Eugeniusz Żabski

Algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków zdań

Filozofia Nauki 1/4, 55-81

1993

Filozofia Nauki
Rok I, 1993, Nr 4

Eugeniusz Żabski

Algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków zdań

1. Uwagi wstępne.

Prawda jest jednym z najważniejszych pojęć filozofii i logiki. Terminów „prawda" i „fałsz", jak i „prawdziwy" i „fałszywy", używa się w różnych znaczeniach. Dzieje filozofii — jak wiadomo — znają wiele definicji prawdy i wiele teorii prawdy.

Czasem zwrotów „prawdą jest, że *p*", „fałszem jest, że *p*" — gdzie „*p*" jest symbolem dowolnego zdania — używa się równoznacznie odpowiednio z samym zdaniem „*p*" lub zdaniem „nieprawda, że *p*". Zatem wyrażenia „prawdą jest, że", „fałszem jest, że" pełnią w powyższych zwrotach — jak pisał Autor pracy [Suszko, 1957, 29] — „rolę stylistycznego ornamentu", a z logicznego punktu widzenia pełnią rolę jednoargumentowych spójników zdaniowych; pierwsze odpowiada tzw. asercji zdania „*p*", drugie — negacji zdania „*p*".

Taką eksplikację terminów „prawda" i „fałsz" nazywa Autor pracy [Kotarbiński, 1934, 85] nihilistyczną teorią prawdy.

Arcytrafną, jak się wydaje, ocenę nihilistycznej teorii prawdy dał R. Suszko w cytowanej już pracy [Suszko, 1957, 29]. O koncepcji tej R. Suszko pisał, że „dobrze zdaje sprawę w pewnych i niezbyt szerokich granicach z faktycznego użytku terminu „prawda"".

Do nihilistycznej teorii prawdy nawiązują prezentowane w tej pracy rachunki zdań. W językach tych rachunków występują m.in. terminy: *T*, *F* symbolizujące odpowiednio: prawdę i fałsz. Terminy te są w tych warunkach rozumiane dokładnie tak, jak „prawda" i „fałsz" są rozumiane w nihilistycznej teorii prawdy, dlatego rachunki te nazywamy „nihilistycznymi".

Przedstawimy cztery nihilistyczne rachunki zdań (w skrócie: nrz): n_1, n_2, n_3, n_4. Prezentację tych rachunków zaczniemy jednak od krótkiego przypomnienia klasycznego rachunku zdań (w skrócie: krz). Pozwoli to na wyakcentowanie podobieństw i wskazanie różnic między krz a nrz. Syntaktyczne opisy tych rachunków ograniczymy jedynie do podania ich aksjomatyk. Dokładniejsze opisy **nrz** znaleźć można w pracach: [Żabski, 1990], [Żabski, 1991], [Żabski, 1993], [Żabski, 1993a].

Po syntaktycznym opisie każdego z wyżej wymienionych rachunków przejdziemy do ich semantycznego ujęcia. Podamy różne algebry, a następnie wykażemy, że aksjomatyki każdego z prezentowanych tu rachunków są adekwatne względem odpowiednich algebr. Dowody te są najważniejszym wynikiem tej pracy, dlatego są dość szczegółowe, być może nawet za szczegółowe.

2. Klasyczny rachunek zdań.

Prezentację krz zaczynamy od krótkiego opisu języka krz (w skrócie: jkrz).

Alfabet jkrz składa się z następujących symboli:

1. Stałych logicznych: $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\equiv$, zwanych odpowiednio negacją, alternatywą, koniunkcją, implikacją, równoważnością.

2. Zmiennych zdaniowych: p, q, r, ...

3. Znaków technicznych, tj. nawiasów i przecinków.

Wyrażeniem jkrz jest każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka.

Formułą jkrz jest każde i tylko takie wyrażenie jkrz, które spełnia następujące warunki:

1. Każda zmienna zdaniowa jest formułą jkrz.

2. Jeśli A jest formułą jkrz, to $\sim(A)$ jest formułą jkrz.

3. Jeśli A i B są formułami jkrz, to $(A)\vee(B)$, $(A)\wedge(B)$, $(A)\rightarrow(B)$, $(A)\equiv(B)$ są formułami jkrz.

Przyjmujemy umowy dotyczące opuszczania niektórych nawiasów.

1. Pojedynczych zmiennych nigdy nie ujmujemy w nawiasy.

2. Przyjmujemy, że spójnik $\sim$ wiąże najmocniej, a spójniki $\vee$ i $\wedge$ mocniej niż funktory $\rightarrow$ i $\equiv$.

Aksjomatami krz są wszystkie i tylko te formuły jkrz, które podpadają pod jeden z następujących schematów:

A1.	$A\rightarrow(B\rightarrow A)$,
A2.	$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$,
A3.	$(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$,
A4.	$\sim\sim A\rightarrow A$,
A5.	$A\rightarrow\sim\sim A$,
A6.	$A\wedge B\rightarrow A$,
A7.	$A\wedge B\rightarrow B$,
A8.	$(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$,
A9.	$A\rightarrow A\vee B$,
A10.	$B\rightarrow A\vee B$,
A11.	$(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$,
A12.	$(A\equiv B)\rightarrow(A\rightarrow B)$,

A13. $(A \equiv B) \to (B \to A)$,

A14. $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \equiv B))$.

Jedyną regułą pierwotną aksjomatycznego systemu krz jest reguła odrywania (w skrócie: RO) o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ A \end{array}}{B.}$$

3. Nihilistyczny rachunek zdań n_1.

Przechodzimy obecnie do omawiania nihilistycznych rachunków zdań. Na początek przedstawimy nrz n_1. Zaczynamy od krótkiego opisu języka tego rachunku oznaczonego symbolem jn_1.

Na alfabet jn_1 składają się:

a) wszystkie znaki alfabetu jkrz,

b) stałe specyficzne jn_1: T, F, czytane odpowiednio: „jest prawdziwe", „jest fałszywe".

Definicje wyrażenia jn_1 i formuły jn_1 są analogiczne do definicji odpowiednio wyrażenia jkrz i formuły jkrz, z tym, że warunek 2. definicji formuły jn_1 jest następujący:

2. Jeśli A jest formułą jn_1, to: $\sim(A)$, T(A) i F(A) są formułami jn_1.

Przyjmujemy następujące umowy dotyczące opuszczania niektórych nawiasów:

1. Pojedynczych zmiennych nigdy nie ujmujemy w nawiasy.

2. Przyjmujemy, że spójniki: $\sim$, T, F wiążą najmocniej, a spójniki $\wedge$ i $\vee$ mocniej niż funktory $\to$ i $\equiv$.

Łatwo zauważyć, że jkrz zawiera się właściwie w jn_1 (symbolicznie: jkrz $\subsetneq jn_1$).

Aksjomatami systemu aksjomatycznego nrz n_1 (lub krótko aksjomatami n_1) są wszystkie i tylko te formuły jn_1, które podpadają pod:

1. schematy aksjomatów krz,

2. dwa następujące schematy:

A15. $TA \equiv A$,

A16. $FA \equiv \sim A$.

Jedyną regułą pierwotną systemu aksjomatycznego n_1 jest reguła odrywania.

Łatwo zauważyć, że krz $\subsetneq n_1$.

4. Nihilistyczny rachunek zdań n_2.

Zarówno krz, jak i rachunek n_1 są rachunkami dwuwartościowymi. Są to teorie zdań albo prawdziwych, albo fałszywych. Oprócz zdań prawdziwych i fałszywych istnieją — jak wiadomo — zdania nieokreślone, tzn. ani prawdziwe, ani fałszywe. Przykładem takich zdań nieokreślonych są np. zdania o przyszłości. Nihilistyczny rachunek zdań n_2 jest teorią zdań prawdziwych, fałszywych albo nieokreślonych. Jest to więc rachunek trójwartościowy. Prezentację nihilistycznego rachunku zdań n_2 zaczynamy od opisu języka tego rachunku; język ten oznaczamy symbolem jn_2.

Na alfabet n_2 składają się:

a) wszystkie symbole alfabetu jn_1,

b) stała specyficzna jn_2, jednoargumentowy spójnik N, czytany: „nieokreślone jest, że".

Definicje wyrażenia jn_2 i formuły jn_2 są analogiczne do definicji odpowiednio wyrażenia jn_1 i formuły jn_1, z tym, że warunek 2. definicji formuły jn_2 jest następujący:

2. Jeśli A jest formułą jn_2, to: ~(A), T(A), F(A) i N(A) są formułami jn_2.

Przyjmujemy, analogicznie jak w rachunku n_1, umowy dotyczące opuszczania niektórych nawiasów.

Łatwo zauważyć, że zarówno jkrz $\subsetneq$ jn_2, jak i $jn_1 \subsetneq jn_2$.

Spośród wszystkich formuł języka jn_2 wyróżniamy takie, które będziemy nazywać „formułami prefiksowymi jn_2". Podajemy definicję formuły prefiksowej jn_2.

Formułą prefiksową jn_2 nazywamy wszystkie i tylko te formuły jn_2, które spełniają następujące warunki:

1. Jeśli A jest formułą jn_2, to: T(A), F(A) i N(A) są formułami prefiksowymi jn_2.
2. Jeśli A jest formułą prefiksową jn_2, to ~(A) jest formułą prefiksową jn_2.
3. Jeśli A i B są formułami prefiksowymi jn_2, to (A)v(B), (A)∧(B), (A)→(B), (A)≡(B) są formułami prefiksowymi jn_2.

