

Beata Stolorz

VOLGA i VANNA - współczynniki wrażliwości

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 10, 172-179

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach
dozwolonego użytku.

BEATA STOLORZ

VOLGA I VANNA – WSPÓŁCZYNNIKI WRAŻLIWOŚCI

Wstęp

Miary wrażliwości, będące jednym z najlepszych narzędzi pomiaru ryzyka opcji, odzwierciedlają wpływ pewnych zmiennych na cenę bądź stopę zwrotu instrumentu finansowego, nazywane często czynnikami ryzyka. Wysoka wrażliwość tych zmiennych na działanie czynników na nie wpływających, świadczy o wysokim ryzyku rynkowym instrumentu finansowego. W praktyce najczęściej stosowane są tzw. współczynniki „greckie” (*Greeks*): *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho*¹. Celem pracy jest zaprezentowanie dwóch mniej znanych współczynników: *volga* i *vanna* europejskiej opcji kupna (*call*) i sprzedaży (*put*) dla modelu wyceny Blacka-Scholesa.

Miary wrażliwości

Z punktu widzenia matematycznego miara wrażliwości jest to pochodna cząstkowa funkcji wyrażającej cenę opcji względem wybranego czynnika ryzyka². W tej grupie główną rolę pełnią współczynniki: *delta*, *gamma*, *vega*, *theta* i *rho*, należące do klasy modeli deterministycznych. Element stochastyczny występuje w podanej metodologii, jednak w postaci końcowej modele te mają postać niezależną od składnika losowego. Parametr zmienności określony jest jako odchylenie standardowe stóp zwrotu i traktuje się go jako znany. Greckie współczynniki wyrażają wpływ na cenę opcji podstawowych czynników takich jak cena instrumentu bazowego, czas do wygaśnięcia opcji, poziom zmienności instrumentu bazowego, stopa procentowa wolna od ryzyka (krajowa lub zagra-

¹ Więcej na ten temat w [3], s. 359-394.

² Patrz [4], s.125.

niczna³). Współczynniki te wykorzystuje się do tworzenia strategii minimalizujących ryzyko rynkowe. Wysoka wrażliwość ceny lub stopy zwrotu instrumentu finansowego na działanie czynników na nie wpływających, świadczy o wysokim ryzyku rynkowym instrumentu finansowego.

Oprócz tradycyjnych współczynników greckich specjaliści analizujący opcje określają czasem jeszcze inne współczynniki wrażliwości:⁴

1. Współczynnik *volga* (*vega gamma*, *vomma*) określa, o ile zmieni się współczynnik *vega* względem zmiany zmienności ceny instrumentu bazowego. Jest to druga pochodna ceny opcji względem zmienności ceny instrumentu bazowego.
2. Współczynnik *vanna* określa, o ile zmieni się współczynnik *vega*, gdy cena instrumentu bazowego zmieni się o jednostkę. Inna równoważna interpretacja mówi nam, że jest to wielkość zmiany współczynnika *delta* względem jednostkowej zmiany zmienności ceny instrumentu bazowego. Jest to druga pochodna ceny opcji liczona najpierw względem zmienności, a potem względem ceny instrumentu bazowego.

Wybrane współczynniki wrażliwości wraz z wzorami je opisującymi są zawarte w tabeli 1.

Volga i vanna w modelu wyceny Blacka-Scholesa

Wartość współczynników wrażliwości jest uzależniona od przyjętego modelu wyceny opcji. Najczęściej stosowane są równania modelu Blacka-Scholesa:⁵

$$\begin{aligned} c &= S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2), \\ p &= X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1), \end{aligned} \quad (1)$$

³ Szerzej na ten temat w [7].

⁴ Patrz: [5] s. 350, [6]

⁵ Patrz [8], s.48.

Tabela 1. Wybrane współczynniki wrażliwości

Greeks	<i>call</i>	<i>put</i>
<i>delta</i>	$\frac{\partial c}{\partial S}$	$\frac{\partial p}{\partial S}$
<i>gamma</i>	$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$	$\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}$
<i>vega</i>	$\frac{\partial c}{\partial \sigma}$	$\frac{\partial p}{\partial \sigma}$
<i>theta</i>	$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial c}{\partial \tau}$	$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial \tau}$
<i>rho</i>	$\frac{\partial c}{\partial r}$	$\frac{\partial p}{\partial r}$
<i>volga</i>	$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}$	$\frac{\partial^2 p}{\partial \sigma^2}$
<i>vanna</i>	$\frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}$	$\frac{\partial^2 p}{\partial S \partial \sigma}$

Źródło: opracowanie własne.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}, \quad (1')$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T-t}$$

gdzie:

c – wartość europejskiej opcji kupna,

p – wartość europejskiej opcji sprzedaży,

r – stopa procentowa wolna od ryzyka,

σ – odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji,

S – bieżąca cena akcji, X – cena wykonania opcji,

T – termin wygaśnięcia, t – termin bieżący.

