

Eugeniusz Żabski

Algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków kwantyfikatorów

Filozofia Nauki 2/1, 67-76

1994

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Eugeniusz Żabski

Algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków kwantyfikatorów

1. Uwagi wprowadzające.

W pracy [Żabski 1993c] przedstawiona jest algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków zdań. Niniejszy tekst nawiązuje do wymienionej pracy i jest jakby drugą jej częścią. Wyników tam uzyskanych tu nie powtarzamy, a jedynie z nich korzystamy.

Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów budowane są na wzór rachunku klasycznego. Przedstawimy 7 nihilistycznych rachunków kwantyfikatorów (w skrócie: nrk) opartych na omówionych w wymienionej już pracy nihilistycznych rachunkach zdań (w skrócie: nrz). Po bardzo pobieżnym syntaktycznym opisie każdego z nrk (obszerniejsze opisy znaleźć można w [Żabski 1993c], [Żabski 1993b], [Żabski 1992]) przejdziemy do podania semantycznej interpretacji kwantyfikatorów. Nrk budowane są metodą aksjomatyczną. Najważniejszym wynikiem pracy jest dowód, iż aksjomatyki każdego z nrk są adekwatne względem odpowiednich algebr. Aksjomatyka każdego z nrk składa się m.in. z następujących schematów aksjomatów:

$$\text{K1. } \bigwedge_a A \rightarrow A(a/b),$$

$$\text{K2. } A \rightarrow \bigvee_a A,$$

$$\text{K3. } \bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge_a B), \text{ o ile nie jest zmienną wolną w } A,$$

$$\text{K4. } \bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (\bigvee_a A \rightarrow B), \text{ o ile nie jest zmienną wolną w } B.$$

2. Nihilistyczny rachunek kwantyfikatorów N_1 .

Omówienie nrk N_1 — jak każdego zresztą rachunku — zaczynamy od krótkiego opisu języka tego rachunku. Język ten oznaczamy symbolem JN_1 .

Na alfabet JN_1 składają się:

1. stałe logiczne: a) $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \equiv$, b) \bigwedge, \bigvee ;
2. stałe specyficzne JN_1 : T, F, czytane odpowiednio: jest prawdziwe, że; jest fałszywe, że;
3. zmienne: a) indywidualowe: x, y, z , b) predykatywne: P, Q, R ;
4. nawiasy i przecinki.

Wyrażeniem JN_1 jest każdy skończony ciąg symboli alfabetu JN_1 .

Formułą JN_1 jest takie i tylko takie wyrażenie JN_1 , które spełnia następujące warunki:

1. Każde wyrażenie JN_1 zbudowane z n -argumentowego symbolu predykatywnego i następującego po nim, ujętego w nawiasy, n -elementowego ciągu, niekoniecznie różnych między sobą, zmiennych indywiduowych jest formułą JN_1 .

2. Jeśli A jest formułą JN_1 , to wyrażenia postaci: $\sim(A)$, $T(A)$, $F(A)$, są formułami JN_1 .

3. Jeśli A jest formułą JN_1 oraz a jest zmienną indywiduową, to wyrażenia postaci: $\bigwedge_a (A)$ i $\bigvee_a (A)$ są również formułami JN_1 .

4. Jeśli A i B są formułami JN_1 , to wyrażenia postaci: $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \equiv (B)$ są również formułami JN_1 .

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_1 są wszystkie te i tylko te formuły JN_1 , które podpadają pod:

1. schematy aksjomatów systemów aksjomatycznego nrz n_1 ,
2. schematy K1-K4.

Jako pierwotne reguły dowodzenia w N_1 przyjmujemy regułę odrywania (RO) i regułę generalizacji (RG) o schemacie:

$$\frac{A}{\bigwedge_a A}$$

3. Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów N_2, N_2' .

Język nrk N_2 i N_2' oznaczamy symbolem JN_2 .