Aksjomatami systemu aksjomatycznego nrz n_2 (lub krótko: aksjomatami n_2) są wszystkie i tylko te formuły jn_2, które podpadają pod następujące schematy:

A1.	$A \to (B \to A)$,
A2.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
A3.	$\sim\sim A \to A$,
A4.	$A \to \sim\sim A$,
A5.	$A \to (\sim A \to B)$,
A6.	$(A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$, jeśli A jest formułą prefiksową jn_2,
A7.	$A \wedge B \to A$,
A8.	$A \wedge B \to B$,
A9.	$(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$,
A10.	$A \to A \vee B$,
A11.	$B \to A \vee B$,
A12.	$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
A13.	$(A \equiv B) \to (A \to B)$,
A14.	$(A \equiv B) \to (B \to A)$,

A15. $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \equiv B))$,

A16. $TA \equiv A$,

A17. $FA \equiv {\sim}A$,

A18. ${\sim}NA \equiv TA \vee FA$.

Jako pierwotną regułę dowodzenia w n_2 przyjmujemy, podobnie jak w poprzednich systemach, regułę odrywania.

Łatwo zauważyć, że:

1. $p \to (q \to p)$ jest tezą każdego z rachunków: krz, n_1, n_2.
2. $(p \to q) \to ({\sim}q \to {\sim}p)$ jest tezą krz i n_1 lecz nie jest tezą rachunku n_2.
3. ${\sim}N_p \equiv T_p \vee F_p$ jest tezą n_2, lecz nie jest tezą żadnego z rachunków: krz, n_1.

Konstatacja ta uzasadnia następujące stwierdzenie: zarówno krz jak i nrz n_1 krzyżują się z nrz n_2 (symbolicznie: krz $\between$ n_2 i $n_1 \between n_2$).

5. Nihilistyczny rachunek zdań n_3.

Nrz n_2 jest trójwartościowym rachunkiem; rachunkiem, w którym zdania mogą być bądź prawdziwe, bądź fałszywe, bądź ani prawdziwe, ani fałszywe. Nrz n_3 jest także trójwartościowym rachunkiem, lecz jest to rachunek, który jest teorią zdań prawdziwych, fałszywych oraz zarazem prawdziwych i fałszywych, tzn. takich, które z pewnego punktu widzenia są prawdziwe, z innego zaś — fałszywe. Przykładami takich zdań — wydaje się — mogą być następujące dwa wyrażenia: światło ma naturę falową, światło ma naturę korpuskularną. Pewne eksperymenty zdają się potwierdzać hipotezę, że światło ma naturę falową. Inne doświadczenia – wydaje się – temu przeczą i potwierdzają przypuszczenie, że światło ma naturę korpuskularną.

Omawianie nrz n_3 zaczynamy, jak zwykle, od prezentacji języka tego rachunku (w skrócie: jn_3).

Na alfabet jn_3 składają się:

a) wszystkie symbole alfabetu jn_1,

b) stała specyficzna jn_3, jednoargumentowy spójnik M, czytany: „niejednoznaczne jest, że".

Definicje wyrażenia jn_3 i formuły jn_3 są analogiczne do definicji odpowiednio wyrażenia jn_2 i formuły jn_2, z tym, że warunek 2. definicji formuły jn_3 ma następującą postać:

2. Jeśli A jest formułą jn_3, to: ${\sim}(A)$, $T(A)$, $F(A)$ i $M(A)$ są formułami jn_3.

Przyjmujemy, analogicznie jak poprzednio umowy dotyczące pomijania niektórych nawiasów.

Łatwo zauważyć, że:

1. jkrz $\subsetneq$ n3,
2. $jn_1 \subsetneq$ jn3,
3. $jn_2 \between jn_3$.

W zbiorze wszystkich formuł języka jn_3 wyróżniamy pewien podzbiór formuł, które nazywamy „formułami prefiksowymi jn_3". Podajemy definicję formuły prefiksowej jn_3.

Formułami prefiksowymi jn_3 nazywamy wszystkie i tylko te formuły jn_3, które spełniają następujące warunki:

1. Jeśli A jest formułą jn_3, to: T(A), F(A) i M(A) są formułami prefiksowymi jn_3.
2. Jeśli A jest formułą prefiksową jn_3, to $\sim(A)$ jest formułą prefiksową jn_3.
3. Jeśli A i B są formułami prefiksowymi jn_3, to $(A)\vee(B)$, $(A)\wedge(B)$, $(A)\rightarrow(B)$, $(A)\equiv(B)$ są formułami prefiksowymi jn_3.

Aksjomatami systemu aksjomatycznego nrz n_3 (lub krótko: aksjomatami n_3) są wszystkie i tylko te formuły jn_3, które podpadają pod następujące schematy:

A1. $A\rightarrow(B\rightarrow A)$,

A2. $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$,

A3. $\sim\sim A\rightarrow A$,

A4. $A\rightarrow\sim\sim A$,

A5. $A\rightarrow(\sim A\rightarrow MA)$,

A6. $A\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$,
jeśli A jest formułą prefiksową jn_3,

A7. $(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$,
jeśli B jest formułą prefiksową jn_3,

A8. $A\vee\sim A$,

A9. $A\wedge B\rightarrow A$,

A10. $A\wedge B\rightarrow B$,

A11. $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C))$,

A12. $A\rightarrow A\vee B$,

A13. $B\rightarrow A\vee B$,

A14. $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$,

A15. $(A\equiv B)\rightarrow(A\rightarrow B)$,

A16. $(A\equiv B)\rightarrow(B\rightarrow A)$,

A17. $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow(A\equiv B))$,

A18. $TA\equiv A$,

A19. $FA\equiv\sim A$,

A20. $FA\rightarrow(A\rightarrow B)$,

A21. $MA\rightarrow(A\wedge\sim A)$.

Jako pierwotną regułę dowodzenia w n_3 przyjmujemy regułę odrywania.

Łatwo zauważyć, że:

1. $p\to(q\to p)$ jest tezą każdego z rachunków: krz, n_1, n_2, n_3.
2. $(p\to q)\to(\sim q\to\sim p)$ jest tezą krz i n_1, lecz nie jest tezą n_3.
3. $(Tp\to q)\to(\sim q\to\sim Tp)$ jest tezą n_2, lecz nie jest tezą n_3.
4. $Mp\to(p\wedge\sim p)$ jest tezą n_3, lecz nie jest tezą żadnego z rachunków: krz, n_1, n_2.

Konstatacja ta uzasadnia następujące stwierdzenia:

1. krz $\overline{\underline{\circ}}$ n_3,
2. n_1 $\overline{\underline{\circ}}$ n_3,
3. n_2 $\overline{\underline{\circ}}$ n_3.

6. Nihilistyczny rachunek zdań n_4.

Nrz n_4 jest teorią zdań prawdziwych, fałszywych, nieokreślonych i niejednoznacznych. Jest to zatem czterowartościowy rachunek zdań.

Na alfabet języka n_4 (w skrócie: jn_4) składają się:

a) wszystkie symbole alfabetu jn_3,

b) stała N.

Definicje wyrażenia jn_4 i formuły jn_4 są analogiczne do definicji odpowiednio wyrażenia jn_3 i formuły jn_3, z tym, że warunek 2. definicji formuły jn_4 ma następującą postać:

2. Jeśli A jest formułą jn_4, to: $\sim(A)$, $T(A)$, $F(A)$, $N(A)$ i $M(A)$ są formułami jn_4.

Przyjmujemy, analogicznie jak poprzednio umowy dotyczące pomijania niektórych nawiasów.

Aksjomatami systemu aksjomatycznego nrz n_4 (lub krótko: aksjomatami n_4) są wszystkie i tylko te formuły jn_4, które podpadają pod następujące schematy:

A1. $A\to(B\to A)$,

A2. $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$,

A3. $\sim\sim A\to A$,

A4. $A\to\sim\sim A$,

A5. $A\to(\sim A\to MA)$,

A6. $A\to(\sim A\to B)$,
jeśli A jest formułą prefiksową jn_4,

A7. $(A\to B)\to(\sim B\to\sim A)$,
jeśli B jest formułą prefiksową jn_4,

A8. $A\wedge B\to A$,

A9. $A\wedge B\to B$,

A10. $(A\to C)\to((A\to C)\to(A\vee B\to C))$,

A11. $A\to A\vee B$,

A12. $B\to A\vee B$,

A13. $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$, A14. $(A\equiv B)\to(A\to B)$,

A15. $(A\equiv B)\to(B\to A)$,

A16. $(A\to B)\to((B\to A)\to(A\equiv B))$,

A17. $TA\equiv A$,

A18. $FA\equiv\sim A$,

A19. $MA\to(A\wedge\sim A)$

A20. $\sim NA\equiv TA\vee FA$,

A21. $\sim TA\to(A\to B)$.

Jako pierwotną regułę dowodzenia w n_4 przyjmujemy regułę odrywania.

Łatwo zauważyć, że:

1. $p\to(q\to p)$ jest tezą każdego z rachunków: krz, n_1, n_2, n_3, n_4.
2. $(p\to q)\to(\sim q\to\sim p)$ jest tezą krz i n_1, lecz nie jest tezą n_4.
3. $(Tp\to q)\to(\sim q\to\sim Tp)$ jest tezą n_2, lecz nie jest tezą n_4.
4. $(p\to Tq)\to(\sim Tq\to\sim p)$ jest tezą n_3, lecz nie jest tezą n_4.
5. $(Np\to Mq)\to(\sim Mq\to\sim Np)$ jest tezą n_4, lecz nie jest tezą żadnego z rachunków: krz, n_1, n_2, n_3.

Konstatacja ta uzasadnia następujące stwierdzenie: każdy z rachunków: krz, n_1, n_2, n_3 krzyżuje się z systemem n_4.

Zauważmy też, że rachunki n_3 i n_4 są przykładami tzw. systemów parakonsystentnych.

