time random walk*, jeden z rodzajów ruchu Browna.

Determinizm

Trzeba zacząć od tego, że fizycy przez determinizm rozumieją coś trochę innego niż filozofowie. Stwierdzenie „fizyka jest deterministyczna" lub, gdy się temu dokładniej przyjrzeć, „równania fizyki teoretycznej są deterministyczne" znaczy dla nas tylko tyle (i aż tyle), że rozwiązania tych równań (są to z reguły równania różniczkowe lub całkowe) są jednoznaczne. Innymi słowy, znając stan procesu w danej chwili czasu t_0, znamy (możemy przepowiedzieć = wyliczyć) wszystkie stany późniejsze[7], a także (poza procesami termodynamicznymi – ogólniej: zwężającymi) wcześniejsze. Dla fizyka nie jest to więc *założenie* o naturze świata[8], lecz tylko spostrzeżenie (stwierdzenie faktu empirycznego) dotyczące własności opisu świata *modo mathematico*. Założeniem jest tu to, że te równania opisują świat wystarczająco poprawnie i wystarczająco dokładnie, by można było na tej podstawie coś przewidywać. Założenie to jest oparte na empirycznym fakcie skutecznej opisywalności świata przez fizykę.

Ze względu na różnice w opisie świata przez kolejne teorie fizyczne można mówić o kilku typach determinizmu fizycznego, o czym pisałem kilkakrotnie w różnych kontekstach (Fuliński, 1993; Fuliński, 2005).

7 Równania mechaniki (każdej) zawierają w sobie symetrie, będące odbiciem symetrii obserwowanych w naszym Wszechświecie.

8 Jak to podają np. słowniki i encyklopedie filozoficzne.

„Do początku XX wieku najgłębszą znaną strukturą świata była mechanika Newtona. Obraz świata sugerowany przez nią mówi o determinizmie zarówno ontycznym jak i poznawczym: wszystkie zdarzenia tworzą łańcuchy przyczynowo-skutkowe, każde zjawisko jest całkowicie zdeterminowane swymi przyczynami. Znając przyczyny, znamy (możemy przewidzieć) skutki. Sądzono, że duże przyczyny wywołują duże skutki, małe – małe skutki. Dlatego sądzono również, że jeśli znamy przyczyny z niewielkim błędem, to przewidywania też będą obarczone małym błędem. W takim rozumowaniu ukryte jest założenie, że ruch jest stabilny" (Fuliński, 2005) (zob. niżej).

Jeszcze „silniejszy" determinizm pojawia się w niektórych interpretacjach ogólnej teorii względności (w mechanice relatywistycznej), sugerujących istnienie *świata-bloku*, w którym wszystkie zdarzenia, z naszego punktu widzenia zarówno przeszłe jak i przyszłe, współistnieją „jednocześnie". Zwolennicy takiej interpretacji naszego świata sądzą, że to tylko nasza świadomość przemieszcza się jednokierunkowo pomiędzy różnymi punktami (tamże).

Mechanika kwantowa jest również deterministyczna. Równanie Schrödingera opisujące zachowanie się funkcji falowej $\psi(t)$, a więc głębszą rzeczywistość kwantową, to też równanie różniczkowe o jednoznacznych rozwiązaniach: zadanie (pomiar) stanu układu (procesu) $\psi(t_0)$ w chwili t_0 jednoznacznie wyznacza całą ewolucję $\psi(t)$ aż do chwili następnego pomiaru (obserwacji). Determinizm probabilistyczny, *w średniej*, pojawia się na poziomie *pomiaru* jakiejś wielkości fizycznej, gdy ze względu na oddziaływanie układu z „obserwatorem" (urządzeniem pomiarowym) tracimy pełną kontrolę przy *przepowiadaniu wyników pomiaru* obserwabli kwantowych i możemy jedynie określić prawdopodobieństwo określonego wyniku pomiaru.

Termodynamika, która nie zawiera wszystkich symetrii mechaniki (jest to także związane z obserwowanymi własnościami naszego świata), jest deterministyczna tylko w przód w czasie: początkowy stan nierównowagowy determinuje końcowy stan stacjonarny, lecz stan końcowy, będący atraktorem w przestrzeni stanów, nie wyznacza jednoznacznie stanów przeszłych układu. Jest to więc determinizm jednokierunkowy.

