

# Jurij Pawluczuk

---

## К проблеме управления производственными ресурсами предприятия

---

Zarządzanie. Teoria i Praktyka nr 1 (3), 17-26

---

2011

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

**Jurij Pawluczuk**

Brzeski Państwowy Uniwersytet Techniczny

**К ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ  
РЕСУРСАМИ ПРЕДПРИЯТИЯ  
(PROBLEMY ZARZĄDZANIA ZASOBAMI  
PRODUKCYJNYMI PRZEDSIĘBIORSTWA)**

***Streszczenie***

*W artykule rozpatrywany jest problem formalizowania i wykorzystania praktycznego znanej w teorii ekonomicznej zasady zastępowania czynników produkcyjnych i zasady maksymalizowania zysków. Jako możliwy kierunek praktyczny rozwiązania tego problemu zaproponowano wykorzystanie właściwości dwoistości w zadaniach programowania liniowego, które pozwala ustalić wartość stosunkową z punktu widzenia dochodów firmy przy różnych wariantach wykorzystaniu tych zasobów w procesie produkcyjnym.*

*W postaci ogólnej opisywane jest wykorzystanie tej metody podczas rozwiązania problemu zarządzania potencjałem produkcyjnym firmy budowlanej.*

**Введение**

Как известно, в производстве любой продукции можно использовать различные комбинации разнообразных ресурсов, при этом совокупные издержки будут иметь разные величины. Для эффективной организации производства предприятию важно использовать имеющиеся ресурсы в таком количестве и сочетании, которые обеспечивают минимально возможные издержки. В экономике существует *принцип замещения факторов производства*, в соответствии с которым, снижение издержек производства единицы продукции может быть достигнуто за счет изменения соотношения количества используемых ресурсов. Считается,

что предприятие достигает минимума издержек при производстве определенного объема продукции, если невозможно путем замены одного ресурса другим добиться дальнейшего снижения издержек выпуска этого объема.

### **Математическая интерпретация принципа замещения факторов производства**

Принцип замещения факторов производства или правило минимальных издержек состоит в том, что комбинация переменных вводимых факторов производства с минимальными издержками на единицу продукции достигается в том случае, когда предельные продукты (предельный продукт – это добавочный продукт, получаемый в результате введения в производство дополнительной единицы переменного ресурса) этих факторов производства на единицу стоимости, потраченную на их использование не сравниваются, то есть если стоимость какого-либо вводимого ресурса повышается, то следует уменьшать использование этого ресурса (посредством увеличения его предельного продукта) и использовать в больших количествах другие ресурсы (посредством уменьшения их предельных продуктов) до тех пор, пока:

$$\frac{MP_x}{P_x} = \frac{MP_y}{P_y} \dots = \dots \frac{MP_n}{P_n} \quad (1)$$

где  $MP_x$ ,  $MP_y$  и  $MP_n$  – предельные продукты ресурсов  $x$ ,  $y$  и  $n$ ;

$P_x$ ,  $P_y$  и  $P_n$  – стоимость единицы ресурсов  $x$ ,  $y$  и  $n$  соответственно.

Для определения оптимального соотношения ресурсов предприятие должно учитывать как производительность ресурсов, что находит отражение в данных об убывающей предельной производительности, так и цены на различные ресурсы. Предприятие может считать, что выгодно использовать очень небольшой объем исключительно продуктивного ресурса, даже если его цена будет достаточно высокой. И наоборот, оно может разумно использовать большой объем относительно непродуктивного ресурса, если его цена окажется достаточно низкой.

Однако минимизация издержек является необходимым, но не достаточным условием для максимизации прибыли. Может существовать много различных уровней производства, при которых предприятие производит продукцию с минимальными издержками. Но есть только один-единственный уровень производства, при котором прибыль будет действительно максимальной. В экономике правило максимизации

прибыли состоит в том, что при использовании различных ресурсов предприятие реализует комбинацию ресурсов, обеспечивающую максимальную прибыль, если каждый вводимый фактор производства используется до точки, в которой его цена равна издержкам на получение предельного дохода (предельный доход – это добавочный доход, получаемый в результате продажи одной дополнительной единицы продукции):

$$P_a = MRP_a \text{ и } P_b = MRP_b$$

где  $MRP_a$  и  $MRP_b$  – предельные доходы от использования ресурсов  $a$  и  $b$  соответственно.