7. Krz-algebra.

„Krz-algebrą" (symbolicznie A_{krz}) nazywamy algebrę $(B, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, +)$, gdzie B jest niepustym zbiorem, 0, 1 są zeroargumentowymi operacjami, $'$ operacją jednoargumentową, a $\cup$, $\cap$, $\dot{-}$, $+$, operacjami dwuargumentowymi w B spełniającymi następujące warunki:

1. $0\neq 1$,
2. Jeśli $x'=1$, to $x=0$,
3. Jeśli $x'=0$, to $x=1$,
4. Jeśli $x\cap y=1$, to $x=1$ i $y=1$,
5. Jeśli $x\cap y=0$, to $x=0$ lub $y=0$,
6. Jeśli $x\cup y=1$, to $x=1$ lub $y=1$,
7. Jeśli $x\cup y=0$, to $x=0$ i $y=0$,
8. $x\dot{-}y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x\neq 1 \text{ lub } y\neq 0, \\ 0, \text{ gdy } x=1 \text{ i } y=0. \end{cases}$
9. $x+y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x\dot{-}y=1 \text{ i } y\dot{-}x=1, \\ 0, \text{ gdy } x\dot{-}y=0 \text{ lub } y\dot{-}x=0. \end{cases}$

Przykładem A_{krz} jest algebra $(\{0, 1\}, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, +)$, gdzie operacje $\cup$, $\cap$, $'$, $\dot{-}$, $+$ zdefiniowane są przez następujące tabele:

x	x'
0	1
1	0

x	y	$x \cup y$	$x \cap y$	$x \dot{-} y$	$x + y$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

8. N_1-algebra.

„N_1-algebrą" (symbolicznie: An_1) nazywamy algebrę $(B, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, +, t, f)$, gdzie: $(B, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, +)$ jest A_{krz}, natomiast t i f są jednoargumentowymi operacjami w B spełniającymi następujące warunki:

10. $tx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x=1, \\ 0, \text{ gdy } x \neq 1. \end{cases}$

11. $fx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x=0, \\ 0, \text{ gdy } x \neq 0. \end{cases}$

Przykładem An_1 jest algebra $(\{0, 1\}, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, +, t, f)$, w której operacje $\cup$, $\cap$, $'$, $\dot{-}$ i $+$, zdefiniowane są tak jak w poprzednim przykładzie, zaś operacje t i f są zdefiniowane przez następujące tabelki:

x	tx	fx
0	0	1
1	1	0

9. N_2-algebra.

„N_2-algebrą" (symbolicznie: An_2) nazywamy algebrę $(B, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, +, t, f, n)$, gdzie: B jest niepustym zbiorem, 0 i 1 są zeroargumentowymi operacjami, $'$, t, f - operacjami jednoargumentowymi, zaś $\cup$, $\cap$, $\dot{-}$, $+$, operacjami dwuargumentowymi w B spełniającymi następujące warunki:

1. $0 \neq 1$,
2. $0' = 1$,
3. $1' = 0$,
4. $x = x''$.

Dalej zamiast zwrotu „zawsze i tylko wtedy, gdy" używać będę zwrotu: „ztw".

5. $x \cup y = 0$, ztw ($x=0$ i $y \neq 1$ lub $x \neq 1$ i $y=0$),
6. $x \cup y = 1$, ztw $x=1$ lub $y=1$,
7. $x \cap y = 1$, ztw $x=1$ i $y=1$,
8. $x \dot{-} y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x \neq 1 \text{ lub } y=1, \\ 0, \text{ gdy } x=1 \text{ i } y \neq 1. \end{cases}$

9. $x \div y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x \dot{-} y=1 \text{ oraz } y \dot{-} x=1, \\ 0, \text{ gdy } x \dot{-} y=0 \text{ lub } y \dot{-} x=0. \end{cases}$

10. $tx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x=1, \\ 0, \text{ gdy } x \neq 1. \end{cases}$

11. $fx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x'=1, \\ 0, \text{ gdy } x' \neq 1. \end{cases}$

12. $nx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x \neq 1 \text{ i } x' \neq 1, \\ 0, \text{ gdy } x=1 \text{ i } x'=1. \end{cases}$

Przykładem An_2 jest algebra ({-1, 0, 1}, ∪, ∩, ′, 0, 1, $\dot{-}$, $\div$, t, f, n), w której operacje ∪, ∩, ′, $\dot{-}$, $\div$, t, f, n zdefiniowane są przez następujące tabelki:

x	x′	tx	fx	nx
-1	-1	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0

∪	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

∩	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	0	0
1	-1	0	1

$\dot{-}$	-1	0	1
-1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1

$\div$	-1	0	1
-1	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1

10. N_3-algebra.

„N_3-algebrą" (symbolicznie: An_3) nazywamy algebrę (B, ∪, ∩, ′, 0, 1, $\dot{-}$, $\div$, t, f, m), gdzie: B jest niepustym zbiorem, 0 i 1 są zeroargumentowymi operacjami, ′, t, f, m - operacjami jednoargumentowymi, zaś ∪, ∩, $\dot{-}$, $\div$, operacjami dwuargumentowymi w B, spełniającymi następujące warunki:

1. $0 \neq 1$,
2. $0'=1$,
3. $1'=0$,
4. $x=x''$,
5. $x \cup x'=1$,
6. $x \cup y \neq 0$, ztw $x \neq 0$ lub $y \neq 0$,
7. $x \cap y=0$, ztw $x=0$ lub $y=0$,
8. $x \dot{-} y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x=0 \text{ lub } y \neq 0, \\ 0, \text{ gdy } x \neq 0 \text{ i } y=0. \end{cases}$
9. $x \div y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x \dot{-} y=1 \text{ oraz } y \dot{-} x=1, \\ 0, \text{ gdy } x \dot{-} y=0 \text{ lub } y \dot{-} x=0. \end{cases}$
10. $tx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x \neq 0, \\ 0, \text{ gdy } x=0. \end{cases}$

11. $fx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x=0, \\ 0, \text{ gdy } x\neq 0. \end{cases}$
12. $mx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x\neq 0 \text{ i } x'\neq 0, \\ 0, \text{ gdy } x=0 \text{ i } x'=0. \end{cases}$
13. Jeśli mx=1, to fx=1.

Przykładem An_3 jest algebra ({0, 1/2, 1}, ∪, ∩, ', 0, 1, $\dot{-}$, ÷, t, f, m), w której operacje ∪, ∩, ', $\dot{-}$, ÷, t, f, m zdefiniowane są przez następujące tabelki:

x	x'	tx	fx	mx
0	1	0	1	0
1/2	1/2	1	1	1
1	0	1	0	0

∪	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1	1
1	1	1	1

∩	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\dot{-}$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1	1

÷	0	1/2	1
0	1	0	0
1/2	0	1	1
1	0	1	1

11. N_4-struktura.

„N_4-strukturą" (symbolicznie: An_4) nazywamy strukturę (B, 0, 1, ∪, ∩, ', $\dot{-}$, ÷, t, f, n, m, ≤, >), gdzie: B jest niepustym zbiorem, 0 i 1 są zeroargumentowymi operacjami, ', t, f, n, m - operacjami jednoargumentowymi, ∪, ∩, $\dot{-}$, ÷ operacjami dwuargumentowymi, zaś ≤ i > dwuczłonowymi relacjami w B, spełniającymi następujące warunki:

1. 0'=1,
2. 1'=0,
3. x=x'',
4. 1>0,
5. x≤y ztw nieprawda, że x>y,
6. Jeśli x=y, to nieprawda, że x>y,
7. x∩y>0 ztw x>0 i y>0,
8. x∪y≤0 ztw x≤0 i y≤0,
9. $x\dot{-}y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x\leq 0 \text{ lub } y>0, \\ 0, \text{ gdy } x>0 \text{ i } y\leq 0. \end{cases}$
10. $x\div y = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x\dot{-}y=1 \text{ oraz } y\dot{-}x=1, \\ 0, \text{ gdy } x\dot{-}y=0 \text{ lub } y\dot{-}x=0. \end{cases}$
11. $tx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x>0, \\ 0, \text{ gdy } x\leq 0. \end{cases}$
12. $fx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x'>0, \\ 0, \text{ gdy } x'\leq 0. \end{cases}$

13. $nx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x \leq 0 \text{ i } x' \leq 0, \\ 0, \text{ gdy } x > 0 \text{ lub } x' > 0. \end{cases}$

14. $mx = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x > 0 \text{ i } x' > 0, \\ 0, \text{ gdy } x \leq 0 \text{ lub } x' \leq 0. \end{cases}$

Z 4. i 6. wynika następujące twierdzenie:

T. $0 \neq 1$.

Przykładem An_4 jest struktura $(\{-1, 0, 1/2, 1\}, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, \dot{+}, t, f, n, m, \leq, >)$, w której operacje $\cup$, $\cap$, $'$, $\dot{-}$, $\dot{+}$, t, f, n, m i relacje $\leq$ i $>$ są zdefiniowane przez następujące tabelki:

x	x'	tx	fx	nx	mx
-1	-1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1/2	1/2	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0

∪	-1	0	1/2	1
-1	-1	0	1/2	1
0	0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1	1

∩	-1	0	1/2	1
-1	-1	-1	-1	-1
0	-1	0	0	0
1/2	-1	0	1/2	1/2
1	-1	0	1/2	1

$\dot{-}$	-1	0	1/2	1
-1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
1/2	0	0	1	1
1	0	0	1	1

$\dot{+}$	-1	0	1/2	1
-1	1	1	0	0
0	1	1	0	0
1/2	0	0	1	1
1	0	0	1	1

>	-1	0	1/2	1
-1	-	-	-	-
0	+	-	-	-
1/2	+	+	-	-
1	+	+	+	-

≤	-1	0	1/2	1
-1	+	+	+	+
0	-	+	+	+
1/2	-	-	+	+
1	-	-	-	+

12. Interpretacje.

Przez interpretację jkrz w A_{krz} rozumiemy dowolną funkcję h z jkrz w A_{krz} spełniającą następujące warunki, dla wszystkich $A,B \in$ jkrz:

(1) $h(\sim A) = h(A)'$,

(2) $h(A \wedge B) = h(A) \cap h(B)$,

(3) $h(A \vee B) = h(A) \cup h(B)$,

(4) $h(A \rightarrow B) = h(A) \dot{-} h(B)$,

(5) $h(A \equiv B) = h(A) \dot{+} h(B)$.