Na alfabet JN_2 składają się:

1. stałe logiczne: a) $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \equiv$, b) \bigwedge, \bigvee ;
2. stałe specyficzne JN_2 : T, F, N, czytane odpowiednio: jest prawdziwe, że; jest fałszywe, że; jest nieokreślone;
3. zmienne: a) indywiduowe; x, y, z , b) predykatywne: P, Q, R ;
4. nawiasy i przecinki.

Definicja wyrażenia JN_2 i formuły JN_2 są analogiczne odpowiednio do definicji wyrażenia i formuły JN_1 z tym, że warunek 2. definicji formuły JN_2 jest następujący:

2. Jeśli A jest formułą JN_2 , to wyrażenia postaci: $\sim(A)$, $T(A)$, $F(A)$, $N(A)$ są formułami JN_2 .

Spośród wszystkich formuł JN_2 wyróżniam tzw. formuły prefiksowe JN_2 . Formułami prefiksowymi JN_2 nazywamy te i tylko te formuły JN_2 , które spełniają następujące warunki:

1. Jeśli A jest formułą JN_2 , to wyrażenia postaci: $T(A)$, $F(A)$, $N(A)$ są formułami prefiksowymi JN_2 .

2. Jeśli A jest formułą prefiksową JN_2 , to wyrażenie postaci $\sim(A)$ jest formułą prefiksową JN_2 .

3. Jeśli A i B są formułami prefiksowymi JN_2 , to wyrażenia postaci: $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \equiv (B)$ są formułami prefiksowymi JN_2 .

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_2 są wszystkie te i tylko te formuły JN_2 , które podpadają pod:

1. schematy K1-K4,

2. schematy aksjomatów systemu aksjomatycznego nrz n_2 , z tym, że w schemacie A6 zwrot: „o ile A jest formułą prefiksową j_{n_2} ” należy zastąpić wyrażeniem: „o ile A jest formułą prefiksową JN_2 ”.

Jako pierwotne reguły dowodzenia w N_2 przyjmujemy RO i RG.

Nad nrz n_2 można także nadbudować nrk N_2' . W nrk N_2' przyjmujemy inną definicję formuły prefiksowej JN_2 . Definicja formuły prefiksowej JN_2 w systemie N_2' od definicji formuły prefiksowej JN_2 w rachunku N_2 różni się tylko warunkiem 1. Warunek ten jest następujący:

1. Jeśli A jest formułą JN_2 , to wyrażenia postaci: $T(A)$, $F(A)$, $N(A)$, $\bigwedge_a (A)$, $\bigvee_a (A)$ są formułami prefiksowymi JN_2 .

Łatwo zauważyć, iż drobna ta modyfikacja definicji formuły prefiksowej JN_2 powoduje, że np. formuła JN_2 :

$$\left(\bigwedge_a P(x) \rightarrow P(x)\right) \rightarrow (\neg P(x) \rightarrow \neg \bigwedge_a P(x))$$

nie będąca tezą N_2 , staje się twierdzeniem N_2' . Oczywiście, że każda teza N_2 jest twierdzeniem N_2' . Zatem $N_2 \subseteq N_2'$. Zauważmy także, że formuła $JN_2: P(x) \vee \neg P(x)$ jest tezą N_1 lecz nie jest twierdzeniem ani N_2 , ani N_2' . Łatwo zauważyć, że:

1. $P(x) \rightarrow P(x)$ jest tezą każdego z rachunków: N_1 , N_2 , N_2' .

2. $\neg NP(x) \rightarrow (TP(x) \vee FP(x))$ jest tezą zarówno N_2 jak i N_2' lecz nie jest twierdzeniem N_1 . Konstatacja ta uzasadnia następujące stwierdzenie: nrk N_1 krzyżuje się zarówno z nrk N_2 jak i z nrk N_2' .

4. Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów N_3 i N_3' .

Język nrk N_3 oznaczam symbolem JN_3 .

Na alfabet JN_3 składają się:

1. stałe logiczne, jak w poprzednio omówionych językach;
2. stałe specyficzne JN_3 : T, F, N. Tę ostatnią stałą czytamy: jest niejednoznaczne, że;
3. zmienne: a) indywidualowe: x_1, y_1, z_1 , b) predykatywne: P, Q, R ;
4. nawiasy i przecinki.