Współcześnie zmieniła się też trochę interpretacja determinizmu mechaniki klasycznej ze względu na „odkrycie"[9] rozwiązań niestabilnych (chaotycznych) równań mechaniki klasycznej. Historia zamkniętego świata rządzonego w pełni przez mechanikę klasyczną pozostaje raz na zawsze ustalona. Nie znaczy to jednak, że byłaby przewidywalna. Do przepowiedzenia zachowania się procesu chaotycznego trzeba by było znać stan początkowy z nieskończenie wielką dokładnością, gdyż początkowo sąsiednie trajektorie chaotyczne rozbiegają się wykładniczo, co powoduje, że błąd przewidywania kolejnych późniejszych (a także wcześniejszych) stanów też rośnie wykładniczo i bardzo szybko przekracza dokładność pomiaru. Podobnie jak w mechanice kwantowej, możemy przewidywać co najwyżej

[9] O niestabilności trajektorii ruchu trzech ciał wiedział już Poincaré na początku XX wieku.

wyniki średnie. Z tego powodu nie da się przewidzieć na przykład, na podstawie znajomości własności atomów i molekuł chemicznych, jakie struktury biologiczne powstaną z nich w trakcie ewolucji.

Trochę podobna – praktycznie – jest sytuacja w procesach przebiegających w układach wielu ciał, zwłaszcza w procesach termodynamicznych. Musimy się tu uciec do metod statystycznych, tak ze względu na praktyczną niemożność wystarczająco dokładnego obliczenia ruchu wszystkich cząstek, jak i na obecność w trajektoriach poszczególnych cząstek fragmentów o charakterze chaotycznym[10]. Ponadto w układach makroskopowych nie interesujemy się – na ogół – wartościami energii, położeń, pędów itd. wszystkich cząstek, wystarcza znajomość parametrów fizycznych określających stan całego układu i/lub jego (makroskopowych) części, a więc odpowiednich wartości średnich. Istotnym problemem jest tu wybór odpowiednich rozkładów, z których oblicza się wartości średnie. W standardowej fizyce i termodynamice statystycznej takimi rozkładami są rozkłady (statystyki) Maxwella-Boltzmanna, Bosego-Einsteina i Fermiego-Diraca i – bardziej ogólnie – uniwersalne zespoły statystyczne (zespoły Gibbsa). Metody te pozwalają na przewidywanie przyszłych (lecz nie zawsze przeszłych!) stanów makroskopowych, pomijając natomiast informację mikroskopową jako „nieinteresującą". Jest to zatem *de facto* determinizm tylko „w średniej".

[10] Przypuszcza się (ścisłych dowodów na razie nie ma), że to właśnie obecność stanów chaotycznych pozwala na zastąpienie szczegółów ruchu wszystkich cząstek przez procesy losowe i wielkości średnie.

Odmianą tej metody jest teoria procesów stochastycznych wprowadzona pierwotnie ponad sto lat temu przez Smoluchowskiego i Langevina dla opisu ruchów Browna. Tutaj oddziaływanie środowiska na badany układ (na przykład pojedynczą cząstkę) zastępuje się odpowiednio dobraną siłą losową. Również taki opis jest *deterministyczny* (jako opis): przy zadanym typie (rozkładzie prawdopodobieństwa) siły losowej możemy przewidzieć wartości średnie procesu (determinizm w średnich), a przy zadanej konkretnej realizacji (ciągu kolejnych wartości) siły całkowicie zdeterminowany jest ciąg wartości pojedynczego procesu (pełny determinizm). Pojawia się jednak pytanie, czy opis taki jest również *realistyczny* – czy uzyskane przewidywania będą zgodne z obserwowaną (mierzoną) rzeczywistością.