Przez interpretację jn_1 w An_1 rozumiemy dowolną funkcję h z jn_1 w An_1 spełniającą warunki, dla wszelkich $A,B \in jn_1$:

(1) - (5) definicji interpretacji jkrz w A_{krz}, ponadto dwa następujące warunki:

(6) h(TA) = th(A),

(7) h(FA) = fh(A).

Przez interpretację jn_2 w An_2 rozumiemy dowolną funkcję h z jn_2 w An_2 spełniającą warunki, dla wszelkich $A,B \in jn_2$:

(1) - (7) definicji interpretacji jn_1 w An_1, ponadto dwa następujące warunki:

(8) h(NA) = nh(A),

(9) jeśli A jest formułą prefiksową jn_2, to h(A)=1 lub h(A)=0.

Przez interpretację jn_3 w An_3 rozumiemy dowolną funkcję h z jn_3 w An_3 spełniającą warunki, dla wszelkich $A,B \in jn_3$:

(1) - (7) definicji interpretacji jn_1 w An_1, ponadto dwa następujące warunki:

(10) h(MA) = mh(A),

(11) jeśli A jest formułą prefiksową jn_3, to h(A)=1 lub h(A)=0.

Przez interpretację jn_4 w An_4 rozumiemy z kolei dowolną funkcję h z jn_4 w An_4 spełniającą warunki, dla wszelkich $A,B \in jn_4$:

(1) - (8), (10) ponadto następujący warunek:

(12) jeśli A jest formułą prefiksową jn_4, to h(A)=1 lub h(A)=0.

13. Przystosowanie aksjomatyk krz i nrz n_1 i n_2.

Formuła $A \in$ jkrz jest spełniona w A_{krz} przez interpretację jkrz w A_{krz} h ztw h(A)=1.

Formuła $A \in$ jkrz jest spełniona w A_{krz} ztw dla każdej interpretacji jkrz w A_{krz} h, h(A)=1.

Formuła $A \in$ jkrz jest tautologią krz ztw A jest spełniona w dowolnej A_{krz}.

Formuła $A \in jn_1$ jest spełniona w An_1 przez interpretację jn_1 w An_1 h ztw h(A)=1.

Formuła $A \in jn_1$ jest spełniona w An_1 ztw dla każdej interpretacji jn_1 w An_1 h, h(A)=1.

Formuła $A \in jn_1$ jest tautologią nrz n_1 (lub krótko — n_1-tautologią) ztw A jest spełniona w dowolnej An_1.

Formuła $A \in jn_2$ jest spełniona w An_2 przez interpretację jn_2 w An_2 h ztw h(A)=1.

Formuła $A \in jn_2$ jest spełniona w An_2 ztw dla każdej interpretacji jn_2 w An_2 h, h(A)=1.

Formuła $A \in jn_2$ jest tautologią nrz n_2 (lub krótko — n_2-tautologią) ztw A jest spełniona w dowolnej An_2.

Oczywiste jest, że każdy z aksjomatów krz jest tautologią krz.

Bez trudu można sprawdzić, że każdy z aksjomatów nrz n_1 jest n_1-tautologią.

Wykażemy teraz, że każdy z aksjomatów nrz n_2 jest n_2-tautologią.

Załóżmy, że A1 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(A \to (B \to A)) \neq 1$. Niech An_2'

będzie taką algebrą i h′ taką interpretacją jn_2 w An_2', że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $x\dot{-}(y\dot{-}x)\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $x\dot{-}(y\dot{-}x)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x=1$ i (2) $y\dot{-}x\neq 1$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $y\dot{-}x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $x\neq 1$, co jest sprzeczne z (1).

Załóżmy, że A2 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))\neq 1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h′ taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$ i $h'(C)=z$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $(x\dot{-}(y\dot{-}z))\dot{-}((x\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z))\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $(x\dot{-}(y\dot{-}z))\dot{-}((x\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x\dot{-}(y\dot{-}z)=1$, (2) $x\dot{-}y=1$ oraz (3) $x\dot{-}z=0$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (4) $x=1$ oraz (5) $z\neq 1$. Z (4), (2) i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy, że $y=1$. Stąd, z (5) i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy, że $y\dot{-}z=0$. Stąd i z 1. definicji An_2 otrzymujemy, że $y\dot{-}z=1$. Stąd, z (4) i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy, że $x\dot{-}(y\dot{-}z)=0$. Stąd i z 1. definicji An_2 otrzymujemy, że $x\dot{-}(y\dot{-}z)=1$, co przeczy (1).

Załóżmy, że A3 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(\sim\sim A\rightarrow A)=1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h′ taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $x''\dot{-}x\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $x''\dot{-}x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x''=1$. i (2) $x\neq 1$. Z (1) i 4. definicji An_2 wnosimy, że $x=1$, co przeczy (2).

Analogicznie jak aksjomatu A3 dowodzimy, że pewnik A4 jest n_2-tautologią.

Załóżmy, że A5 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(A\rightarrow(\sim A\rightarrow B))\neq 1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h′ taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $x\dot{-}(x'\dot{-}y)\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $x\dot{-}(x\dot{-}y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x=1$. i (2) $x'\dot{-}y\neq 1$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy, że $x'\dot{-}y=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $x'=1$. Stąd otrzymujemy, że $x''=1'$. Stąd i 3. definicji An_2 wnosimy, że $x''=0$. Stąd i z 4. definicji An_2 otrzymujemy, że $x=0$. Stąd i z (1) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_2.

Załóżmy, że A6 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h((A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A))\neq 1$ oraz A jest formułą prefiksową języka jn_2. Niech An_2' będzie taką algebrą i h′ taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $x=0$ lub $x=1$ oraz $(x\dot{-}y)\dot{-}(y'\dot{-}x')\neq 1$. Z tego ostatniego i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $(x\dot{-}y)\dot{-}(y'\dot{-}x')=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x\dot{-}y=1$ oraz (2) $y'\dot{-}x'=0$. Załóżmy, że $x=0$. Stąd otrzymujemy, że $x'=0'$. Stąd i z 2. definicji An_2 wnosimy, że $x'=1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $y'\dot{-}x'=1$. Stąd i z (2) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_2.

Załóżmy teraz, że $x=1$. Stąd, z (1) i definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $y=1$. Stąd otrzymujemy, że $y'=1'$. Stąd i z 3. definicji An_2 wnosimy, że $y'=0$. Stąd, z 1. definicji An_2 i definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $y'\dot{-}x'=1$. Stąd i z (2) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_2.

Załóżmy, że A7 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(A\wedge B\rightarrow A)=1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $x\cap y\dot{-}x\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $x\cap y\dot{-}x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x\cap y=1$ oraz (2) $x=0$. Z (1) i z 7. definicji An_2 otrzymujemy, że $x=1$. Stąd i z (2) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_2.

Analogicznie jak aksjomatu A7 dowodzimy, że pewnik A8 jest n_2-tautologią.

Załóżmy, że A9 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h((A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C)))\neq 1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$, $h'(C)=z$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $(x\dot{-}y)\dot{-}((x\dot{-}z)\dot{-}(x\dot{-}y\cap z))\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $(x\dot{-}y)\dot{-}((x\dot{-}z)\dot{-}(x\dot{-}y\cap z))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że (1) $x\dot{-}y=1$, (2) $x\dot{-}z=1$ i $x\dot{-}y\cap z=0$. Z tej ostatniej równości i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (3) $x=1$ i (4) $y\cap z\neq 1$. Z (3), (1) i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (5) $y=1$. Z (3), (2) i definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (6) $z=1$. Z (5), (6) i 7. definicji An_2 wnosimy, że $y\cap z=1$, co przeczy (4).

Załóżmy, że A10 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(A\rightarrow A\vee B)\neq 1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $x\dot{-}x\cup y\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $x\dot{-}x\cup y=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że (1) $x=1$ oraz (2) $x\cup y\neq 1$. Z (1) i 6. definicji An_2 wynika, że $x\cup y=1$, co przeczy (2).

Analogicznie jak aksjomatu A10 dowodzimy, że pewnik A11 jest n_2-tautologią.

Załóżmy, że A12 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h((A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C)))\neq 1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$, $h'(C)=z$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $(x\dot{-}z)\dot{-}((y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z))\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $(x\dot{-}z)\dot{-}((y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x\dot{-}z=1$, (2) $y'\dot{-}z=1$ i $x\cup y\dot{-}z\neq 1$. Z tego ostatniego i definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $x\cup y\dot{-}z=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że (3) $x\cup y=1$ i (4) $z\neq 1$. Z (3) i 6. definicji An_2 wnosimy, że $x=1$ lub $y=1$. Załóżmy, że $x=1$. Stąd, z (1) i definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $z=1$, co przeczy (4). Załóżmy zatem, że $y=1$. Stąd z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $z=1$, co także przeczy (4).

Załóżmy, że A13 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h((A\blacksquare B)\rightarrow(A\rightarrow B))\neq 1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $(x+y)\dot{-}(x\dot{-}y)\neq1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wnosimy, że $(x+y)\dot{-}(x\dot{-}y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x+y=1$, (2) $x\dot{-}y=0$. Z (2) i definicji $+$ w An_2 wnosimy, że $x+y=0$. Stąd i z (1) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_2.

Analogicznie jak aksjomatu A13 dowodzimy, że pewnik A14 jest n_2-tautologią.

Załóżmy, że A15 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h((A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow(A\equiv B)))\neq1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $(x\dot{-}y)\dot{-}((y\dot{-}x)\dot{-}(x+y))\neq1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $(x\dot{-}y)\dot{-}((y\dot{-}x)\dot{-}(x+y))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $x\dot{-}y=1$, (2) $y\dot{-}x=1$, (3) $x+y\neq1$. Z (1), (2) i definicji $+$ w An_2 wnosimy, że $x+y=1$, co przeczy (3).