Иначе это правило можно записать следующим образом:

$$\frac{MRP_a}{P_a} = \frac{MRP_b}{P_b} = 1 \quad (2)$$

Следует отметить, что положение уравнения (2) о максимизации прибыли включает положение уравнения (1) о производстве с минимальными издержками. То есть, предприятие, стремящееся к максимуму прибыли должно производить продукцию при таком соотношении затрат на ресурсы, которое обеспечивало бы также минимальные издержки. Таким образом, соблюдение условий уравнений (1) и (2) является необходимым и достаточным для получения максимальной прибыли при минимальных издержках.

Формализацию принципа замещения факторов производства можно осуществить, используя свойство двойственности в задачах линейного программирования.

Деятельность любого производственного предприятия можно рассматривать как процесс затраты определенных ресурсов и выпуска некоторой продукции. Эта деятельность может происходить в различных формах, с применением различных принципов. Ресурсы, как правило, ограничены, при этом эффективность их использования в различных процессах неодинакова. Например, каждая строительная фирма имеет набор ресурсов, наиболее соответствующих какой-то определенной структуре строительно-монтажных работ. При изменении этой структуры (при том же объеме работ) может сложиться ситуация, в которой часть ресурсов окажется в избытке, а каких-то из них будет уже недостаточно, то есть они становятся лимитированными. Оценку стоимости ресурсов в зависимости от тех доходов, которые они приносят фирме при производстве определенного количества продукции можно произвести на основании решения двойственной задачи линейного программирования.

Теория двойственности линейного программирования позволяет установить связь между оптимальным распределением ресурсов и некоторой

системой оценок на ресурсы, соответствующих плану. При этом речь идет не о стоимости ресурсов при их приобретении предприятием (эта стоимость, по существу включается в доходы, которые предприятие получает при реализации продукции), а об относительной стоимости ресурсов с точки зрения доходов, получаемых предприятием при различных вариантах использовании этих ресурсов в процессе производства.

Сущность двойственности в линейном программировании можно проиллюстрировать на следующем примере.

Допустим имеется следующая прямая задача: сколько и какой продукции  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), объемах имеющихся ресурсов  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и нормах расходов  $a_{ij}$  максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении.

В общем виде эта задача имеет следующий вид:

$$\max f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (5)$$

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие задачу, называемую двойственной к исходной. Двойственная задача к задаче (3) – (5) имеет вид:

$$\min F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (6)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (7)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (8)$$

Переменные  $y_i$  называют двойственными оценками или объективно обусловленными оценками.

Основное неравенство теории двойственности имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^n b_i y_i \quad (9)$$

Экономическое содержание неравенства (9) состоит в том, что для любого допустимого плана  $X$  и любого допустимого вектора оценок ресурсов  $Y$  общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.

Из этих моделей следует, что, имея математическую модель одной из этих задач, можно легко построить модель двойственной к ней задачи. В теории двойственности устанавливаются следующие взаимосвязи при моделировании:

1. Если прямая задача на максимум, то двойственная к ней на минимум, и наоборот.

2. Коэффициенты  $c_j$  целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной задачи.

3. Свободные члены  $b_i$  ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной.

4. Матрицы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.

5. Если прямая задача на максимум, то ее система ограничений представляется в виде неравенств типа  $\leq$ . Двойственная задача решается на минимум, и ее система ограничений имеет вид неравенств типа  $\geq$ .

6. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной – числу переменных прямой.

Исходную задачу по отношению к двойственной обычно называют прямой. В том случае, когда исходная задача записана в общей форме, сразу видна симметричность прямой и двойственной задач: неравенству в одной задаче соответствует неотрицательная переменная в другой. Задача двойственная к двойственной всегда совпадает с прямой.

Свойство двойственности можно широко использовать в оптимальном управлении производством.

Так, в теореме об оценках доказывается, что двойственные оценки показывают приращение функции цели (это может быть объем производства, прибыль и т.д.), вызванное незначительным изменением свободного члена соответствующего ограничения задачи, то есть определенного ресурса на единицу. Поэтому в прикладных задачах двойственные оценки

$y_i$  часто называют «скрытыми», «теневыми» ценами или маржинальными оценками ресурсов.