Definicje wyrażenia JN_3 i formuły JN_3 są analogiczne odpowiednio do definicji wyrażenia i formuły JN_2 .

Spośród wszystkich formuł JN_3 wyróżniamy te, które nazywamy formułami prefiksowymi JN_3 . Są to formuły, które spełniają następujące warunki:

1. Jeśli A jest formułą JN_3 , to $T(A)$, $F(A)$, $M(A)$ są formułami prefiksowymi JN_3 .
2. Jeśli A jest formułą prefiksową JN_3 , to $\neg(A)$ jest formułą prefiksową JN_3 .
3. Jeśli A i B są formułami prefiksowymi JN_3 , to $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \equiv (B)$ są formułami prefiksowymi JN_3 .

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_3 są wszystkie te i tylko te formuły JN_3 , które podpadają pod:

1. schematy K1-K4,
2. schematy aksjomatów systemu aksjomatycznego nrz n_3 , z tym, że w schematach A6 i A7 zwrot: „o ile $A(B)$ jest formułą prefiksową j_{n_3} ” należy zastąpić wyrażeniem: „o ile $A(B)$ jest formułą prefiksową JN_3 ”.

Regułami pierwotnymi w N_3 są RO i RG.

Analogicznie jak nrk N_2' budujemy nrk N_3' . W rachunkach N_3' (w przeciwieństwie do systemu N_3) prefiksami są także kwantyfikatory. Modyfikacja ta sprawia, iż np. formuła $JN_3: \bigwedge x P(x) \rightarrow (\sim \bigwedge x P(x) \rightarrow Q(y))$ nie będąca tezą N_3 staje się twierdzeniem N_3' . Oczywiście jest, że każda teza N_3 jest twierdzeniem N_3' . Zatem $N_3 \subseteq N_3'$. Zauważmy, że:

1. $P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x))$ jest tezą każdego z rachunków: $N_1, N_2, N_2', N_3, N_3'$.
2. $(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x))$ jest tezą N_1 , lecz nie jest twierdzeniem ani N_3 , ani N_3' .
3. $\sim NP(x) \equiv TP(x) \vee FP(x)$ jest tezą zarówno N_2 jak i N_2' , lecz nie jest twierdzeniem ani N_3 , ani N_3' .
4. $MP(x) \rightarrow (P(x) \wedge \sim P(x))$ jest tezą zarówno N_3 jak i N_3' , lecz nie jest twierdzeniem żadnego z systemów: N_1, N_2, N_2' .

Konstatacja ta uzasadnia następujące stwierdzenie: każdy z rachunków N_1, N_2, N_2' krzyżuje się zarówno z systemem N_3 jak i z N_3' .

5. Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów N_4 i N_4' .

Język nrk N_4 oznaczam symbolem JN_4 . Alfabet JN_4 jest sumą logiczną alfabetów JN_2 i JN_3 . Definicje wyrażenia JN_4 i formuły JN_4 są analogiczne odpowiednio do definicji wyrażenia i formuły JN_3 . Analogicznie też definiujemy zbiór formuł prefiksowych JN_4 (prefiksami są spójniki: T, F, N, M).

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_4 są wszystkie te i tylko te formuły JN_4 , które podpadają pod:

1. schematy K1-K4,
2. schematy aksjomatów nrz n_4 , z tym, że w schematach A6 i A7 w zwrotach: „o ile A jest formułą prefiksową jn_4 ” („o ile A i B są formułami prefiksowymi jn_4 ”), „ jn_4 ” należy zastąpić przez „ JN_4 ”.

Pierwotnymi regułami w N_4 są RO i RG.