Załóżmy, że A16 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(TA\equiv A)\neq1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $tx+x\neq1$. Stąd i z definicji $+$ w An_2 wnosimy, że $tx+x=0$. Stąd i z definicji $+$ w An_2 otrzymujemy (1) $tx\dot{-}x=0$, lub $x\dot{-}tx=0$. Załóżmy najpierw, że zachodzi pierwszy ze składników tej alternatywy. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (2) $tx=1$ i (3) $x\neq1$. Z (3) i 10. definicji An_2 wnosimy, że $tx=0$. Stąd i z (2) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_2. Załóżmy teraz, że zachodzi drugi ze składników alternatywy (1). Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (4) $x=1$ i (5) $tx\neq1$. Z (4) i 10. definicji An_2 wnosimy, że $tx=1$, co przeczy (5).

Załóżmy, że A17 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(FA\equiv\sim A)\neq1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $fx+x'\neq1$. Stąd i z definicji $+$ w An_2 wynika, że $fx+x'=0$. Stąd i z definicji $+$ w An_2 otrzymujemy (1) $fx\dot{-}x'=0$, lub $x'\dot{-}fx=0$. Załóżmy najpierw, że zachodzi pierwszy ze składników tej alternatywy. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (2) $fx=1$ i (3) $x'\neq1$. Z (3) i 11. definicji An_2 wnosimy, że $fx=0$. Stąd i z (2) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_2.

Załóżmy teraz, że zachodzi drugi ze składników alternatywy (1). Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (4) $x'=1$ i (5) $fx\neq1$. Z (4) i 11. definicji An_2 wynika, że $fx=1$, co przeczy (5).

Załóżmy, że A18 nie jest n_2-tautologią. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(\sim NA\equiv TA\vee FA)\neq1$. Niech An_2' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_2, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_2 w An_2 wynika, że $nx'+txUfx\neq1$. Stąd i z definicji $+$ w An_2 wynika, że $nx'+txUfx=0$. Stąd i z definicji $+$ w An_2 otrzymujemy $nx'\dot{-}txUfx=0$, lub $txUfx\dot{-}nx'=0$. Załóżmy najpierw, że $nx'\dot{-}txUfx=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (1) $nx'=1$ oraz (2) $txUfx=0$. Z (2) i 5. definicji An_2 otrzymujemy (3) $tx=0$ i $fx\neq1$ lub $tx\neq1$ i $fx=0$. Z (3), 10. i 11. definicji An_2 otrzymujemy (4) $tx=0$ i $fx=0$. Z (4), 10. i 11. definicji An_2 otrzymujemy (5) $x\neq1$ i $x'\neq1$. Stąd i z 12. definicji

An_2 wnosimy, że nx=1. Stąd wnioskujemy, że nx'=1'. Stąd i z 3. definicji An_2 wnosimy, że nx'=0. Stąd i z (1) wnosimy że 1=0, co przeczy 1. definicji An_2.

Załóżmy teraz, że $txUfx \dot{-} nx'=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_2 otrzymujemy (6) txUfx=1 oraz (7) nx'=0. Z (6) i 6. definicji An_2 otrzymujemy (8) tx=1 lub fx=1. Załóżmy, że tx=1. Stąd i z definicji t w An_2 wnosimy, że x=1. Stąd i z 12. definicji An_2 wnosimy, że nx=0. Stąd wnosimy, że nx'=0'. Stąd i z 2. definicji An_2 wnosimy, że nx'=1. Stąd i z (7) wnosimy, że 1=0, co przeczy 1. definicji An_2.

Załóżmy w końcu, że fx=1. Stąd i z definicji f w An_2 wnosimy, że x'=1. Stąd i z definicji n w An_2 wnosimy, że nx=0. Stąd wnosimy, że nx'=0'. Stąd i z 2. definicji An_2 wnosimy, że nx'=1. Stąd i z (7) wnosimy, że 1=0, co przeczy 1. definicji An_2.

14. Przystosowanie aksjomatyki nrz n_3.

Formuła $A \in jn_3$ jest spełniona w An_3 przez interpretację jn_3 w An_3 h ztw h(A)=1.

Formuła $A \in jn_3$ jest spełniona w An_3 ztw dla każdej interpretacji jn_3 w An_3 h, h(A)=1.

Formuła $A \in jn_3$ jest tautologią nrz n_3 (lub krótko: n_3-tautologią) ztw A jest spełniona w dowolnej An_3.

Wykażemy teraz, że każdy z aksjomatów nrz n_3 jest n_3-tautologią.

Załóżmy, że A1 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(A \to (B \to A)) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że h'(A)=x i h'(B)=y. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $x \dot{-} (y \dot{-} x) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wnosimy, że $x \dot{-} (y \dot{-} x)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x \neq 0$ i (2) $y \dot{-} x=0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_3 wnosimy, że x=0, co przeczy (1).

Załóżmy, że A2 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że h'(A)=x, h'(B)=y, h'(C)=z. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $(x \dot{-} (y \dot{-} z)) \dot{-} ((x \dot{-} y) \dot{-} (x \dot{-} z)) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wnosimy, że $(x \dot{-} (y \dot{-} z)) \dot{-} ((x \dot{-} y) \dot{-} (x \dot{-} z))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x \dot{-} (y \dot{-} z) \neq 0$, (2) $x \dot{-} y \neq 0$ i (3) $x \dot{-} z=0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (4) $x \dot{-} y=1$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (5) $x \neq 0$ i (6) z=0. Z (4) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (7) x=0 lub $y \neq 0$. Z (5) i (7) otrzymujemy (8) $y \neq 0$. Z (6), (8) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (9) $y \dot{-} z=0$. Z (5), (9) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (10) $x \dot{-} (y \dot{-} z)=0$, co przeczy (1).

Załóżmy, że A3 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(\sim\sim A \to A) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że h'(A)=x. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $x'' \dot{-} x \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $x'' \dot{-} x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x'' \neq 0$ i (2) x=0. Z (2) i 4. definicji An_3 otrzymujemy, że x''=0, co przeczy (1).

Analogicznie jak aksjomatu A3 dowodzimy, że pewnik A4 jest n_3-tautologią.

Załóżmy, że A5 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i takie w niej wartościowanie jn_3 h, że $h(A \rightarrow (\sim A \rightarrow MA)) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $x \dot{-} (x' \dot{-} mx) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $x \dot{-} (x' \dot{-} mx)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x \neq 0$ i (2) $x' \dot{-} mx=0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (3) $x' \neq 0$ i (4) $mx=0$. Z (1), (3) i definicji m w An_3 otrzymujemy, że $mx=1$. Stąd i z (4) wnosimy, że $1=0$, co przeczy definicji An_3.

Załóżmy, że A6 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)) \neq 1$ i A jest formułą prefiksową języka jn_3. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$ i $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że (1) $x \dot{-} (x' \dot{-} B) \neq 1$ i (2) $x=0$ lub $x=1$. Z (1) i definicji $\dot{-}$ w An_3 wnosimy, że $x \dot{-} (x' \dot{-} y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (3) $x \neq 0$ i (4) $x' \dot{-} y=0$. Z (2) i (3) otrzymujemy (5) $x=1$. Z (4) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (6) $x' \neq 0$. Z (5) otrzymujemy (7) $x'=1'$. Z tej ostatniej równości i 3. definicji An_3 wnosimy, że $x'=0$, co przeczy (6).

Załóżmy, że A7 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h((A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)) \neq 1$ i B jest formułą prefiksową języka jn_3. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$ i $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 otrzymujemy (1) $(x \dot{-} y) \dot{-} (y' \dot{-} x') \neq 1$ i (2) $y=0$ lub $y=1$. Z (1) i definicji $\dot{-}$ w An_3 wnosimy, że $(x \dot{-} y) \dot{-} (y' \dot{-} x')=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (3) $x \dot{-} y \neq 0$ i (4) $y' \dot{-} x'=0$. Z (4) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (5) $y' \neq 0$ i (6) $x'=0$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_3 wnosimy, że $x \dot{-} y=1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wnosimy, że $x=0$ lub $y \neq 0$. Załóżmy, że $x=0$. Stąd wnioskujemy, że $x'=0'$. Stąd i z 2. definicji An_3 wnosimy, że $x'=1$. Stąd i z (6) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_3.

Załóżmy teraz, że $y \neq 0$. Stąd i z (2) wnioskujemy, że $y=1$. Stąd wnosimy, że $y'=1'$. Stąd i 3. definicji An_3 wnioskujemy, że $y'=0$, co przeczy (5).

Załóżmy, że A8 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(A \vee \sim A)=1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $x \cup x' \neq 1$ co przeczy 5. definicji An_3.

Załóżmy, że A9 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(A \wedge B \rightarrow A)=1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$ i $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wnosimy, że $x \cap y \dot{-} x \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wnioskujemy, że $x \cap y \dot{-} x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x \cap y \neq 0$ i (2) $x=0$. Z (2) i 7. definicji An_3 wnosimy, że $x \cap y=0$, co przeczy (1).

Analogicznie jak aksjomatu A9 dowodzimy, że pewnik A10 jest n_3-tautologią.

Załóżmy, że A11 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h((A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B\wedge C)))\neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$, $h'(C)=z$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $(x\dot{-}y)\dot{-}((x\dot{-}z)\dot{-}(x\dot{-}y\cap z))\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x\dot{-}y\neq 0$, (2) $x\dot{-}z\neq 0$ i (3) $x\dot{-}y\cap z=0$. Z (1) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (4) $x\dot{-}y=1$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (5) $x\dot{-}z=1$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (6) $x\neq 0$ i (7) $y\cap x=0$. Z (4) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (8) $x=0$ lub $y\neq 0$. Z (6) i (8) otrzymujemy (9) $y\neq 0$. Z (5) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (10) $x=0$ lub $z\neq 0$. Z (6) i (10) otrzymujemy (11) $z\neq 0$. Z (9), (11) i 7. definicji An_3 wnosimy, że $y\cap z\neq 0$, co przeczy (7).

