Leon Chwistek

Podstawy logiki

Filozofia Nauki 5/4, 131-156

1997

Filozofia Nauki
Rok V, 1997, Nr 4(20)

ARCHIWUM

Leon Chwistek

Podstawy logiki

W roku akademickim 1930/1931 Leon Chwistek objął katedrę logiki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym w Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. Zajmował się wtedy nominalistyczną rekonstrukcją podstaw matematyki i logiki. Wysunął mianowicie program badań nad teorią wyrażeń (ich własności, struktury, i funkcji), którą nazwał — nieco paradoksalnie — „semantyką". Wyniki tych badań znalazły się w takich publikacjach z tego okresu, jak: „Neue Grundlagen der Logik und Mathematik" (Mathematische Zeitschrift, *B. XXX/1929 i XXIV/1932), „Nouvelles recherches sur les fondements des mathematique"* (Atti del Congresso Internazionale degli Matematici. Bologna, 3-10.X.1928. *Vol. 3, Bologna 1930), „Über die Grundlagen der Semantik und Metamathematik"* (Sprawozdanie z Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich. *Warszawa 1929, Warszawa 1930) i „Die nominalistische Grundlegung der Mathematik"* (Erkenntnis, *B. III/1933).*

Tej właśnie problematyce poświęcony był także cykl wykładów, które wygłosił na początku 1931 roku we Lwowie. Na wykłady te uczęszczał m.in. Kazimierz Szałajko, który sporządził z nich szczegółowe notatki. Profesor Szałajko udostępnił nam uprzejmie tekst tych notatek — z pierwszych dziewięciu wykładów; bardzo dziękujemy za ten już drugi dar Pana Profesora.[1] *Wykłady Chwistka nie są jednorodne treściowo. Pierwsze dwa dotyczą tzw. arytmetyki intuicyjnej i dla naszych Czytelników będą zapewne mniej interesujące niż siedem pozostałych. Warto zauważyć, że treść tych wykładów — w postaci rozwiniętej i ulepszonej — znalazła się w* Granicach nauki. Zarysie logiki i metodologii nauk ścisłych *(Warszawa 1935, Książnica-Atlas; por. zwłaszcza ss. 47 i nn. oraz 87 i nn.).*

---

[1] W numerze 1/1993 *Filozofii Nauki* opublikowaliśmy notatki Profesora Szałajki z wykładów Kazimierza Ajdukiewicza z tego samego okresu.

Tekst został poddany minimalnej obróbce redakcyjnej. Zachowano zasadniczo swobodny styl narracji, właściwy wykładom Chwistka, oraz pewne niejasności składniowe. Unowocześniono natomiast symbolikę rachunku zdań. Poważniejsze ingerencje językowe — a w szczególności uzupełnienia — ujęte są w nawias kwadratowy. Wszystkie przypisy pochodzą od nas.

Redakcja

WYKŁAD 1: 15.01.1931

Od czasu do czasu pojawia się w filozofii doktryna, w której się mówi, że teraz dopiero wsxystko się wyjaśnia. Wspomnijmy o dialektyce sofickiej. Płynność heraklitowska jest zasadniczo słuszna, ale nie jest na tyle słuszna, żebyśmy np. napisawszy „a" po chwili myśleli, że to jest „b". Można się zgodzić na to, że wszystko się zmienia, ale nie można tego wciągać w rachunek. Jeżeli zwrócimy uwagę np. na fizykę, to ma ona dzisiaj takie tempo zmiany poglądów, że niemal rok po roku jest [w niej coś] inaczej; ale choćby nawet i tak było, to w granicach jednej pracy nic się nie może zmienić. W myśl Hegla było tak, że gdy napiszę jakiś sąd, to musi się on [prędzej czy później] zmienić. [Pogląd Hegla idzie tu za daleko.]

Co innego jest wyprowadzić pewną rzecz z jakichś założeń, a co innego dobrze powiedzieć [jak się ta rzecz ma]. Platon w ogóle nic nie udowadnia — co nie przesądza sprawy, że w wielu wypadkach może mieć rację. Z tego, że autor orientuje się w jakichś sprawach, nie wynika, że ma on dobrą metodę [badania tych spraw], bo może się [w nich] orientować niezależnie od tej metody. Metoda pozostawiona w rękach kogoś, kto nie ma [odpowiedniej] intuicji, będzie [— z drugiej strony—] martwa.