$N(x)$ we wzorach (1) jest to wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego dla argumentu x , określona następująco:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Czas do wygaśnięcia opcji τ można wyrazić za pomocą następującego wzoru:

$$\tau = T - t. \quad (2)$$

Korzystając ze wzorów (1) i (2) można wyprowadzić wzory na współczynniki wrażliwości europejskiej opcji kupna i sprzedaży (Tabela 2).

Tabela 2. Wybrane współczynniki wrażliwości dla modelu wyceny opcji Blacka-Scholesa

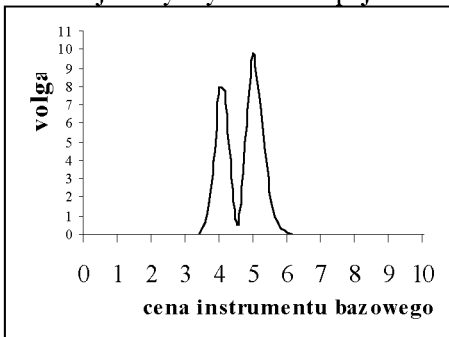
Greeks	Model wyceny opcji Blacka-Scholesa	
	<i>call</i>	<i>put</i>
<i>delta</i>	$N(d_1)$	$N(d_1) - 1$
<i>gamma</i>	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	
<i>vega</i>	$SN'(d_1)\sqrt{T-t} = \frac{S\sqrt{\frac{T-t}{2\pi}}}{\frac{d_1^2}{e^2}}$	
<i>theta</i>	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$
<i>rho</i>	$X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
<i>volga</i>	$\frac{\partial vega}{\partial \sigma} = S\sqrt{(T-t)}N'(d_1)\frac{d_1d_2}{\sigma}$	
<i>vanna</i>	$\frac{\partial vega}{\partial S} = -\frac{N'(d_1)d_2}{\sigma}$	

Zródło: opracowanie własne.

Wzory służące do obliczenia współczynników *volga* i *vanna* są takie same dla opcji *call* i *put* (Tabela 2). Wynika to z faktu, iż wartość parametru *vega* nie zależy od pozycji przyjętej przez inwestora.

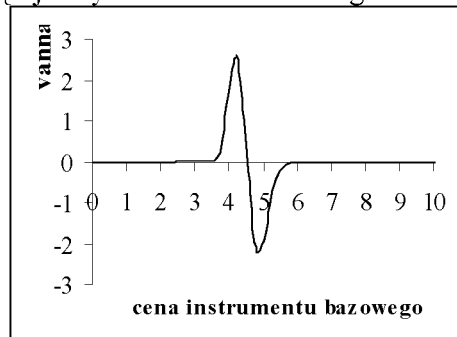
Na rys. 1-4 przedstawiono wykresy funkcji opisujących wartości współczynników *volga* i *vanna* dla opcji europejskiej w zależności od ceny instru-

mentu bazowego S i od czasu pozostającego do wygaśnięcia opcji τ . Na rys. 1-4 widać, że nawet niewielka zmiana ceny instrumentu bazowego może powodować bardzo gwałtowne zmiany wartości badanych współczynników, które to z kolei wpływają na kształtowanie się wartości tradycyjnych współczynników „greckich”. Nie bez znaczenia jest również zmiana czasu do wygaśnięcia. Przy czym można zauważyć, że zależność wskaźników *volga* i *vanna* od ceny S jest regularna, natomiast ich zmiany w zależności od czasu τ są silnie uzależnione od relacji ceny wykonania opcji do bieżącej ceny instrumentu bazowego.



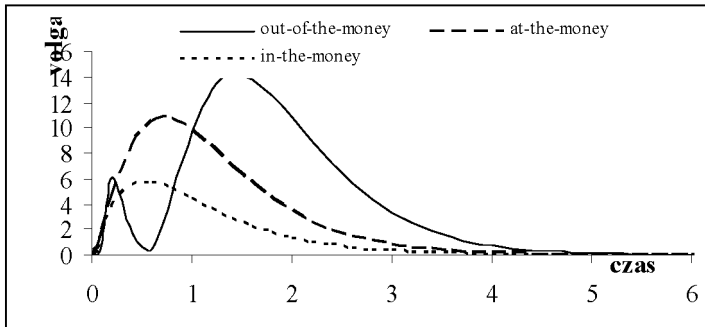
Rys. 1. Zależności współczynnika *volga* od ceny s .

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Zależności współczynnika *vanna* od ceny s .

Źródło: opracowanie własne.