Analogicznie jak nrk N_2' i N_3' budujemy nrk N_4' . W rachunku N_4' prefiksami są oprócz spójników: T, F, N, M, także kwantyfikatory: \bigwedge_a , \bigvee_a . Modyfikacja ta sprawia, iż np. formuła $JN_4: \bigwedge x P(x) \rightarrow (\sim \bigwedge x P(x) \rightarrow Q(y))$ nie będąca tezą N_4 jest twierdzeniem N_4' . Oczywiście jest, że każda teza N_4 jest twierdzeniem N_4' . Zauważmy też, że:

1. $P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x))$ jest tezą każdego z rozważanych w tej pracy rachunków.
2. $P(x) \vee \sim P(x)$ jest tezą N_1 , lecz nie jest tezą ani N_4 , ani N_4' .
3. $(TP(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\sim Q(x) \rightarrow \sim TP(x))$ jest tezą N_2 jak i N_2' , lecz nie jest twierdzeniem ani N_3 , ani N_4' .
4. $(P(x) \rightarrow TQ(x)) \rightarrow (\sim TQ(x) \rightarrow \sim P(x))$ jest tezą N_3 jak i N_3' , lecz nie jest twierdzeniem ani N_4 , ani N_4' .

5. $MP(x) \rightarrow (P(x) \wedge \sim P(x))$ jest tezą zarówno N_4 jak i N_4' , lecz nie jest twierdzeniem żadnego z pozostałych omawianych w tej pracy rachunków. Z powyższego wynika więc, że każdy z rachunków $N_1, N_2, N_2', N_3, N_3'$ krzyżuje się zarówno z N_4 jak i z N_4' .

6. Algebry AN.

W [Żabski 1993c] omówione są algebry An_1, An_2, An_3 i An_4 . Niech An będzie symbolem dowolnej z tych algebr. Każdą z tych algebr będziemy przedłużać do algebr

odpowiednio: AN_1, AN_2, AN_3 i AN_4 . W tych ostatnich algebrach będziemy interpretować kwantyfikatory. Zmierzać więc będziemy do otrzymania z modeli dla nrz: n_1, n_2, n_3 i n_4 modeli dla nrk odpowiednio: $N_1, N_2, N_2', N_3, N_3', N_4$ i N_4' . Niech AN będzie symbolem dowolnej z algebr: AN_1, AN_2, AN_3 i AN_4 . Niech JN będzie symbolem dowolnego z języków: JN_1, JN_2, JN_3 i JN_4 . Niech h będzie funkcją ze zbioru JN w uniwersum odpowiedniej algebry An (a więc JN_1 w uniwersum algebry An_1, \dots, JN_4 w uniwersum algebry An_4). Dla dowolnej formuły $A \in JN$ przez $\|A, h\|_{An}$ oznaczamy będziemy wartość funkcji h formuły A w algebrze An . W wypadku, gdy algebra jest ustalona, symbol wskazujący na algebrę będziemy pomijać i wartość tę oznaczamy będziemy przez $\|A, h\|$. Zatem

$$(d1) \quad h(A) = \|A, h\|.$$

Algebrę An — jak już powiedzieliśmy — przedłużamy w algebrę AN tak, by dla dowolnej formuły $A \in JN$ i dowolnej funkcji ze zbioru JN w uniwersum algebry An wartość $\|A, h\|_{An}$ była określona i by kwantyfikatory miały zamierzony sens. W wypadku AN_1 i AN_2 żądamy, by dla dowolnej formuły $A \in JN_1$ ($A \in JN_2$) i dowolnych zmiennych indywidualnych a i b oraz dowolnej funkcji h ze zbioru JN_1 (ze zbioru JN_2) spełnione były następujące warunki:

$$(d2) \quad \|\bigwedge_a A, h\| = 1 \text{ wtw } \|A(a/b), h\| = 1,$$

$$(d3) \quad \|\bigvee_a A, h\| = 1 \text{ wtw } \|A, h\| = 1.$$

W wypadku AN_3 żądamy, by dla dowolnej formuły $A \in JN_3$ i dowolnej funkcji h ze zbioru JN_3 w An_3 i dowolnych zmiennych indywidualnych a i b spełnione były następujące warunki:

$$(d4) \quad \|\bigwedge_a A, h\| \neq 0 \text{ wtw } \|A(a/b), h\| \neq 0,$$

$$(d5) \quad \|\bigvee_a A, h\| \neq 0 \text{ wtw } \|A, h\| \neq 0.$$

W wypadku zaś AN_4 żądamy, by dla dowolnej formuły $A \in JN_4$ i dowolnej funkcji h ze zbioru JN_4 w An_4 i dowolnych zmiennych a i b spełnione były następujące warunki:

$$(d6) \quad \|\bigwedge_a A, h\| > 0 \text{ wtw } \|A(a/b), h\| > 0,$$

$$(d7) \quad \|\bigvee_a A, h\| > 0 \text{ wtw } \|A, h\| > 0.$$

Łatwo zauważyć, że zastosowaliśmy tutaj nie tradycyjną, przedmiotową interpretację kwantyfikatorów, a interpretację podstawieniową.

Niech A będzie dowolną formułą języka JN . Dla dowolnej funkcji h ze zbioru JN w algebrę An formuła A wyznacza funkcję, która każdemu elementowi t uniwersum algebry An przyporządkowuje wartość $\|A, h\|_{An}$. Funkcję określoną w zbiorze U , która dla argumentu t przyporządkowuje wartość s oznaczamy będziemy symbolem F_s . Każda więc formuła A języka JN wyznacza przy ustalonej funkcji h z JN w uniwersum algebry An funkcję: $F_t \|A, h\|$, gdzie t przebiega uniwersum algebry An .

Operacje algebry AN , które będą odpowiadać w AN kwantyfikatorom \bigwedge_a i \bigvee_a oznaczamy odpowiednio: $\bigwedge U$ i $\bigvee U$ i rozumiemy je jako funkcje określone w zbiorze U^u i przyjmujące wartości w zbiorze U , gdzie U jest uniwersum algebry An . Funkcje te definiujemy następująco:

Dla dowolnej formuły $A \in JN$ i dowolnej funkcji h ze zbioru JN w zbiór U :

$$(d8) \quad \bigwedge U F_t \|A, h\| = \|\bigwedge_a A, h\|,$$

dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An .

$$(d9) \quad \bigvee U F_i \|A, h\| = \bigvee_a A, h\|,$$

dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An .

Pomysł przyporządkowania kwantyfikatorom \bigwedge_a i \bigvee_a operacji odpowiednio $\bigwedge U$ i $\bigvee U$ pochodzi od S. L. Blooma i przedstawiony jest w [Bloom 1971].

7. Interpretacje.

Przez interpretację JN_1 w AN_1 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_1 w AN_1 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_1$:

(1) – (7) definicji interpretacji j_n w An_1 , ponadto dwa następujące warunki:

$$(K1) \quad h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_1,$$

$$(K1') \quad h(\bigvee_a A) = \bigvee U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_1.$$

Przez interpretację JN_2 w AN_2 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_2 w AN_2 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_2$:

(1) – (9) definicji interpretacji j_n w An_2 , ponadto dwa następujące warunki:

$$(K2) \quad h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_2,$$

$$(K2') \quad h(\bigvee_a A) = \bigvee_a U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_2.$$

Przez interpretację JN_3 w AN_3 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_3 w AN_3 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_3$:

a) wszystkie warunki nałożone na interpretację j_n w An_3 , ponadto dwa następujące warunki:

$$b) (K3) \quad h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_3,$$

$$(K3') \quad h(\bigvee_a A) = \bigvee U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_3.$$

Przez interpretację JN_4 w AN_4 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_4 w AN_4 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_4$:

a) wszelkie warunki nałożone na interpretację j_n w An_4 , ponadto:

$$b) (K4) \quad h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_4,$$

$$(K4') \quad h(\bigvee_a A) = \bigvee U F_i \|A, h\|, \text{ dla dowolnego } t \in U, \text{ gdzie } U \text{ jest uniwersum algebry } An_4.$$

8. Przystosowanie aksjomatyk nrk N_1, N_2 i N_2' .

W analogiczny jak w [Żabski 1993c] sposób definiujemy pojęcia: N_1 -tautologii, N_2 -tautologii, N_2' -tautologii, N_3 -tautologii, N_3' -tautologii, N_4 -tautologii i N_4' -tautologii. Oczywiście jest, że wszystkie aksjomaty N_1 są N_1 -tautologiami. Ze względu na przystosowanie aksjomatyki n_2 w An_2 (dowód tego faktu podany jest w [Żabski 1], by pokazać, że aksjomaty N_2 (N_2') są N_2 -tautologiami (N_2' -tautologiami) wystarczy pokazać, że aksjomaty $K1$ — $K4$ są N_2 -tautologiami (N_2' -tautologiami). Pokażemy to.