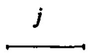
Będziemy się [w niniejszym wykładzie] zastanawiali na tym, czy metoda logiczna do czegoś prowadzi. Nie będę [go] obarczał formalistyką, tylko będę się starał zwrócić uwagę [na to], czy rzeczywiście logika może się do czegoś przydać. Cały wykład będzie raczej elementarny. Nie przystępujemy więc do przedstawienia jakiegoś systemu — jakkolwiek zarysuje się on potem [jako całość], [a] nieraz będziemy rozważali [jego] różne fragmenty — lecz będziemy nawiązywali do rzeczy znanych i prostych.

Przede wszystkim dam krótki przegląd podstawy intuicyjnej najniższej arytmetyki względnie algebry. Później, gdy dojdziemy do równań, pokaże się na nich, że aby je dobrze rozwiązywać, trzeba wyjść nieco poza zwykłą metodę matematyczną.

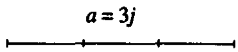
Przy rozwiązywaniu równania drugiego stopnia piszemy „+ albo –". To jest nie bardzo porządne pisanie, ale jakiś skrót. Gdy np. piszę „$x = \pm 1$", to nie każdy zdaje sobie sprawę z tego, że to ma znaczyć, iż $x = +1$ albo $x = -1$. Chcąc [tu] porządnie pisać, będziemy zmuszeni wprowadzić nowy znak na [oznaczenie owego] „albo".

Chodzi teraz przede wszystkim o zwrócenie uwagi na takie rzeczy, jak wprowadzanie liczby ujemnych. Wielu nie wie, dlaczego $(-1) \cdot (-1) = +1$. Zakładamy, że wiemy, co to jest odcinek. Spróbujemy całą metodę algebry przedstawić na odcinku. Podstawy nauki trzeba zaczynać od pojęć codziennych. Obecnie jednak musimy wyjść poza te pojęcia, wprowadzając pojęcie odcinka. Idealna logika [— zaznaczmy od razu —] nie posługuje się odcinkiem.

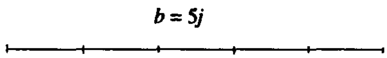
Zmierzyć jeden odcinek drugim — znaczy — przykładać jeden kolejno na drugim. Nie wprowadzimy pojęcia liczenia, tylko pojęcie mierzenia odcinków. Mierzenie nie zawsze oczywiście nam się udaje. Operacje na liczbach całkowitych muszą więc być ograniczone. Rezultatem takiego mierzenia będą liczby całkowite. Chcąc dodać np. (3 + 5), wybieramy odcinek jednostkowy j:



przy pomocy którego budujemy odcinek a, taki że jego miarą przy pomocy j jest liczba 3.



Teraz biorę: $b = 5j$.

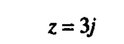


(3 + 5) będzie miarą odcinka, który zbuduję, jeżeli do odcinka a przyłączę odcinek b i zmierzę tak otrzymany odcinek przy pomocy j.

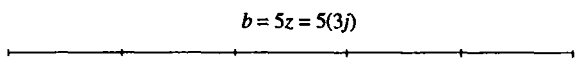
W ten sposób sprowadzamy dodawanie do mierzenia. Odejmowanie prowadzimy w taki sam sposób — z tym tylko dodatkiem, że odejmowanie nie zawsze da się wykonać. Wszystkie reguły co do zera podajemy raczej osobno. Od odcinka a nie można właściwie odjąć odcinka b, bo nic nie dostaniemy. Liczby (5 – 5) odcinkowo nie objaśnimy, tylko *ex definitione* wprowadzimy nową liczbę, którą nazwiemy „0".

