

Татьяна Снигур, Василий Швец

Формирование понятия площади плоского геометрического тела

Edukacja Humanistyczna nr 1 (34), 151-159

2016

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach
dozwolonego użytku.

Татьяна Снигур
Национальный педагогический университет
имени М.П. Драгоманова

Василий Швец
Национальный педагогический университет
имени М.П. Драгоманова

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТЕЛА

В статье¹ мы предложили определение понятия плоского геометрического тела, которое можно включить в школьный курс планиметрии средней школы на углубленном уровне изучения данного предмета. Итак, под «геометрическим телом» будем понимать геометрическую фигуру F плоскости, которая является замыканием некоторой области.

Плоское геометрическое тело имеет свойство – это его площадь. Что такое площадь фигуры и как ее измерять пытались выяснить многие математики. Одни обозначали площадь как часть плоскости (А.Ю. Давыдов, Н.А. Извольский, С.Ф. Лакруа), другие – как число (Н.А. Глаголев, В.М. Брадис, П.А. Долгушин), или как величину (Ж. Адамар, Н.Н. Бескин, А.М. Лежандр, А.П. Киселев)². В современных школьных учебниках по геометрии для основной школы площадь обозначается аксиоматически, рассматриваются основные ее свойства. В них можно встретить, например, такое определение: «Площадь многоугольника – это та часть плоскости, которую занимает многоугольник»³.

Возникает вопрос: какое из определений корректнее и понятнее для учеников, или, возможно, стоит иначе взглянуть на понятие площади плоского тела?

В данной статье мы предлагаем доступное для восприятия школьниками определение понятия площади с точки зрения функционального подхода. Считаем

¹ Швец В., *Понятие плоского геометрического тела в школьном курсе планиметрии* / В. Швец, Т. Снигур, «Edukacja Humanistyczna. Półrocznik myśli społeczno-pedagogicznej» № 1(32) 2015, с. 147–156

² Шишляникова В.Н., *Понятие площади в систематическом курсе геометрии* / «Математика в школе» 1952, № 6, с. 13–20.

³ Істер О.С., *Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. Закл.*, О.С. Істер. – К.: Генеза 2016, с. 161.

необходимым обращать внимание учащихся на то, что ограниченные плоские геометрические тела имеют площадь, поэтому и рассматриваем «площадь плоского геометрического тела».

Украинский ученый-математик М.Е. Ващенко-Захарченко говорил: «Ничто так не помогает удерживать в памяти известные истины, как история их происхождения. Геометрия, освещена историческими данными, становится более живой и интересной»⁴. В связи с этим перед изучением темы «Многоугольники. Площади многоугольников» мы предлагаем рассмотреть с учениками исторические сведения, факты, связанные с исчислением площади фигуры, народные задачи, меры и способы измерения. Такой материал поможет развить интерес к изучению темы, показать роль математических знаний в познании действительности, их происхождения из потребностей практики.

Сделать это целесообразно в виде, например, эвристической беседы, ориентировочное содержание которой приведено ниже.

Измерением площади люди занимаются не одно тысячелетие. Еще 4–5 тыс. лет назад вавилоняне умели вычислять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Квадрат издавна служил эталоном при измерении площадей благодаря таким своим свойствам как равные стороны, равные и прямые углы, симметричность и общее совершенство формы. Квадраты легко строить, ими можно заполнить части плоскости (но наряду с этим в Древнем Китае мерой площади был прямоугольник)⁵.

Казалось бы, если есть единица измерения длины, то с измерением площадей не может быть никаких проблем. Берем квадрат со стороной, длина которой равна единице, например, сажень, и получаем квадратную сажень – вот и единица площади. Или с версты создаем квадратную версту.

Потребность в измерении площадей возникла из-за необходимости знать числовую характеристику земельных участков, чтобы знать размер дани или налога.

Известно, что население Древнего Египта в основном занималось земледелием, но плодородной земли было очень мало – только в долине реки Нил, а дальше шли бескрайние пустыни. Каждую весну Нил разливался и удобрял землю плодородным илом. При разливе реки смывались границы участков, менялись их площади. Тогда потерпевшие обращались к фараону, он посылал землемеров, чтобы восстановить границы участков, выяснить, как изменилась их площадь и установить размер налога. Уже тогда «египтяне начали задумываться над тем, каким же образом следует измерять поля, чтобы можно было отдать каждому то, что ему принадлежит»⁶.