Załóżmy, że $K1$ nie jest N_2 -tautologią. Stąd i z definicji N_2 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja JN_2 h , że $h(K1) \neq 1$. Niech AN_2 będzie taką algebrą a h' taką w niej interpretacją JN_2 , że $h'(\bigwedge_a A \rightarrow A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(\bigwedge_a A) \neq h'(A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji \neq -w AN_2

wynika, że (1) $h'(\bigwedge_a A) = 1$ i (2) $h'(A(a/b)) = 1$. Z (1), (K2), (d8), (d2) i (d1) wynika, że $h'(A(a/b)) = 1$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K2 nie jest N_2 -tautologią. Stąd i z definicji N_2 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja $JN_2 h$, że $h(K2) \neq 1$. Niech AN_2' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_2 , że $h'(A \rightarrow \bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(A) = h'(\bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji \rightarrow w AN_2 wynika, że (1) $h'(A) = 1$ i (2) $h'(\bigvee_a A) \neq 1$. Z (2), (K2'), (d9), (d3) i (d1) wynika, że $h'(A) \neq 1$, co przeczy (1).

Załóżmy, że K3 nie jest N_2 -tautologią. Stąd i z definicji N_2 -tautologii wynika, że istnieją AN_2 i taka w niej interpretacja $JN_2 h$, że $h(K3) \neq 1$. Niech AN_2' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_2 , że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge_a B)) \neq 1$ oraz (1) a nie jest zmienną wolną w A . Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) = h'(A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji \rightarrow w AN_2 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) = 1$ i (3) $h'(A \rightarrow \bigwedge_a B) \neq 1$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq 1$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K4 nie jest N_2 -tautologią. Stąd i z definicji N_2 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja $JN_2 h$, że $h(K4) \neq 1$. Niech AN_2' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_2 , że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (\bigvee_a A \rightarrow B)) \neq 1$ i (1) a nie jest zmienną wolną w B . Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) = h'(\bigvee_a A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji \rightarrow w AN_2 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) = 1$ i (3) $h'(\bigvee_a A \rightarrow B) \neq 1$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq 1$, co przeczy (2).

Powyższy dowód jest równocześnie dowodem tego, iż każdy z aksjomatów K1-K4 jest N_2 -tautologią.

9. Przystosowanie aksjomatyk N_3 i N_3' .

Pokażemy teraz, że aksjomaty K1 — K4 są N_3 -tautologiami (N_3' -tautologiami).

Załóżmy, że K1 nie jest N_3 -tautologią. Stąd i z definicji N_3 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja $JN_3 h$, że $h(K1) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3 , że $h'(\bigwedge_a A \rightarrow A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(\bigwedge_a A) = h'(A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji \rightarrow w AN_3 wynika, że (1) $h'(\bigwedge_a A) \neq 0$ i (2) $h'(A(a/b)) = 0$. Z (1) i (K3), (d8), (d4) i (d1) wynika, że $h'(A(a/b)) \neq 0$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K2 nie jest N_3 -tautologią. Stąd i z definicji N_3 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja $JN_3 h$, że $h(K2) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3 , że $h'(A \rightarrow \bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(A) = h'(\bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji \rightarrow w AN_3 wynika (1) $h'(A) \neq 0$, i (2) $h'(\bigvee_a A) = 0$. Z (1), (d1) i (d5) wynika, że $h'(\bigvee_a A) \neq 0$, co przeczy (2).

Założmy, że K3 nie jest N_3 -tautologią. Stąd i z definicji N_3 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja $JN_3 h$, że $h(K3) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3 , że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge_a B)) \neq 1$ oraz (1) a nie jest zmienną wolną w A . Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq h'(A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji \div w AN_3 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq 0$ i (3) $h'(A \rightarrow \bigwedge_a B) = 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) = 0$, co przeczy (2).