Экономическое содержание первой теоремы двойственности состоит в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадения значений целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти решения были оптимальными. Это значит, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов и обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, то есть равенство общей оценки продукции и ресурсов обуславливает убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставлять и балансировать затраты и результаты системы, что является весьма важным при формировании оптимальных планов.

В соответствие с теоремой о дополняющей нежесткости, экономически, двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Это связано с тем, что если в некотором оптимальном плане оценок его  $i$ -я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Полностью используемый по оптимальному плану производства ресурс (дефицитный) имеет положительную оценку, а ресурс, используемый не полностью (избыточный), имеет нулевую оценку. В этой теореме доказывается, что если оценки ресурсов, расходуемых на производство единицы продукции, превышают стоимость этой единицы, то выпуск такой продукции предприятию не выгоден. Таким образом, в оптимальный план включается только та продукция, которая выгодна предприятию, и не попадает убыточная продукция. В этом и проявляется рентабельность оптимального плана.

Результаты решения двойственной задачи могут рассматриваться как частные производные максимально (или минимально) достижимой величины целевой функции, взятые по отношению к свободным членам условий - ограничений. Ограничения в экономических задачах отражают, как правило, балансовые требования к тем или иным ресурсам. Поэтому в данной модели двойственной задачи получаемые отдельные оценки  $y_i$  характеризуют предельные отношения приращений оптимальной величины целевой функции приращениям каждого  $i$ -го ресурса, от которого зависит достижение искомого оптимума (в экономическом анализе это предельные величины). В этом смысле решение двойственной задачи дает оценки значимости каждого вида ресурса для достижения той

цели, которая ставится при рассмотрении данной экономической проблемы.

Эти оценки могут планироваться для проверки оптимальности принятых решений (плана). В линейных моделях все включенные в оптимальный план способы использования ресурсов должны быть бесприбыльными и безубыточными, а не включенные в план – бесприбыльными.

Характеризуя влияние на оптимальную величину целевой функции малых приращений ресурсов, оптимальные оценки представляют собой важное средство экономического анализа уже полученных решений. Они позволяют определить направление изменений оптимального значения целевой функции в случаях изменения первоначальных условий – ограничений, а при не большом варьировании последних дают возможность судить и о новой величине целевой функции. Тем самым объективно обусловленные оценки помогают исследовать устойчивость оптимальной величины критерия (по отношению к изменениям начальных условий) и облегчают правильное решение ряда экономических вопросов, от которых зависят исходные предпосылки рассматриваемой задачи.

*Существенное значение двойственные оценки имеют и для определения целесообразности применения тех или иных новых способов использования ресурсов, неизвестных при первоначальной постановке задачи. Для этого на их основе рассчитывают прибыльность или убыточность нового способа распределения ресурсов. Если он оказывается прибыльным, то это означает, что составленный ранее план не является оптимальным и применение нового способа является целесообразным.*

Таким образом, экономическое содержание двойственной задачи линейного программирования позволяет ее использовать при моделировании и решении проблемы управления производственным потенциалом строительной фирмы. В предлагаемой постановке прямая задача линейного программирования решается по критерию максимального объема строительно-монтажных работ данной структуры, который может выполнить строительной фирмой при сложившейся структуре производственных ресурсов. Для данной прямой задачи существует соответствующая ей двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов  $u_i$  чтобы минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы.

Прямая задача решается в „технологическом пространстве” и ограничения на возможности различных производственных ресурсов фирмы можно рассматривать в качестве параметров этой задачи. Меняя параметры, то есть специализацию и состав производственных ресурсов, а также объекты строительства (в зависимости от намерений заказчиков), включаемых в программу подрядных работ, можно изменять объем строительно-монтажных работ, выполняемых организацией.

Двойственная задача в пространстве оценок зависит от получаемого в абсолютном выражении объема выполненных работ: относительная оценка  $y_i$  дает величину прироста целевой функции, то есть объема строительно-монтажных работ на единицу увеличения  $i$ -го производственного ресурса.