⁴ Граціанська Л.М., *Нариси з народної математики України*, К.: Вид-во Київського університету 1968, с. 76.

⁵ Глейзер Г.И., *История математики в школе VII–VIII кл. Пособие для учителей*, М.: Просвещение 1982, с. 27.

⁶ Прокопович Ф., *Філософські твори в трьох томах. Т. 3. Математика, історичні праці, вірші, листи. Переклад з латинської*, К. 1981, <http://litopys.org.ua/procop/proc304.htm> [12.12.2016].

В древнем Вавилоне также приходилось восстанавливать границы участков после разлива дважды в год рек Тигр и Евфрат.

Наши предки славяне для измерения площади разбивали земельные участки на куски в форме прямоугольников, треугольников и почти прямоугольной трапеции. Площадь участка треугольной формы исчислялась как половина произведения основания на боковую сторону, а площадь участка в виде трапеции – как произведение полсуммы оснований на боковую сторону («хобот»). Поле неправильной формы делили на отдельные участки в форме прямоугольника, трапеции, треугольника; измеряли площадь каждой в отдельности, а результаты складывали. В монографии Грацианьской Л.Н. можно найти способ измерения поля, которое было в форме неправильного четырехугольника или неправильного треугольника⁷.

Для выполнения таких вычислений не стоило изучать геометрию, прилагать значительные усилия для измерения земельных участков квадратными единицами; здесь точности не требовалось. Даже термин «площадь» не использовался. Например, древнекитайские задачи об измерении полей заканчивались стандартным вопросом: «Спрашивается, какое поле?». Слово «поле» выступало в роли термина «площадь», поскольку последнего еще не было⁸. В китайской «Математике в девяти книгах» можно найти следующую задачу: «Есть круглое поле, длина которого 30 бу. Диаметр 10 бу. Спрашивается, какое поле?»⁹.

На территории этнической Украины население издавна занималось земледелием. В земледельческой практике нужно было измерять поле. Народные меры, появившиеся в процессе тех или иных полевых работ, имели достаточно условный характер, были слишком приблизительными. Наиболее распространенной была мера «день пахать», или «день земли», или «на один плуг», то есть величина поля, вспаханная в течении дня.

Поскольку производительность вспашки зависела от типа почвы, совершенства орудий пахоты и тягловой силы, то и величины были неодинаковы. В Карпатах мера «день пахать» составляла один морг (0,57 га) земли, а на большинстве этнической территории приближалась к одному гектару. Слово «морг» польско-литовского происхождения, заимствованное из немецкого языка, где 1 поле (волока) имело 30 моргов; франконское поле имело 48 моргов.

На Полесье бытовала мера «соха», то есть примерно 0,40 га. Меньше размером была «упруга» – третья часть меры «день земли», распространенная на Левобережной Украине. «Упруги» были утренние, обеденные, вечерние.

Большие площади земли измерялись «полями» (19–25 га), на Полесье, Волыни – «волоками» (21 га), которые делились на «прутья» (1,2–1,5 га). Это были несколько регламентированы меры поля, в отличие от тех, которые определялись по

⁷ Грацианська Л.М., *Нариси з народної математики України*, *op. cit.*, 63–64.

⁸ Березкина Э.И., *Математика древнего Китая*, М.: Наука 1980, с. 240.

⁹ *Математика в девяти книгах*, Пер. и примеч. Э.И. Березкиной, *Ист.-мат. исслед.* 1957, вып. X, с. 445.

проделанной работе в течение единицы времени. Существовали меры площади по величине скошенного поля («день косить»), по количеству высеянного зерна – «веко» (1/8 га, на которую приходится 25 л зерна ржи для посева).

На Закарпатье крестьяне пользовались мерой, которая называлась «делец» («телека») – величина сельскохозяйственных угодий, что обеспечивала прожиточный минимум для хозяина. Сюда относились: усадьба, поле, луга, пастбища. Народные меры оказались живучими: даже после введения стандартизированных единиц, таких, как десятина (1 га), морг (0,57 га), гольд (0,48 га), кадастровый гольд (0,57 га), угр (1 га) и т.п., крестьяне использовали древние меры¹⁰.