Chodzi teraz o to, aby sprowadzić do metody odcinkowej mnożenie, [a] więc o to, aby podać przepis, żebyśmy prócz mierzenia — niczego nie wykonywali, a wyznaczyli np. liczbę (3 · 5). Muszę [w tym celu] przede wszystkim wybrać jednostkę j:

[a następnie] zbudować odcinki reprezentowane przez czynniki [naszego iloczynu]. Skoro mamy już odcinek $z = 3j$:



to odcinek ten obieramy za jednostkę i przy pomocy tej jednostki budujemy czynnik b:

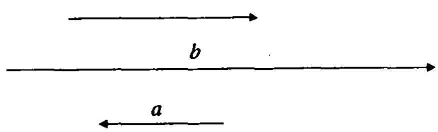


Odcinek b jest [w ten sposób] skonstruowany. Przy pomocy odcinka j możemy [teraz] zmierzyć odcinek b, a wtedy otrzymamy liczbę, o którą chodziło: $b = 15j$. Liczba ta jest z definicji iloczynem. Zatem każdą liczbę całkowitą pomnożę przez drugą, nie wykonując żadnej arytmetyki. Z powyższego określenia będzie można powiedzieć, że $(5 \cdot 3)$ jest to to samo, co $(3 \cdot 5)$, gdyż mierzenie odbywa się wówczas w przeciwnym kierunku.

Metoda ta nadaje się doskonale do wprowadzenia ułamków. Ułamki jednak nie są nam tak potrzebne, jak liczby ujemne.

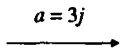
Przedstawienie liczb na osi liczbowej jest dobre w zakresie dodawania i odejmowania, ale w zakresie mnożenia jest błędne, gdyż w tych działaniach jest ogromna asymetria w przeciwieństwie do symetrii osi. Zamiast pola odcinków wprowadzamy [więc] pole wektorów, przy czym przez wektor rozumiemy odcinek, na którym wyróżniliśmy pewien kierunek. Ograniczymy się do odcinków równoległych do tej samej linii. Zakładamy, że mamy wszystkie liczby bezwględne, a zatem całkowite, ułamki i w ogóle liczby rzeczywiste, tzn. zakładamy, że każdy odcinek potrafimy drugim [odcinkiem] zmierzyć. Jeżeli są dwa dowolne odcinki, to zawsze można znaleźć miarę jednego odcinka przy pomocy drugiego.

Weźmy pewien wektor. Każdy taki wektor mamy umieć zmierzyć każdym [innym] wektorem. Chcę [np.] zmierzyć b za pomocą a.

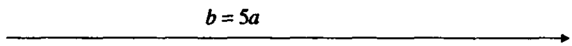


Pomijam strzałki i mierzę odcinki. Wypada, że $b = \beta a$. Jeżeli b jest nie odcinkiem, tylko wektorem, to muszę na tej liczbie to zaznaczyć. Przede wszystkim dwa kierunki mogą być względem siebie zgodne albo niezgodne. Inne położenie nie istnieje — wobec tego, że zakładamy, iż wszystkie wektory są równoległe. Wprowadzimy pisownię, np. $\overset{+}{5}$ i $\bar{5}$, aby nie mieszać znaków dodawania i odejmowania ze znakami liczb; możemy też pisać z i n (zgodne i niezgodne). Na przykład $\bar{5}$ jest miarą pewnego wektora przy pomocy innego, przy czym wektor zmierzony, będzie 5 razy dłuższy niż wektor mierzący, a przeciwnie skierowany. Chcę [teraz] zdefiniować iloczyn $(3 \cdot 5)$. Mogę to wprawdzie zrobić dowolnie, ale wezmę za podstawę definicję dla liczb niemianowanych i automatycznie przeniosę ją na liczby mianowanie. Biorę wektor jednostkowy j:

buduję wektor $a = 3j$:



[a] następnie $b = 5a$:



Gdy teraz zmierzę otrzymany wektor b wektorem j, otrzymam wartość powyższego iloczynu.