Załóżmy, że A12 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(A\rightarrow A\vee B)\neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą a h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $x\dot{-}(x\cup y)\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $x\dot{-}x\cup y=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x\neq 0$, (2) $x\cup y=0$. Z (1) i 6. definicji An_3 wnosimy, że $x\cup y\neq 0$, co przeczy (2).

Analogicznie jak aksjomatu A12 dowodzimy, że pewnik A13 jest n_3-tautologią.

Załóżmy, że A14 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h((A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))\neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$, $h'(C)=z$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $(x\dot{-}z)\dot{-}((y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z))\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $(x\dot{-}z)\dot{-}((y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x\dot{-}z=1$, (2) $y\dot{-}z=1$, (3) $x\cup y\dot{-}z=0$. Z (1) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (4) $x=0$ lub $z=0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (5) $y=0$ lub $z\neq 0$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (6) $x\cup y\neq 0$ i (7) $z=0$. Z (4) i (7) otrzymujemy (8) $x=0$. Z (5) i (7) otrzymujemy (9) $y=0$. Z (8), (9) i 6. definicji An_3 wynika, że $x\cup y=0$, co przeczy (6).

Załóżmy, że A15 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h((A\equiv B)\rightarrow(A\rightarrow B))\neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wnosimy, że $(x\div y)\dot{-}(x\dot{-}y)\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $(x\div y)\dot{-}(x\dot{-}y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $x\div y=1$, (2) $x\dot{-}y=0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $x\div y=0$. Stąd i z (1) wynika, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_3.

Analogicznie jak aksjomatu A15 dowodzimy, że pewnik A16 jest n_3-tautologią.

Załóżmy, że A17 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h((A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow(A\equiv B)))\neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $(x\dot{-}y)\dot{-}((y\dot{-}x)\dot{-}(x\div y))\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $(x\dot{-}y)\dot{-}((y\dot{-}x)\dot{-}(x\div y))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$

w An_3 otrzymujemy (1) $x \dot{-} y=1$, (2) $y \dot{-} x=1$ i (3) $x+y=0$. Z (1), (2) i definicji + w An_3 wnioskujemy, że $x+y=1$. Stąd i z (3) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_3.

Załóżmy, że A18 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(TA \equiv A) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $tx+x \neq 1$. Stąd i z definicji + w An_3 wnosimy, że $tx+x=0$. Stąd i z definicji + w An_3 wynika, że $tx \dot{-} x=0$ lub $x \dot{-} tx=0$.

Załóżmy najpierw, że $tx \dot{-} x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $tx \neq 0$, (2) $x=0$. Z (2) i definicji t w An_3 wynika, że $tx=0$, co przeczy (1).

Załóżmy teraz, że $x \dot{-} tx=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (3) $x \neq 0$ i (4) $tx=0$. Z (3) i definicji t w An_3 wynika, że $tx=1$. Stąd i z (4) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_3.

Załóżmy, że A19 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(FA \equiv \sim A) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $fx+x' \neq 1$. Stąd i z definicji + w An_3 wynika, że $fx+x'=0$. Stąd i z definicji + w An_3 otrzymujemy $fx \dot{-} x'=0$ lub $x' \dot{-} fx=0$. Załóżmy najpierw, że $fx \dot{-} x'=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $fx \neq 0$ i (2) $x'=0$. Z (2) otrzymujemy (3) $x''=0'$. Z (3) i 2. definicji An_3 otrzymujemy (4) $x=1$. Z (4) i definicji f w An_3 wynika, że $fx=0$, co przeczy (1).

Załóżmy teraz, że $x' \dot{-} fx=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (5) $x' \neq 0$ i (6) $fx=0$. Z (6) i definicji f w An_3 wynika, że $x=0$. Stąd, z (5) i definicji m w An_3 wynika, że $mx=1$. Stąd i z 13. definicji An_3 wynika, $fx=1$. Stąd i z (6) wnosimy, że $1=0$, co przeczy 1. definicji An_3.

Załóżmy, że A20 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(FA \to (A \to B)) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą i h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$, a $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $fx \dot{-} (x \dot{-} y) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $fx \dot{-} (x \dot{-} y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $fx \neq 0$ i (2) $x \dot{-} y=0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (3) $x \neq 0$. Z (3) i definicji f w An_3 otrzymujemy, że $fx=0$, co przeczy (1).

Załóżmy, że A21 nie jest n_3-tautologią. Stąd i z definicji n_3-tautologii wynika, że istnieją taka An_3 i taka w niej interpretacja jn_3 h, że $h(MA \to A \wedge \sim A) \neq 1$. Niech An_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją jn_3, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_3 w An_3 wynika, że $mx \dot{-} x \cap x' \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 wynika, że $mx \dot{-} x \cap x'=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (1) $mx \neq 0$, (2) $x \cap x'=0$. Z (2) i 7. definicji An_3 wnioskujemy, że $x=0$ lub $x'=0$. Stąd i z definicji m w An_3 wnosimy, że $mx=0$, co przeczy (1).

15. Przystosowanie aksjomatyki nrz n_4.

Formuła $A \in jn_4$ jest spełniona w An_4 przez interpretację jn_4 w An_4 h ztw $h(A)=1$.

Formuła $A \in jn_4$ jest spełniona w An_4 ztw dla każdej interpretacji jn_4 w An_4 h, $h(A)=1$.

Formuła $A \in jn_4$ jest tautologią nrz n_4 (lub krótko: n_4-tautologią) ztw A jest spełniona w dowolnej An_4.

Wykażemy teraz, że każdy z aksjomatów nrz n_4 jest n_4-tautologią.

Załóżmy, że A1 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(A\to(B\to A))\neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą a h′ taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$ i $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $x\dot{-}(y\dot{-}x)\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $x\dot{-}(y\dot{-}x)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x>0$ i (2) $y\dot{-}x\leq 0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $y\dot{-}x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $x\leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $x>0$, co przeczy (1).

Załóżmy, że A2 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))\neq 1$. Niech An_4' będzie taką algebrą i h′ taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$, $h'(C)=z$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $(x\dot{-}(y\dot{-}z))\dot{-}((x\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z))\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $(x\dot{-}(y\dot{-}z))\dot{-}((x\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x\dot{-}(y\dot{-}z)>0$ i (2) $(x\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z)\leq 0$. Z definicji $\dot{-}$ w An_4 i (1) lub (2) otrzymujemy odpowiednio: (3) $x\dot{-}(y\dot{-}z)=1$, (4) $(x\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z)=0$. Z (4) i definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (5) $x\dot{-}y>0$ i (6) $x\dot{-}z\leq 0$. Z definicji $\dot{-}$ w An_4 i (5) lub (6) otrzymujemy odpowiednio: (7) $x\dot{-}y=1$, (8) $x\dot{-}z=0$. Z (8) i definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (9) $x>0$ i (10) $z\leq 0$. Z (7) i definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (11) $x\leq 0$ lub $y>0$. Z (9) i (11) otrzymujemy (12) $y>0$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_3 otrzymujemy (13) $x\leq 0$ lub $y\dot{-}z>0$. Z(9) i (13) wnosimy, że $y\dot{-}z>0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$w An_4 wnosimy, że $y\dot{-}z=1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (14) $y\leq 0$ lub $z>0$. Z (12) i (14) otrzymujemy (15) $z>0$. Z (10) i 5. definicji An_4 wnosimy, że nieprawda, że $z>0$, co przeczy (15).

Załóżmy, że A3 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(\sim\sim A\to A)\neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h′ taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $x''\dot{-}x\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $x''\dot{-}x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x''>0$ i (2) $x\leq 0$. Z (1) i 3. definicji An_4 otrzymujemy (3) $x>0$. Z (2) i 5. definicji An_4 wnosimy, że nieprawda, że $x>0$, co przeczy (3).

Analogicznie jak aksjomatu A3 dowodzimy, że pewnik A4 jest n_4-tautologią.

Załóżmy, że A5 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i takie w niej wartościowanie jn_4 h, że $h(A\to(\sim A\to MA))\neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h′ taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $x\dot{-}(x'\dot{-}mx)\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $x\dot{-}(x'\dot{-}mx)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x>0$ i (2) $x'\dot{-}mx\leq 0$. Z (2) i definicji $\dot{-}$w An_4 wnosimy, że $x'\dot{-}mx=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (3) $x'>0$ i (4) $mx\leq 0$. Z (4) i definicji m w An_4 otrzymujemy (5)

$mx=0$. Z (1), (3) i definicji m w An_4 wnosimy, że $mx=1$. Stąd i z (5) wnosimy, że $1=0$, co przeczy twierdzeniu T.

Załóżmy, że A6 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)) \neq 1$ i A jest formułą prefiksową jn_4. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$ i $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wnosimy, że (1) $x=0$ lub $x=1$, (2) $x \dot{-} (x' \dot{-} y) \neq 1$. Z (2) i definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $x \dot{-} (x' \dot{-} y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (3) $x>0$ i (4) $x' \dot{-} y \leq 0$. Z (4) i definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $x' \dot{-} y=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (5) $x'>0$. Stąd i 6. definicji An_4 otrzymujemy (6) $x' \neq 0$. Z (3) i 6. definicji An_4 otrzymujemy (7) $x \neq 0$. Stąd i z (1) otrzymujemy, że $x=1$. Stąd wnosimy, że $x'=1'$. Stąd i z 2. definicji An_4 wnosimy, że $x'=0$, co przeczy (6).