Założmy, że K4 nie jest N_3 -tautologią. Stąd i z definicji N_3 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja $JN_3 h$, że $h(K4) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3 , że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (\bigvee_a A \rightarrow B)) \neq 1$ i (1) a nie jest zmienną wolną w B . Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq h'(\bigvee_a A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji \div w AN_3 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq 0$ i (3) $h'(\bigvee_a A \rightarrow B) = 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) = 0$, co przeczy (2).

10. Przystosowanie aksjomatyki N_4 i N_4' .

Wykażemy w końcu, że aksjomaty K1 — K4 są N_4 -tautologiami (N_4' -tautologiami).

Założmy, że K1 nie jest N_4 -tautologią. Stąd i z definicji N_4 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja $JN_4 h$, że $h(K1) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4 , że $h'(\bigwedge_a A \rightarrow A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że $h'(\bigwedge_a A) \neq h'(A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji \div w AN_4 wynika (1) $h'(\bigwedge_a A) > 0$, i (2) $h'(A(a/b)) \leq 0$. Z (1), (K4), (d8), (d6) i (d1) wynika, że $h'(A(a/b)) > 0$, co przeczy (2).

Założmy, że K2 nie jest N_4 -tautologią. Stąd i z definicji N_4 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja $JN_4 h$, że $h(K2) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4 , że $h'(A \rightarrow \bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że $h'(A) \neq h'(\bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji \div w AN_4 wynika, (1) $h'(A) > 0$ i (2) $h'(\bigvee_a A) \leq 0$. Z (1), (d1) i (d7) wynika, że $h'(\bigvee_a A) \leq 0$, co przeczy (2).

Założmy, że K3 nie jest N_4 -tautologią. Stąd i z definicji N_4 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja $JN_4 h$, że $h(K3) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4 , że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge_a B)) \neq 1$ oraz (1) a nie jest zmienną wolną w A . Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq h'(A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji \div w AN_4 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) > 0$ i (3) $h'(A \rightarrow \bigwedge_a B) \leq 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \leq 0$, co przeczy (2).

Założmy, że K4 nie jest N_4 -tautologią. Stąd i z definicji N_4 -tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja $JN_4 h$, że $h(K4) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4 , że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (\bigvee_a A \rightarrow B)) \neq 1$ i (1) a nie jest zmienną wolną w B . Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że

$h'(\bigwedge_a (A \rightarrow A)) \div h'(\bigvee_a A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji \div w AN_4 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) > 0$ i (3) $h'(\bigvee_a A \rightarrow B) \leq 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \leq 0$, co przeczy (2).

Można zatem przyjąć, że wykazaliśmy, iż każda teza nrk: $N_1, N_2, N_2', N_3, N_3', N_4, N_4'$ jest tautologią odpowiednio: $N_1, N_2, N_2', N_3, N_3', N_4$ i N_4' .

11. Pełność nrk.

Wykażemy teraz, że każda N_2 -tautologią jest tezą N_2 . Dowód będzie analogiczny do dowodu twierdzenia o pełności nrz n_2 przedstawionego w [Zabski 1993c].

Z JN_2 tworzymy najpierw algebrę formuł JN_2 traktując każdy z n -argumentowych spójników tego języka jako n -argumentowe operacje, a kwantyfikatory — jako jednoargumentowe operacje, przyjmując nadto, że $1 = A$ wtw A jest tezą N_2 oraz $0 = \sim TA$ wtw A jest tezą N_2 . Otrzymaną w ten sposób algebrę oznaczamy symbolem AK_2 . Zatem

$$AK_2 = (JN_2, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \rightarrow, \equiv, T, F, N, \bigwedge_a, \bigvee_a).$$

Załóżmy, że (1) AN_2 jest algebrą podaną w [Zabski 1993c] jako przykład AN_2 , tzn., że U jest uniwersum tej algebry i $U = \{0, -1, 1\}$. AN_2' rozszerzmy w opisany powyżej sposób do algebry AN_2' , tzn.