Таким образом, прямая и двойственная задачи линейного программирования тесно связаны друг с другом. Они имеют одну и ту же исходную информацию для решения; решая одну из них, мы одновременно получаем решение другой, прямая и двойственная задачи имеют одно и то же значение целевой функции на оптимальных планах.

Как уже отмечалось, в теории двойственности доказывается, что для ресурсов, которые расходуются полностью (дефицитных)  $y_i > 0$ , а для ресурсов, которые расходуются частично (свободных)  $y_i = 0$ . Поэтому для самого дефицитного ресурса (увеличение возможностей этого производственного ресурса дает самый большой прирост объема строительно-монтажных работ) относительная оценка  $y_i$  – максимальна.

Таким образом, процедура управления производственным потенциалом строительной фирмы с точки зрения максимального его соответствия структуре строительно-монтажных работ состоит из решения прямой и двойственной ей задач линейного программирования с последующим анализом полученных результатов. В результате решения прямой задачи мы получаем максимальные объемы работ, которые может выполнить фирма при имеющихся возможностях производственных ресурсов. В результате решения двойственной задачи получаем относительную оценку  $y_i$  по всем производственным ресурсам фирмы. Если все  $y_i = 0$ , то производственные ресурсы не загружены и в программу подрядных работ можно включать новые объекты и опять решать прямую и двойственную задачи. Включение в программу новых объектов и решение прямой и двойственной задач линейного программирования происходит до тех пор, пока относительная оценка  $y_i$  по какому – либо ресурсу не станет больше нуля. Это свидетельствует о том, что данный производственный ресурс использован полностью. Далее может быть произведен анализ дефицитных ресурсов на предмет возможности их увеличения. Если это возможно, то производится дальнейшее включение объектов в программу. Если нет, то можно считать, что программа подрядных работ фирмы сформирована, структура работ на объектах соответствует структуре производственных ресурсов. При этом использование ресурсов организации, то есть ее производственного потенциала, будет оптимальным.

Такого положения, при котором все производственные ресурсы организации будут загружены равномерно, и их структура будет соответствовать структуре работ, можно ожидать с малой степенью вероятности. В этом случае возникает возможность для маневра в фирме, то

есть обеспечиваются условия для принятия обоснованных управленческих решений изменения ее производственного потенциала. Данный подход создает предпосылки для эффективного использования производственного потенциала строительной организации и управления им.

## **Заключение**

*Заданный уровень производства может быть получен с помощью различных комбинаций вводимых ресурсов, но очевидно, что только комбинация, характеризующая наименьшими издержками на единицу продукции, свидетельствует об оптимальном варианте производства. Понятно, что вариант с минимальными издержками зависит от соотношения цен на вводимые ресурсы, а так же от количества этих ресурсов, необходимых для производства единицы продукции.*

Оценку стоимости ресурсов в зависимости от тех доходов, которые они приносят предприятию при производстве определенного количества продукции можно произвести на основании решения двойственной задачи линейного программирования. При этом речь идет не о стоимости ресурсов при их приобретении предприятием (эта стоимость, по существу включается в доходы, которые предприятие получает при реализации продукции), а об относительной стоимости ресурсов с точки зрения доходов, получаемых предприятием при использовании этих ресурсов в процессе производства.

Понятие оптимальных оценок может быть обобщено на любую экономико-математическую модель оптимального использования ограниченных ресурсов, если только экстремальное значение принятого в модели критерия представляет собой дифференцируемую функцию от величин, характеризующих балансовые соотношения производства и потребления по каждому виду ресурсов.

## **Литература:**

1. Павлючук Ю.Н. Основы проектирования организации управления системами регионального строительства. М.: Фонд «Новое тысячелетие» 2000. – 171 с.
2. Высшая математика: Математическое программирование: Учеб. – 2-е изд., перераб. и доп. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод; Под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск: Выш. шк., 2001. – 351 с.

**Abstract**

*The article is addressed to the problem of the formalization and the practical use of the well-known in economic theory the substitution effect of productive factors and the rules of profit maximization. As a possible direction to solve this problem, we propose using of the properties of duality in linear programming exercise, which allows determining the relative value of resources on the revenue side, that company gets in different ways to use these resources in the production process. This method for solving the problem of management of production capacity in a construction firm is described in general terms.*