Załóżmy, że A7 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h((A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)) \neq 1$ oraz A i B są formułami prefiksowymi języka jn_4. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$ i $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 otrzymujemy (1) $x=1$ lub $x=0$, (2) $y=1$ lub $y=0$, (3) $(x \dot{-} y) \dot{-} (y' \dot{-} x') \neq 1$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $(x \dot{-} y) \dot{-} (y' \dot{-} x')=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (4) $x \dot{-} y>0$ i (5) $y' \dot{-} x' \leq 0$. Z (4) i 6. definicji An_4 otrzymujemy (6) $x \dot{-} y \neq 0$. Z (5) i 5. definicji An_4 wnosimy, że nieprawda, że $y' \dot{-} x'>0$. Stąd, z definicji $\dot{-}$ w An_4 i 4. definicji An_4 otrzymujemy (7) $y' \dot{-} x'=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (8) $y'>0$ i (9) $x' \leq 0$. Z (8) wnosimy, że $y''>0'$. Stąd i z 1. oraz 3. definicji An_4 wnosimy, że $y>1$. Stąd i z 6. definicji An_4 wnosimy, że $y \neq 1$. Stąd i z (2) otrzymujemy (10) $y=0$. Z (9) i 5. definicji An_4 wnosimy, że nieprawda, że $x'>0$. Stąd wnioskujemy, że $x''>0'$. Stąd i z 1. oraz 3. definicji An_4 wnosimy, że $x>1$. Stąd i z 6. definicji An_4 wnioskujemy, że $x \neq 1$. Stąd i z (1) otrzymujemy, że $x=0$. Stąd, z (10), 1. oraz 4. definicji An_4 oraz definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $y' \dot{-} x'=1$. Stąd i z (7) wynika, że $1=0$, co przeczy twierdzeniu T.

Załóżmy, że A8 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(A \wedge B \rightarrow A) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $x \cap y \dot{-} x \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $x \cap y \dot{-} x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x \cap y>0$ i (2) $x \leq 0$. Z (1) i 7. definicji An_4 otrzymujemy (3) $x>0$. Z (2) i 5. definicji An_4 wnosimy, że nieprawda, że $x>0$, co przeczy (3).

Tautologiczność aksjomatu A9 dowodzimy analogicznie jak dowodziliśmy tautologiczności pewnika A8.

Załóżmy, że aksjomat A10 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$, $h'(C)=z$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $(x \dot{-} y) \dot{-} ((x \dot{-} y) \dot{-} ((x \dot{-} z) \dot{-} (x \dot{-} y \cap z))) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1)

$x\dot{-}y>0$, (2) $(x\dot{-}z)\dot{-}(x\dot{-}y\cap z)\leq 0$. Z (1), (2), 6. i 5. definicji An_4 otrzymujemy odpowiednio (3) $x\dot{-}y\neq 0$, (4) nieprawda, że $(x\dot{-}z)\dot{-}(x\dot{-}y\cap z)>0$. Z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (5) $x\dot{-}y=1$. Z (4), 9. i 4. definicji An_4 otrzymujemy, że $(x\dot{-}z)\dot{-}(x\dot{-}y\cap z)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (6) $x\dot{-}z>0$ i (7) $x\dot{-}y\cap z\leq 0$. Z (6), (7), 6. i 5. definicji An_4 otrzymujemy odpowiednio: (8) $x\dot{-}z\neq 0$, (9) nieprawda, że $x\dot{-}y\cap z>0$. Z (8) i definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (10) $x\dot{-}z=1$. Z (9), 9. i 4. definicji An_4 otrzymujemy, że $x\dot{-}y\cap z=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (11) $x>0$ i (12) $y\cap z\leq 0$. Z (11) i 5. definicji An_4 otrzymujemy (13) nieprawda, że $x\leq 0$. Stąd, z (5) i definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że (14) $y>0$. Z (13), (10) i definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $z>0$. Stąd, z (14) i 7. definicji An_4 wynika, że $y\cap z>0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $y\cap z\leq 0$, co przeczy (12).

Załóżmy, że A11 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(A\rightarrow A\vee B)\neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $x\dot{-}x\cup y\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $x\dot{-}x\cup y=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x>0$ i (2) $x\cup y\leq 0$. Z (2) i 8. definicji An_4 wynika, że $x\leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $x>0$, co przeczy (1).

Dowód tautologiczności aksjomatu A12 przebiega analogicznie do dowodu tautologiczności pewnika A11.

Załóżmy, że A13 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h((A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A \vee B)\rightarrow C)))\neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$, $h'(C)=z$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $(x\dot{-}z)\dot{-}((y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x\dot{-}z>0$, (2) $(y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z)\leq 0$. Z (1), 6. i 9. definicji An_4 otrzymujemy (3) $x\dot{-}z=1$. Z (2) i 5. definicji An_4 otrzymujemy, że nieprawda, że $(y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z)>0$. Stąd i z 9. oraz 4. definicji An_4 wnosimy, że $(y\dot{-}z)\dot{-}(x\cup y\dot{-}z)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (4) $y\dot{-}z>0$ i (5) $x\cup y=z\leq 0$. Z (4), 6. i 9. definicji An_4 otrzymujemy (6) $y\dot{-}z=1$. Z (5) i 5. definicji An_4 otrzymujemy, że nieprawda, że $x\cup y\dot{-}z>0$. Stąd i z 9. oraz 4. definicji An_4 wnosimy, że $x\cup y\dot{-}z=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (7) $x\cup y>0$ i (8) $z\leq 0$. Z (8) i z 5. definicji An_4 otrzymujemy (9) nieprawda, że $z>0$. Stąd, z (3) i definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (10) $x\leq 0$. Z (9), (6) i definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $y\leq 0$. Stąd, z (10) i 8. definicji An_4 wynika, że $x\cup y\leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $x\cup y>0$, co przeczy (7).

Załóżmy, że A14 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h((A\equiv B)\rightarrow(A\rightarrow B))\neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $(x+y)\dot{-}(x\dot{-}y)\neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $(x+y)\dot{-}(x\dot{-}y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x+y>0$ i (2) $x\dot{-}y\leq 0$. Z (1) i 6. i 9. definicji An_4 otrzymujemy (3) $x+y=1$. Z (2) i 5. definicji An_4 wnioskujemy, że nieprawda, że $x\dot{-}y>0$. Stąd, z 9. i 4. definicji An_4

wnosimy, że $x \dot{-} y=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wnosimy, że $x+y=0$. Stąd i z (3) wnosimy, że $1=0$, co przeczy twierdzeniu T.

Dowód tautologiczności A15 przebiega analogicznie do dowodu tautologiczności A14.

Załóżmy, że A16 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h((A \to B) \to ((B \to A) \to (A \equiv B))) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$, $h'(B)=y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $(x \dot{-} y) \dot{-} ((y \dot{-} x) \dot{-} (x+y)) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $(x \dot{-} y) \dot{-} ((y \dot{-} x) \dot{-} (x+y))=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x \dot{-} y>1$, (2) $(y \dot{-} x) \dot{-} (x+y) \leq 0$. Z (1), 6. i 9. definicji An_4 otrzymujemy (3) $x \dot{-} y=1$. Z (2) i 5. definicji An_4 wnosimy, że nieprawda, że $(y \dot{-} x) \dot{-} (x \dot{-} y)>0$. Stąd i z 9. oraz 4. definicji An_4 wnosimy, że $(y \dot{-} x) \dot{-} (x+y)=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (4) $y \dot{-} x>0$ i (5) $x+y \leq 0$. Z (4), 6. i 9. definicji An_4 otrzymujemy (6) $y \dot{-} x=1$. Z (5) i 5. definicji wnosimy, że nieprawda, że $x+y>0$. Stąd, z 9. i 4. definicji An_4 otrzymujemy (7) $x+y=0$. Z (3), (6) i definicji + w An_4 wnosimy, że $x+y=1$. Stąd i z (7) wnosimy, że $1=0$, co przeczy twierdzeniu T.

Załóżmy, że A17 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(TA \equiv A) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $tx+x \neq 1$. Stąd i z definicji + w An_4 wynika, że $tx+x=0$. Stąd i z definicji + w An_4 wynika, że $x \dot{-} tx=0$ lub $tx \dot{-} x=0$. Załóżmy najpierw, że $x \dot{-} tx=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika (1) $x>0$ i (2) $tx \leq 0$. Z (1) i definicji t w An_4 wynika (3) $tx=1$. Z (3) i (2) wynika, że $1 \leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $1>0$, co przeczy 4. definicji An_4.

Teraz załóżmy, że $tx \dot{-} x=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (4) $tx>0$ i (5) $x \leq 0$. Z (4) i z 6. definicji An_4 wynika, że $tx \neq 0$. Stąd i z definicji t w An_4 wynika, że $tx=1$. Stąd i z definicji t w An_4 wynika, że $x>0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $x \leq 0$, co przeczy (5).

Załóżmy, że A18 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(FA \equiv {\sim}A) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $fx+x' \neq 1$. Stąd i z definicji + w An_4 wynika, że $fx+x'=0$. Stąd i z definicji + w An_4 otrzymujemy $fx \dot{-} x'=0$ lub $x' \dot{-} fx=0$. Załóżmy najpierw, że $x' \dot{-} fx=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $x'>0$ i (2) $fx \leq 0$. Z (1) i definicji f w An_4 wynika, że $fx=1$. Stąd i z (2) wnosimy, że $1 \leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wnosimy, że nieprawda jest,' że $1>0$, co przeczy 4. definicji An_4.

Załóżmy teraz, że $fx \dot{-} x'=0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (3) $fx>0$ i (4) $x' \leq 0$. Z (3), 6. i 12. definicji An_4 wynika, że $fx=1$. Stąd i z definicji f w An_4 wynika, że $x>0$. Stąd i 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $x' \leq 0$, co przeczy (4).

Załóżmy, że A19 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(MA \to (A \wedge {\sim}A)) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A)=x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $mx \dot{-} (x \cap x') \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $mx \dot{-} x \cap x' = 0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $mx > 0$ i (2) $x \cap x' \leq 0$. Z (1), 6. i 4. definicji An_4 otrzymujemy (3) $mx = 1$. Z (3) i definicji m w An_4 wynika (4) $x > 0$ i (5) $x' > 0$. Z (4), (5) i 7. definicji An_4 wynika, że $x \cap x' > 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $x \cap x' \leq 0$ co przeczy (2).