Со временем для пахотных земель главную роль начала выполнять четверть – площадь, на которой высевали четверть (меру объема) ржи. Однако уже в XVI веке стало очевидным, что четверть – очень малая единица для описания земель, поэтому начали использовать десятину. В то время десятина составляла $50 \times 50 = 2500$ саженей квадратных или 1,166 гектара и состояла из двух четвертей по 0,58 га. Вот только слова «квадратный» тогда не существовало, и такие меры называли «круглыми», «дробными» или «четырёхгранными».

Десятина была официальной счетной единицей, но на практике применяли более удобную единицу – четверть, или четь, равную половине десятины. Четверть (четь) делилась на две осьмины, осьмина – на две полосьмины, а полосьмина – на два четверика. Четверть по коэффициенту три могла делиться на три третника, шесть полтретников и т.д. 1/64 часть четверти (чети) называлась малый четверик.

Ученикам будут интересными исторические задачи об измерении площади земельного участка. К примеру:

- 1) Задача. В книге В. Подова «К тайнам истории»¹¹ написано, что в 1714 году на правом берегу Северского Донца на территории Привольного, где через 40 лет расположилась пятая рота полка Депрерадовича, Василий Щабельский получил около 300 четей земли «для пашения хлеба» и сенокосной луки на 1000 коп, да еще и лесной остров посреди Донца. Попробуйте оценить размер земли, которую получил Василий Щабельский.
- 2) Решение. Четь (четверть) составляла 1/2 десятины. Переход на 7-футовый сажень еще только начался, и в первую очередь он касался кораблестроения. Только в середине XVIII в. стал широко внедряться сажень, равный 7 футам или 213,36 см. А землемерное дело было наиболее консервативным, да еще и на периферии Российской империи. Поэтому с уверенностью можно считать десятину равной 1,12 га, а четь, соответственно, 0,56 га.

¹⁰ Каленюк С.П., *Краєзнавцю про вимірювання* / Л.Л. Потапенко, Лисичанськ: ПП «Прінтекспрес» 2011, с. 56–62.

¹¹ Подов В.И., *К тайнам истории [Текст]: Заметки краеведа* / В.И. Подов, Луганский региональный научно-исследовательский центр по проблемам истории Донбасса, Луганск: Світлиця 1996, с. 103.

Итак, 300 четей пахотной земли, полученной Щабельским, составляет около 168 гектаров. А 1000 коп сенокосы можно приравнять к 100 десятина по 1,12 га, поскольку 10 коп = 1 десятина. Поэтому добавим еще 112 га. Всего же, не считая острова с лесом, он получил 280 га земли или 2800000 м^2 , или $2,8 \text{ км}^2$.

В 1875 году 17 стран подписали Метрическую конвенцию, по которой обязывались ввести в своих странах систему мер, что, по мнению ее авторов, годилась «на все времена и для всех народов». В соответствии с ней длина измерялась в метрах, масса – в килограммах, а площадь земельных участков – в арах. Ар составлял площадь квадрата со стороной 10 метров, то есть 100 квадратных метров – привычная нам «сотка». Для измерения больших площадей эта величина была недостаточной, поэтому в землепользовании используют единицу в сто «соток» – гектар. Слово «гектар» образовано из слова «ар» (происходит от латинского «ареа» - площадь) и приставки «гекто», что обозначает «сто».

Так измерялись площади земельных участков. Но как измерить площадь небольших предметов, которые не являются прямоугольниками или квадратами, например, площадь листа дерева? В таких случаях пользуются палеткой – прозрачной пластиной, на которую нанесена масштабная квадратная сетка. Эта пластинка накладывается на фигуру, площадь которой нужно измерить (рис. 1). Подсчитав количество квадратов (полных и неполных), можно найти площадь фигуры.

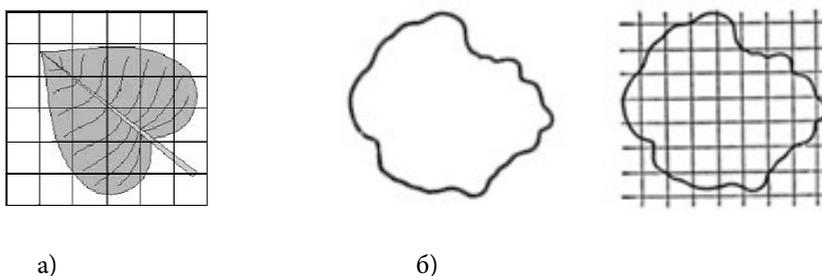


Рис. 1.