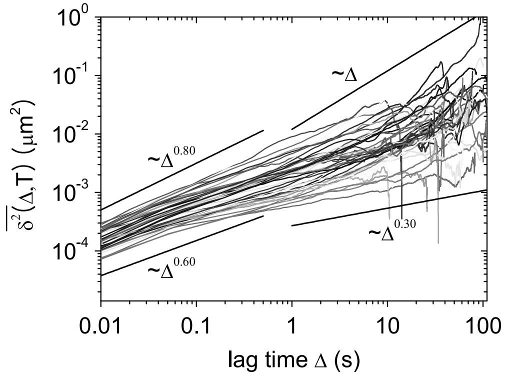
Procesy takie jak omawiany w poprzedniej części anomalny ruch Browna (mierzalny, obserwowalny bezpośrednio!) są deterministyczne w takim sensie, jak wszystkie procesy mechaniczne: znając wystarczająco dokładnie własności *całego* układu (poruszająca się cząstka i środowisko, w którym się porusza) w danej chwili czasu, możemy przewidzieć całą trajektorię cząstki. Mamy tu taki sam problem wielu ciał, jak w przejściu do mechaniki statystycznej. Natomiast, jeśli zastąpimy niemożliwie skomplikowany problem ruchu wielu ciał odpowiednią statystyką, w tym przypadku wszystkie oddziaływania cząstki Browna ze środowiskiem przez oddziaływanie jej z siłą losową, to musimy znać rozkład (gęstość) prawdopodobieństwa, z którego losowana jest wartość siły w danej chwili czasu[11]. Możemy wtedy obliczyć wszystkie wartości średnie, opisujące zbiór takich trajektorii. Jeśli odpowiednio dobraliśmy statystykę wówczas zachowanie się pojedynczej trajektorii nie będzie się wiele różniło od własności średnich. Problem leży w terminie „odpowiednia statystyka".

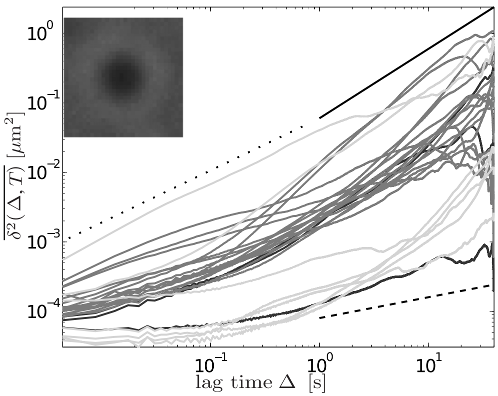
W szczególności, w żywych komórkach może być zupełnie inaczej – w układach (i) silnie poza stanem równowagi termodynamicznej, (ii) silnie złożonych i ewentualnie (iii) silnie nieuporządkowanych, lub o stopniu złożoności praktycznie równoważnym nieuporządkowaniu (uporządkowanie celowe typu zbiór organelli, procesów biochemicznych, biofizycznych itd.) nie znamy *a priori* żadnego uniwersalnego sposobu średniowania[12]. Co gorsza, w przypadku ruchu (procesu) łamiącego (słabo) ergodyczność, nawet średniowanie *a posteriori*, czyli obliczenie średniej trajektorii, lub wartości charakterystyk uzyskanych ze średniowania po wszystkich zmierzonych lub wyliczonych (symulowanych) trajektoriach, daje wyniki, które nie opisują dobrze pojedynczych trajektorii: kolejne trajektorie (realizacje procesu losowego) zbyt silnie się od siebie różnią.

[11] W prostszych przypadkach dostatecznie dobrym przybliżeniem okazuje się tak zwany szum termiczny, czyli rozkład pędów Maxwella = rozkład Gaussa o szerokości wyznaczonej przez temperaturę środowiska.

[12] W takich układach, oprócz szumu termicznego, na ruch cząstek wpływają także zaburzenia – praktycznie losowe – pochodzące od przebiegających sąsiednich procesów.

Poniższe rysunki pokazują średnie wartości dyspersji $[x(t+\Delta) - x(t)]^2$ liczone wzdłuż trajektorii kilkudziesięciu granulek tłuszczu wewnątrzkomórkowego: w komórkach drożdży (Jeon i in., 2011) i w cytoplazmie żywych ludzkich komórek (w lewym górnym rogu obraz mikroskopowy jednej ze śledzonych granulek) (Leijnse i in., 2012):





Wykazano, że w tych procesach następuje złamanie równości Boltzmanna – pokazane na rysunkach średnie wzdłuż trajektorii są inne, niż wartości otrzymane przez średniowanie po wszystkich zmierzonych trajektoriach.