WYKŁAD 2: 16.01.1931

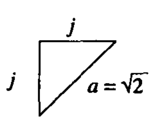
Jeśli na dowolnym odcinku [wyznaczę daną liczbę wymierną w ten sposób, że] wykreślę jakikolwiek punkt, to [dzięki tej metodzie] mam wyznaczone wszystkie liczby wymierne, jakie się na tym odcinku zmieszczą. Jedynym skokiem myślowym, jaki jest potrzebny do zrozumienia [natury] liczb rzeczywistych, jest to, żeby sobie wyobrazić, iż wszystkie liczby wymierne można na takim odcinku wyznaczyć. Naturalnie liczb wymiernych jest nieskończenie wiele, a więc trzeba sobie wyobrazić, że na odcinku umieściliśmy nieskończenie wiele liczb. Jeżeli się zgodzimy, że tak zrobiliśmy, to otrzymamy pojęcie odcinka liczbowego, tj. odcinka, zaopatrzonego znakami liczbowymi — odcinka, na którym umieściliśmy w odpowiednich punktach wszystkie liczby wymierne.

Odcinek taki jest to liczba rzeczywista. [To,] że dwie liczby rzeczywiste są równe, znaczy, iż odnośne odcinki liczbowe mają na sobie [wyznaczoną] tę samą liczbę [wymierną]. Co innego będzie [rzecz jasna] równość odcinków, a co innego — równość odcinków liczbowych. Równe odcinki liczbowe mogą być różnej długości.

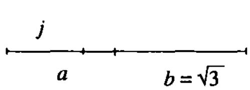
Działanie na odcinkach liczbowych możemy oczywiście robić na dwa sposoby.

Co to znaczy zmierzyć odcinek liczbowy odcinkiem liczbowym? Twierdzę [— przypominam —], że każdy odcinek zmierzę każdym odcinkiem. Chcę np. otrzymać $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Odcinek liczbowy jest od [wyboru] jednostki niezależny.

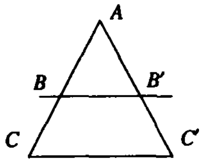
Do odcinka jednostkowego dodaję taki odcinek, który by mierzył $\sqrt{2}$:



Następnie buduję :

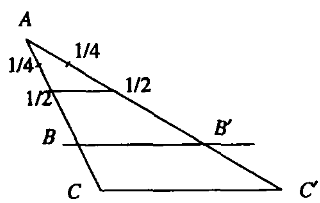


[Podamy teraz — posługując się wprowadzoną metodą —] dowód proporcjonalności równoległego podziału trójkąta:



$AC : AB = AC' : AB'$
$AC : AB = \lambda$
$AC' : AB' = \lambda$
$AC = \lambda AB$
$AC' = \lambda AB'$

Twierdzenie o proporcjonalności sprowadzamy do twierdzenia: Jeżeli na ramieniu trójkąta obiorę dowolny punkt i poprowadzę [przez niego] równoległą do podstawy, [i] jeżeli w punktach B, B' umieszczę punkt 1 i [następnie] jeżeli utworzę odcinki liczbowe, to powinny one być równe:



Twierdzę, że podział jest proporcjonalny, tzn. że z naszego punktu widzenia, jeżeli AC zmierzę za pomocą AB, [a] AC' — za pomocą AB', to wypadną równe odcinki. Zatem twierdzę, że znaczki, które będą na odcinku AC, znajdą się wszystkie na odcinku AC'.

Skoro twierdzenie to udowodniliśmy dla liczb wymiernych, to dla niewymiernych nie potrzebujemy [już] dowodu.

Metoda logiczna jest przeciwieństwem metody aksjomatycznej, którą posługuje się matematyka współczesna. Żądamy [mianowicie] tych a tych własności i te [własności] liczymy. Zadanie logiki polega właśnie na tym, aby [wychodząc] od pewnych elementów konstruować coraz wyższe [pojęcia].

Logika musi budować wszystko [wychodząc] z liter. Zajmiemy się wprowadzeniem pojęć logicznych na przykładzie równań.

WYKŁAD 3: 17.01.1931

[Wyjdźmy od następującego przykładu:]
$3x + 1 = x - 5.$

Jest to pewna funkcja [zdaniowa].