Для приближенного определения площади плоских фигур неправильной формы используется также прибор, изобретенный в XIX столетии украинским математиком Буняковским В.Я. – планиметр (рис. 2). Это механический прибор, который дает возможность приближенно, путем обвода контура фигуры любой формы определить ее площадь. Планиметры бывают линейные и полярные.

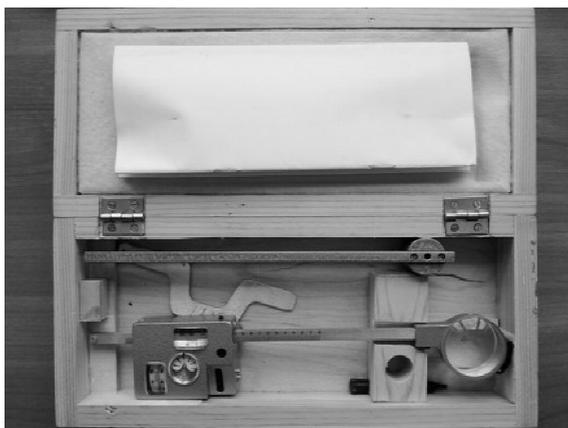


Рис. 2.

Рассмотрев с учениками исторические задачи, выполнив ряд практических упражнений на измерение площади с помощью палетки (для небольших по размеру геометрических плоских тел), а также задач на нахождение и сравнения площади приусадебного участка, квартиры, страны и т.д., нужно сделать следующие важные выводы:

- 1) каждому из рассмотренных плоских физических объектов ставится в соответствие положительное число, которое называется его площадью;
- 2) чтобы получить это число, необходимо установить единицу измерения;
- 3) одинаковые физические объекты имеют равные площади;
- 4) если плоское тело состоит из нескольких частей, то его площадь равна сумме площадей этих частей.

После обсуждения и обобщения результатов рассмотренных задач от физических плоских объектов следует перейти к рассмотрению плоских геометрических тел: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, круга, которые, как известно, являются математическими моделями плоских физических объектов. Только теперь можно выяснять, что понимать под площадью плоского геометрического тела?

Ученикам можно предложить следующее определение:

Определение. Площадью плоского геометрического тела называется положительная функция, которая обладает следующими свойствами:

- 1) задана на множестве плоских геометрических тел;
- 2) для плоского квадрата, сторона которого равна единице длины, значение функции равно единице (единица измерения);
- 3) равным плоским телам ставит в соответствие равные значения;

- 4) аддитивная (если плоское тело разбить на несколько частей, площадь которых известна, то его площадь равна сумме площадей этих частей).

То есть «площадь плоского геометрического тела» – функция $S: M \rightarrow R_+$, где M – множество плоских геометрических тел; R_+ – множество положительных чисел¹².

Как известно, основными способами задания функции являются аналитический, графический, табличный и описательный. Как может быть задана введена нами функция? Ответ на данный вопрос учащиеся могут получить только частично, изучив указанную тему и тему «Первообразная и интеграл» в курсе алгебры и начал анализа.

Если классифицировать плоские геометрические тела на простые и непростые, а затем выделить другие классы – параллелограммы, треугольники, круг и т.д., то такую функцию можно задать аналитически. К примеру:

- 1) $S = ab$ – площадь прямоугольника, где a и b – стороны прямоугольника; в случае квадрата $S = a^2$;
- 2) $S = ah_a$ – площадь параллелограмма, где a и b – стороны параллелограмма, h_a и h_b – высоты, проведенные к соответствующим сторонам;
- 3) $S = ah$ – площадь ромба, где a – сторона, h – высота ромба;
- 4) $S = \frac{1}{2}(a + b)h$ – площадь трапеции, где a и b – основания трапеции, h – ее высота;
- 5) $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$ – площадь любого выпуклого четырехугольника, где d_1, d_2 – его диагонали, φ – угол между диагоналями;
- 6) $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ – площадь треугольника, где a, b – стороны треугольника; γ – угол, что лежит напротив стороны c ; h_a – высота, проведенная до стороны a ;
- 7) $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ – площадь прямоугольного треугольника;
- 8) $S = pr = \frac{1}{2}nar = \frac{1}{4}a^2n \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$ – площадь правильного многоугольника, где a – сторона, n – количество сторон многоугольника, r – радиус вписанного в многоугольник круга;
- 9) $S = \pi R^2$ – площадь круга, де R – радиус круга.