Jak się to ma do determinizmu? Jak powiedzieliśmy wyżej, *de iure* procesy są deterministyczne w tym sensie w jakim deterministyczne są wszystkie procesy (zjawiska, stany) dobrze rekonstruowane przez mechanikę klasyczną. Nie spełniają jednak determinizmu statystycznego, w średnich – realny proces jest źle opisany przez wartości średnie. Jest więc to coś nowego, co zauważyliśmy dopiero teraz, gdy możliwości eksperymentalne (dokładność pomiaru, odpowiednia aparatura) pozwoliły na śledzenie ruchu pojedynczych (co prawda dość dużych) cząstek w środowisku żywych komórek i wewnątrzkomórkowych organelli. Poza tym, są to procesy nieergodyczne. Standardowe procesy nieergodyczne są lepiej przewidywalne niż ergodyczne (zob. „Dodatek"), gdyż są to układy całkowalne (na przykład różne oscylatory). Tutaj mamy przypadek procesów nieergodycznych, które są mniej przewidywalne niż na przykład zwykła ergodyczna dyfuzja dobrze przewidywalna w średnich.

Na zakończenie warto dodać jeszcze jedną uwagę: determinizm, o którym tutaj była mowa, to determinizm opisu świata przez fizykę. Weryfikacja (falsyfikacja) empiryczna równań fizyki teoretycznej, czy to przez pomiar, czy przez obserwację, jest obarczona określonym błędem. Nie można więc zakładać, że rekonstrukcja świata poprzez teorie fizyki zawsze będzie deterministyczna, przynajmniej w takim sensie, jaki znamy dzisiaj. To właśnie próbowałem pokazać na wyżej omawianych przykładach.

Dodatek: teoria ergodyczna i silna ergodyczność

> Matematycy to rodzaj Francuzów: mówisz coś do nich, a oni przekładają to na swój język i proszę: robi się z tego coś zupełnie innego (Goethe)

Twierdzenia teorii ergodycznej pozwalają na udowodnienie ergodyczności ciągłego układu dynamicznego bez konieczności udowadniania równości (1) dla każdej obserwabli $f(x)$. Podaję tu kilka definicji i przykładów.

Niech T: $X \rightarrow X$ będzie przekształceniem zachowującym miarę na przestrzeni mierzalnej (X, Σ, μ), z $\mu(X) = 1$. Wtedy tak zdefiniowane T jest ergodyczne jeśli dla każdego E w Σ z $\mathrm{T}^{-1}(E) = E$ albo $\mu(E) = 0$ albo $\mu(E) = 1$.

Ergodyczność ciągłego układu dynamicznego oznacza, że trajektorie tego układu „rozbiegają się" po przestrzeni fazowej. Własność przeciwna do ergodyczności to zupełna całkowalność.

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa (tak zwane silne twierdzenie ergodyczne): jeśli przekształcenie T jest ergodyczne i miara μ jest niezmiennicza, wówczas średnia czasowa jest równa średniej po przestrzeni (fazowej) prawie wszędzie.

Twierdzenie Birkhoffa-Khinchina (punktowe twierdzenie ergodyczne): niech f będzie mierzalne, T ergodyczne i zachowujące miarę. Wówczas, z prawdopodobieństwem 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) = E(f).$$

Twierdzenie Khinchina: jeśli

$R(s) \equiv \langle f(\boldsymbol{X},t)\, f(\boldsymbol{X},t+s) \rangle \to 0$ dla $s \to \infty$,

to $\boldsymbol{X}(t)$ jest ergodyczne.

Komentarz: powyższa definicja (oraz dowód tego twierdzenia) oznacza, że $R(s)$ nie jest funkcją czasu t, czyli, że funkcja autokorelacji $\boldsymbol{X}(t)$ jest stacjonarna.