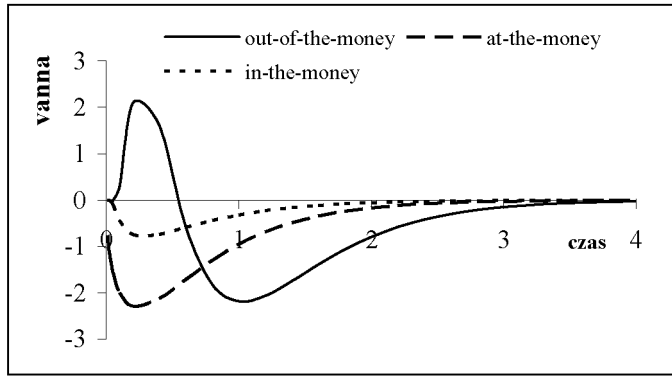


Rys. 3. Zależności współczynnika *volga* od czasu τ .

Źródło: opracowanie własne.

Świadczy to o konieczności kontrolowania wartości tych wskaźników przy gwałtownych zmianach cen instrumentu bazowego. Współczynniki te są wyko-

rzystane w metodzie *volga-vanna* służącej do oceny ryzyka inwestowania w opcje⁶



Rys. 4. Zależności współczynnika *vanna* od czasu τ .

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

W praktyce uważa się, że zbadanie współczynników *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho* jest wystarczające do zarządzania ryzykiem opcji. Jednak w przypadku strategii tworzonych w oparciu o te parametry należy pamiętać, że ich wartość zmienia się wraz ze zmianą ceny instrumentu podstawowego S oraz w wyniku tzw. „starzenia się” opcji, czyli wraz z upływem czasu. Stąd też zachodzi konieczność stosowania w zaawansowanych analizach również innych miar wrażliwości takich jak: *volga* i *vanna*.

W literaturze wymienia się jeszcze inne współczynniki np.: *beta*, *charm*, *colour*, *speed*, „*dual delta*, *dual gamma*, *dual theta*”⁷. Umiejętność prawidłowej analizy wszystkich współczynników tego typu jest niezbędna przy tworzeniu różnorodnych strategii, gdyż ich skuteczność jest uzależniona od prawidłowego odczytania wpływu poszczególnych parametrów na wartość opcji.

Literatura

1. Castagna A., Marcurio F., *The Vanna -Volga Method for Implied Volatilities*, Risk, 2007, nr 1.

⁶ Szerzej na temat metody *volga-vanna* w Castagna A., Marcurio F., *The Vanna -Volga Method for Implied Volatilities*, s. 106-111.

⁷ Więcej na ten temat w [2], s. 3-14.

2. Hakala J., Wystup U. [red.], *Foreign Exchange Risk: Models, Instruments and Strategies*, Risk Books, London 2002.
3. Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje*. Wprowadzenie, WIG-PRESS, Warszawa 1999.
4. Jajuga K. [red.], *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2000.
5. Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., *Inwestycje finansowe*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 1998.
6. Korona R. M., *Niedoceniana reszta*, Bank, 1999, nr 7.
7. Stolorz B., *Analiza współczynnika rho w modelu wyceny opcji Garmana-Kohlhagena*, [w:] Tarczyński W. [red.], Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie, część II, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2007.
8. Wilmott P., Howison S., Dewynne J., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press 1999.

STRESZCZENIE

W praktyce uważa się, że zbadanie współczynników *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho* jest wystarczające do zarządzania ryzykiem opcji. Jednak w przypadku strategii tworzonych w oparciu o te parametry należy pamiętać, że ich wartość zmienia się wraz ze zmianą ceny instrumentu podstawowego *S* oraz w wyniku tzw. „starzenia się” opcji, czyli wraz z upływem czasu. Stąd też zachodzi konieczność stosowania w zaawansowanych analizach również innych miar wrażliwości. Celem pracy jest zaprezentowanie dwóch mniej znanych współczynników wrażliwości opcji: *volga* i *vanna* europejskiej opcji kupna (*call*) i sprzedaży (*put*) dla modelu wyceny Blacka-Scholesa.

VOLGA AND VANNA – SENSITIVITY MEASURES

SUMMARY

In practice it is claimed that studying parameters: delta, gamma, theta, vega and rho is sufficient to manage option risk. However in case of strategies created on the basis of these parameters one should remember that their value changes with the change of price of underlying instrument *S* and also due to the so called “ageing” of option, meaning the change with time. Hence, there is a need to apply in advanced analyses

other sensitivity measures. The aim of this study is to present two less known sensitivity parameters: volga and vanna of European call option and put option for the model of pricing of Black – Scholes.

Translated by B. Stolorz

Dr Beata Stolorz
Uniwersytet Szczeciński
stolorz@interia.pl