Эти формулы и станут в дальнейшем предметом изучения на уроках геометрии.

В курсе алгебры и начал анализа ученики ознакомятся с еще одним классом плоских тел – криволинейными трапециями – и формулой для нахождения площади этих фигур с помощью определенного интеграла:

¹² Снігур Т.О., *Формування в учнів поняття площі фігури* / Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2015), м. Черкаси, 4–5 червня 2015 р., Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького 2015, с. 76–77.

(10) $S = \int_a^b f(x)dx$ – площа криволинейной трапеции.

Ученики должны понять, что общей формулы нет и для конкретного класса плоских тел она своя. Рассмотрение других геометрических тел, вероятно, даст другие формулы.

А если фигура плоскости не является плоским телом? Тогда в математике рассматривают более широкое понятие – «мера множества». Но это уже тема для разговора с интересующимися учащимися на занятиях факультатива или на занятиях во время изучения соответствующего элективного курса по математике.

Список литературы

- Березкина Э.И., *Математика древнего Китая*, М.: Наука 1980.
- Глейзер Г.И., *История математики в школе VII–VIII кл. Пособие для учителей*, М.: Просвещение 1982.
- Граціанська Л.М., *Нариси з народної математики України*, К.: Вид-во Київського університету 1968.
- Істер О.С., *Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. Закл.*, О.С. Істер. – К.: Генеза 2016.
- Каленюк С.П., *Краєзнавцю про вимірювання* / Л.Л. Потапенко, Лисичанськ: ПП «Прінтекспрес» 2011.
- Математика в дев'яти книгах*, Пер. и примеч. Э.И. Березкиной, Ист.-мат. исслед. 1957, вып. X.
- Подов В.И., *К тайнам истории [Текст]: Заметки краеведа* / В.И. Подов, Луганский региональный научно-исследовательский центр по проблемам истории Донбасса, Луганск: Світлиця 1996.
- Прокопович Ф., *Філософські твори в трьох томах. Т. 3. Математика, історичні праці, вірші, листи. Переклад з латинської*, К. 1981, <http://litorus.org.ua/procor/proc304.htm> [12.12.2016].
- Снігур Т.О., *Формування в учнів поняття площі фігури* / Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2015), м. Черкаси, 4–5 червня 2015 р., Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького 2015.
- Швец В., *Понятие плоского геометрического тела в школьном курсе планиметрии* / В. Швец, Т. Снигур, «Edukacja Humanistyczna. Pórocznik myśli społeczno-pedagogicznej» № 1(32) 2015.
- Шишлянникова В.Н., *Понятие площади в систематическом курсе геометрии* / «Математика в школе» 1952, № 6.

Татьяна Снигур
Василий Швец

Формирование понятия площади плоского геометрического тела

В статье рассмотрено формирование понятия площади как функции на множестве плоских геометрических тел.

Сначала рекомендуем познакомить учащихся с историческими сведениями, фактами, связанными с вычислением площади фигуры, народными задачами, мерами и способами измерения. Это будет способствовать положительной мотивации, развитию интереса к изучению темы «Многоугольники. Площади многоугольников».

Раскрытие понятия площади плоского геометрического тела предлагаем начать с практических упражнений на измерение площади с помощью палетки (для небольших по размеру геометрических плоских тел), а также задач на нахождение и сравнение площади земельных участков, квартиры, государства и т.д.

После обсуждения и обобщения результатов рассмотренных задач от физических плоских объектов следует перейти к рассмотрению плоских геометрических тел: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, круга, которые являются математическими моделями плоских физических объектов. Только теперь можно выяснять, что понимать под площадью плоского геометрического тела и какими свойствами обладает данная геометрическая величина.

Ключевые слова: Геометрическое тело, площадь плоского геометрического тела, измерение площади фигуры, единицы измерения, народные меры, палетка.

Development of concept of square of the flat geometric body

In the article we considered methodical recommendations in relation to forming for the students the concept of area of flat geometrical body as function on the plural of flat bodies.

The article also shows the historical and mathematical details that contribute to the positive motivation, the development of interest in the study of the geometrical magnitude.

Keywords: geometric body, square of the flat geometric body, measurement of square of figures, units of measurement, national measures, measuring grid.

Translated by Tatiana Snigur, Vasiliy Shvets