$$AN_2' = (\{0, -1, 1\}, \cup, \cap, ', 0, 1, \div, +, t, f, n, \bigwedge U, \bigvee U).$$

Założmy, że (2) h jest homomorfizmem AK_2 na AN_2' oraz (3) \approx jest relacją określoną w zbiorze JN_2 zdefiniowaną następująco: $A \approx B$ wtw $h(A) = h(B)$, oraz (4) $AN_2|_{\approx}$ jest algebrą ilorazową algebry AK_2 , tzn.:

$AK_2|_{\approx} = (JN_2|_{\approx}, \vee^*, \wedge^*, \sim^*, 0, 1, \rightarrow^*, \equiv^*, T^*, F^*, N^*, \bigvee_a^*, \bigwedge_a^*)$, gdzie: $JN_2|_{\approx}$ jest zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji \approx w zbiorze JN_2 (klasę abstrakcji wyznaczoną przez dowolny element $A \in JN_2$ oznaczać będziemy symbolem $|A|$), operacje zaś algebry AN_2 są zdefiniowane następująco:

$$|A| \vee^* |B| = |A \vee B|, |A| \wedge^* |B| = |A \wedge B|, \sim^* |A| = |\sim A|, 0 = |\sim TA| \text{ wtw } A \text{ jest tezą } N_2, 1 = |A| \text{ wtw } A \text{ jest tezą } N_2, |A| \rightarrow^* |B| = |A \rightarrow B|, |A| \equiv^* |A| = |A \equiv A|, T^* |A| = |TA|, F^* |A| = |FA|, N^* |A| = |NA|, \bigwedge_a^* |A| = |\bigwedge_a A|, \bigvee_a^* |A| = |\bigvee_a A|.$$

Przypominamy następujące twierdzenie algebry ogólnej:

Jeśli h jest homomorfizmem algebry A na algebrę B , to relacja \approx określona w zbiorze A w następujący sposób:

$a \approx b$ wtw $h(a) = h(b)$, jest kongruencją algebry A oraz algebra ilorazowa $A|_{\approx}$ jest izomorficzna z algebrą B . Funkcja: $g: A|_{\approx} \rightarrow B$ określona wzorem $g(|a|) = h(a)$, dla każdego $a \in A$ ustala izomorfizm między algebrami $A|_{\approx}$ i B .

Z powyższego twierdzenia oraz (1), (2), (3) i (4) wynika (5) $AK_2|_{\approx}$ jest jedną z AN_2 . Załóżmy teraz, że (6) A jest N_2 -tautologią i — dla dowodu niewprost — że (7) A nie jest tezą N_2 . Z (7) i z określenia 1 w $AK_2|_{\approx}$ wynika (8) $1 \neq |A|$. Niech q będzie interpretacją JN_2 w $AK_2|_{\approx}$ taką, że $g(A) = |A|$. Stąd i z (8) wynika, że $g(A) \neq 1$. Stąd i z (5) wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja JN_2 h , że $h(A) \neq 1$. Stąd i z definicji N_2 -tautologii wynika, że A nie jest N_2 -tautologią, co przeczy (6) i kończy dowód twierdzenia, że każda N_2 -tautologia jest tezą N_2 .

Analogicznie można wykazać pełność każdego z pozostałych omawianych w tej pracy rachunków.

Bibliografia

Bloom, S. L.,

1971 — „A completeness theorem for «Theories of kind W»”, *Studia Logica* 27 s. 43-55.

Żabski, E.,

1992 — „O nihilistycznym rachunku kwantyfikatorów raz jeszcze”, *Ruch filozoficzny*, tom XLIX, nr 4, s. 5-12.

1993a — „O innej logice nihilistycznej”. *Ruch Filozoficzny*, tom L, nr 3, s. 296-311.

1993b — „O jeszcze innej logice nihilistycznej”, *Ruch Filozoficzny*, tom L, nr 4, s. 415-429.

1993c — „Algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków zdań”, *Filozofia Nauki*, rok I, nr 4.