Twierdzenia tego typu pozwalają na udowodnienie ergodyczności układu dynamicznego bez konieczności udowadniania równości (1) dla każdej obserwabli $f(x)$. Praktycznie szczególnie przydatne jest twierdzenie Khinchina, gdyż względnie łatwo można stwierdzić, czy układ lub proces jest stacjonarny i ma zanikającą funkcją autokorelacyjną.

Udowodniono w ten sposób, między innymi, że ergodyczne (prawie zawsze, z prawdopodobieństwem 1) są w szczególności układy chaotyczne i układy mieszające, przy czym każdy układ *mieszający* jest *chaotyczny*, lecz nie na odwrót.

Podstawową cechą układów chaotycznych jest ich skrajna niestabilność. Trajektorie początkowo bliskie sobie (w przestrzeni fazowej) rozbiegają się wykładniczo, co powoduje, że dowolnie małe zaburzenie będzie szybko i silnie narastać.

Układ dynamiczny nazywamy mieszającym, gdy dla każdej pary A, B, mierzalnych podprzestrzeni w Σ, mamy

$$lim_{t\to\infty}\,\mu[(\varphi_t\,,A)\cap B]=\mu(A)\mu\,(B)$$
$$[\mu(\Sigma)=1,\ (\varphi_t,A)\ \text{– przekształcenie}\ A\ \text{w czasie}].$$

Definicja ta mówi, że po dostatecznie długim czasie ułamek A zawarty w B jest równy ułamkowi (mierze) całego A w V (w przestrzeni fazowej).

Kwantowej wersji teorii ergodycznej nie będziemy tu omawiać, wspomnę tylko, że problemem tym zajmował się już von Neumann (von Neumann, 1929; por. Goldstein, i in., 2010).

Bibliografia

Fuliński, A., 1993. O chaosie i przypadku, a także o determinizmie, redukcjonizmie i innych grzechach fizyków czyli o zmianach w obrazie świata widzianych okiem jednego z nich. *Znak*, XLV(456(5)), ss. 31–49.

Fuliński, A., 2005. Determinizmy fizyki vs. wolna wola człowieka. *Nauka*, (1), ss. 67–74.

Gal, N. i Weihs, D., 2010. Experimental evidence of strong anomalous diffusion in living cells. *Physical Review E*, 81(2), 020903.

Goldstein, S., Lebowitz, J.L., Tumulka, R. i Zanghi, N., 2010. Long-time behavior of macroscopic quantum systems: commentary accompanying the english translation of John von Neumann's 1929 article on the quantum ergodic theorem. *The European Physical Journal H*, 35(2), ss. 173–200; arXiv: 1003.2129.

Jeon, J.-H., Tejedor, V., Burov, S., Barkai, E., Selhuber-Unkel, C., Berg-Sørensen, K., Oddershede, L. i Metzler, R., 2011. In vivo

anomalous diffusion and weak ergodicity breaking of lipid granules. *Physical Review Letters*, 106, 048103.1–048103.4.
Kepten, E., Bronshtein, I. i Garini, Y., 2011. Ergodicity convergence test suggests telomere motion obeys fractional dynamics. *Physical Review E*, 83(4), 041919.
Leijnse, N., Jeon, J.-H., Loft, S., Metzler, R. i Oddershede, L.B., 2012. Diffusion inside living human cells. *The European Physical Journal Special Topics*, 204(1), ss. 75–84.
von Neumann, J., 1929. Beweis des Ergodensatzes und des H-theorems in der neuen Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 57(1–2), ss. 30–70 (tłum ang.: von Neumann, J., 2010. Proof of the ergodic theorem and the H-theorem in quantum mechanics. *The European Physical Journal H*, 35(2), ss. 201–237; arXiv:1003.2133v2).
Weigel, A.V., Simon, B., Tamkun, M.M. i Krapf, D., 2011. Ergodic and nonergodic processes coexist in the plasma membrane as observed by single-molecule tracking. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(16), ss. 6438–6443.
Wong, I.Y., Gardel, M.L., Reichman, D.R., Weeks, E.R., Valentine, M.T., Bausch, A.R. i Weitz, D.A., 2004. Anomalous diffusion probes microstructure dynamics of entangled F-actin networks. *Physical Review Letters*, 92(17), 178101.