Załóżmy, że A20 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(\sim NA \equiv TA \vee FA) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A) = x$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $nx' \dot{+} txUfx \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{+}$ w An_4 wynika, że $nx' \dot{+} txUfx = 0$. Stąd i z definicji $\dot{+}$ w An_4 wnosimy, że $nx' \dot{-} txUfx = 0$ lub $txUfx \dot{-} nx' = 0$. Załóżmy najpierw, że $nx' \dot{-} txUfx = 0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $mx' > 0$ i (2) $txUfx \leq 0$. Z (2) i 8. definicji An_4 otrzymujemy (3) $tx \leq 0$ i (4) $fx \leq 0$. Z (3) i 5. definicji An_4 wynika (5) nieprawda, że $tx > 0$. Z (4) i 5. definicji An_4 wynika (6) nieprawda, że $fx > 0$. Z (5), 11. i 4. definicji An_4 wynika (7) $tx = 0$. Z (6), 12. i 4. definicji An_4 wynika (8) $fx = 0$. Z (7) i definicji t w An_4 wynika (9) $x \leq 0$. Z (8) i definicji f w An_4 otrzymujemy (10) $x' \leq 0$. Z (9), (10) i definicji n w An_4 wynika, że $nx = 1$. Stąd $nx' = 1'$. Stąd i z 2. definicji An_4 wynika, że $nx' = 0$. Stąd i z 6. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $nx' > 0$, co przeczy (1).

Załóżmy teraz, że $txUfx \dot{-} nx' = 0$ Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (11) $txUfx > 0$ i (12) $nx' \leq 0$. Z (11) i 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $txUfx \leq 0$. Stąd i z 8. definicji An_4 wynika (13) nieprawda, że $tx \leq 0$ lub nieprawda, że $fx \leq 0$. Załóżmy najpierw, że nieprawda, że $tx \leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że $tx > 0$. Stąd, z 6. i 11. definicji An_4 wynika, że $tx = 1$. Stąd i z definicji t w An_4 wynika, że $x > 0$. Stąd i z definicji n w An_4 wynika, że $nx = 0$. Stąd wynika, że $nx' = 0'$. Stąd i z 1. definicji An_4 wynika, że $nx' = 1$. Stąd i z (12) wynika, że $1 \leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $1 > 0$, co przeczy 4. definicji An_4.

Załóżmy teraz, że nieprawda, że $fx \leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że $fx > 0$. Stąd, z 6. i 12. definicji An_4 wynika, że $fx = 1$. Stąd i z definicji f w An_4 wynika, że $x' > 0$. Stąd i z definicji n w An_4 wynika, że $nx = 0$. Stąd wynika, że $nx' = 0'$. Stąd wynika, że $nx' = 1$. Stąd i z (12) wynika, że $1 \leq 0$. Stąd i z 5. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $1 > 0$, co przeczy 4. definicji An_4.

Załóżmy, że A21 nie jest n_4-tautologią. Stąd i z definicji n_4-tautologii wynika, że istnieją taka An_4 i taka w niej interpretacja jn_4 h, że $h(\sim TA \rightarrow (A \rightarrow B)) \neq 1$. Niech An_4' będzie taką strukturą i h' taką w niej interpretacją jn_4, że $h'(A) = x$, $h'(B) = y$. Stąd i z definicji interpretacji jn_4 w An_4 wynika, że $tx' \dot{-} (x \dot{-} y) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $tx' \dot{-} (x \dot{-} y) = 0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 otrzymujemy (1) $tx' > 0$ i (2) $x \dot{-} y \leq 0$. Z (2) i 5. definicji An_4 otrzymujemy, że nieprawda, że $x \dot{-} y > 0$. Stąd, z 9. i 4. definicji An_4 wynika, że $x \dot{-} y = 0$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w An_4 wynika, że $x > 0$. Stąd i z definicji t w An_4 wynika, że $tx = 1$. Stąd wynika, że $tx' = 1'$. Stąd i z 2. definicji An_4 wynika, że $tx' = 0$. Stąd i z 6. definicji An_4 wynika, że nieprawda, że $tx' > 0$, co przeczy (1).

Oczywiste jest, że RO jest regułą niezawodną na gruncie krz, czy nrz n_1.

Łatwo także wykazać, że RO jest niezawodna także na gruncie nrz: n_2, n_3, n_4.

Pokażemy, że RO jest niezawodna na gruncie nrz n_2. Załóżmy, że (1) A jest n_2-tautologią i (2) A→B jest n_2-tautologią i — dla dowodu niewprost — że (3) B nie jest n_2-tautologią. Z (3) i definicji n_2-tautologii wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że (4) $h(B) \leq 1$. Z (1) i definicji n_2-tautologii wynika (5) $h(A)=1$. Z (2) i definicji n_2-tautologii wynika (6) $h(A) \dot{-} h(B)=1$. Z (4), (5) i definicji $\dot{-}$ w An_2 wynika, że $h(A) \dot{-} h(B)=0$. Stąd i z (6) wynika, że 1=0, co przeczy 1. definicji An_2 i kończy dowód twierdzenia, że RO jest regułą niezawodną na gruncie nrz n_2. Analogicznie można udowodnić, że RO jest regułą niezawodną na gruncie nrz n_3 i n_4. Możemy zatem przyjąć, że wykazaliśmy iż każda teza krz (nrz n_1, n_2, n_3, n_4) jest tautologią krz (nrz n_1, n_2, n_3, n_4).

16. Pełność nrz.

Wykażemy teraz, że każda n_2-tautologia jest tezą n_2. W tym celu najpierw z jn_2 tworzymy algebrę formuł jn_2 traktując każdy z n-argumentowych spójników tego języka jako n-argumentową operację, przyjmują dodatkowo, że 1=A ztw A jest tezą n_2 oraz 0=~TA ztw A jest tezą n_2. Otrzymaną w ten sposób algebrę oznaczamy symbolem A_2. Zatem $A_2=(jn_2, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \rightarrow, \equiv, T, F, N)$.

Załóżmy, że (1) An_2' jest algebrą podaną jako przykład An_2, (2) h jest homomorfizmem A_2 na An_2', (3) ~ jest relacją określoną w zbiorze jn_2 zdefiniowaną następująco: A~B ztw h(A)=h(B), (4) $A_2|\sim$ jest algebrą ilorazową algebry A_2, tzn.

$A_2|\sim = (jn_2|\sim, \vee^*, \wedge^*, \sim^*, 0, 1, \rightarrow^*, \equiv^*, T^*, F^*, N^*)$, gdzie: $jn_2|\sim$ jest zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji ~ w zbiorze jn_2, (klasę abstrakcji wyznaczoną przez dowolny element $A \in jn_2$ oznaczać będziemy symbolem |A|) operacje zaś algebry $A_2|\sim$ są zdefiniowane następująco:

$|A| \vee^* |B| = |A \vee B|$,

$|A| \wedge^* |B| = |A \wedge B|$,

$\sim^* |A| = |\sim A|$,

$0 = |\sim TA|$ ztw A jest tezą n_2,

$1 = |A|$ ztw A jest tezą n_2,

$|A| \rightarrow^* |B| = |A \rightarrow B|$,

$|A| \equiv^* |B| = |A \equiv B|$,

$T^*|A| = |TA|$,

$F^*|A| = |FA|$,

$N^*|A| = |NA|$.

Przypominamy jedno z twierdzeń algebry ogólnej, z którego skorzystamy:

Jeśli h jest homomorfizmem algebry A na algebrę B, to relacja ~ określona w zbiorze A w następujący sposób:

a~b ztw h(a)=h(b) jest kongruencją algebry A oraz algebra ilorazowa $A|\sim$ jest izomorficzna z algebrą B. Funkcja: g: $A|\sim \rightarrow B$ określona wzorem g(|a|)=h(a), dla każdego $a \in A$ ustala izomorfizm między algebrami $A|\sim$ i B.

Z powyższego twierdzenia oraz (1), (2), (3) i (4) wynika (5) $A_2|\sim$ jest następnym przykładem An_2 i to takim, że algebry $A_2|\sim$ i An_2' są izomorficzne.

Załóżmy teraz, że (6) A jest n_2-tautologią i — dla dowodu niewprost — że (7) A nie jest tezą n_2. Z (7) i z określenia 1 w A_2 wynika (8) $1 \neq |A|$. Niech g będzie interpretacją jn_2 w $A_2|\sim$ taką, że $g(A)=|A|$. Stąd i z (8) wynika, że $g(A) \neq 1$. Stąd i z (5) wynika, że istnieją taka An_2 i taka w niej interpretacja jn_2 h, że $h(A) \neq 1$. Stąd i z definicji n_2-tautologii wynika, że A nie jest n_2-tautologią, co przeczy (6) i kończy dowód twierdzenia o pełności nrz n_2.

Analogicznie można wykazać pełność każdego z omawianych w tej pracy rachunków.

Przedstawiony powyżej sposób dowodzenia pełności rachunków logicznych pochodzi od A. Lindenbauma i A. Tarskiego.

Bibliografia

Kotarbiński, Tadeusz

1934 – „W sprawie pojęcia prawdy", *Przegląd Filozoficzny*, t. 37, s. 85-91. Suszko, Roman

1957 – „Logika formalna a niektóre zagadnienia teorii poznania", *Myśl Filozoficzna* nr 28, s. 27-56.

Żabski, Eugeniusz

1990 – „O nihilistycznym rachunku zdań", *Ruch Filozoficzny*, tom XLVII, nr 3-4, s. 240-246.

Żabski, Eugeniusz

1991 – „Słów kilka o nihilistycznym rachunku zdań", *Ruch Filozoficzny*, tom XLVIII, nr 1, s. 36-40.

Żabski, Eugeniusz

1993 – „O innej logice nihilistycznej", *Ruch Filozoficzny*, tom L, nr 3, s. 296-311.

Żabski, Eugeniusz

1993a – „O jeszcze innej logice nihilistycznej", *Ruch Filozoficzny*, tom L, nr 4, s. 415-429.