Cechą istotną każdej funkcji jest [— po pierwsze —] to, że musi ona posiadać pewną zmienną; po drugie — że należy do niej pewien zakres dozwolonych podstawień; wreszcie [— po trzecie —] że jeżeli z tego zakresu zaczerpniemy pewną liczbę, to otrzymamy [...] [określone zdanie]. [Rozważmy trzy podstawienia za zmienną x; przez „*P*" będziemy w dalszym ciągu oznaczać prawdę, przez „*F*" — fałsz, a przez „*N*" — nonsens.]

x	$3x + 1 = x - 5$	
0	$1 = -5$	*F*
−3	$-8 = -8$	*P*
1	$4 = -4$	*F*

Co to jest wartość funkcji zdaniowej? Wartość funkcji zdaniowej jest to pewien sąd. Jeżeli rozpatrujemy tego rodzaju sądy, to nie chodzi nam o ich budowę, tylko o to, czy jest to fałsz, czy prawda. Liczba, która po podstawieniu daje nam prawdę, nazywa się „pierwiastkiem równania".

Tożsamość teoretyczna jest taką samą funkcją zdaniową, jak równanie. Tożsamość jest to [mianowicie] taka funkcja zdaniowa, która przy dowolnym podstawieniu za x daje prawdę. Na przykład: $x - 1 = x - 1$.

Tak się przedstawia kwestia z funkcjami zdaniowymi, jeżeli ich zakresem są wszystkie liczby. Co będzie, gdy wprowadzimy takie wyrażenia, które zakres [dozwolonych podstawień] ograniczają?

x	$\sqrt{x} = 1$
0	*F*
−3	*N*
1	*P*

Prócz prawdy i fałszu musimy tu przyjąć jeszcze trzecią możliwość — mianowicie nonsens.

Prof. Łukasiewicz zbudował trójwartościową logikę — przy czym zamiast nonsensu wprowadził pojęcie zdania [dowodu ?] niepewnego. Takie stanowisko podyktowane jest [tym], że szkoła, do której prof. Łukasiewicz należy, nie chce mówić o wyrażeniach, tylko o tym, co wyrażenia przedstawiają. Metoda [taka] jest w jaskrawej sprzeczności z metodą matematyczną. Dlatego jeśli się idzie tą drogą, to nie można nawiązać do tego, co [rzeczywiście] robi się w matematyce.

Powodem, dla którego nie trzymam się tej metody, jest to, że logika powinna być niezależna od wszelkiej metafizyki, a w szczególności powinna nawiązywać do powszechnie zrozumiałych rzeczy. Dlatego, idąc tokiem tych rozważań, doszedłem do wniosku, że podstawą logiki nie jest ani sąd, ani prawda, ani fałsz, tylko właśnie wyrażenie i litera. Dla innych logików wyrażenie jako takie jeszcze niczym nie jest; przez wyrażenia patrzą oni niejako na to, co te wyrażenia oznaczają. Uważam, że nie ma ani jednego napisu, który by coś z sensem oznaczał; ale oczywiście poza pewnym zakresem. Konkretna logika powinna się trzymać tego, co jest napisane.

Zatem z punktu widzenia logiki: $\sqrt{0} = 1$, $\sqrt{-3} = 1$, $\sqrt{1} = 1$ to wszystko jest równie dobre, bo to wszystko są wyrażenia. Reszta należy do [dziedziny] klasyfikacji tych wyrażeń. Pierwsze klasyfikuję jako fałsz, drugie — jak wyrażenie bezsensowne, trzecie — jako prawdę. Dla nas od tej chwili sąd prawdziwy jest tak samo dobry, jak sąd fałszywy — z punktu widzenia rozpatrywania, a nie jest tak samo dobry — z punktu widzenia klasyfikacji. Przy tym stanowisku, jakie zajmuje matematyka, zawsze jest jeszcze trzecia kategoria — [nonsens]; tzn. wtedy już właściwie nie mówimy o sądach, tylko o wyrażeniach; mamy wyrażenia jedne, drugie, trzecie. Jedno wyrażenie nie przedstawia żadnego sądu, drugi [przedstawia] sąd prawdziwy, trzecie — sąd fałszywy.

[Rozważmy teraz wyrażenie:]

$$\frac{x}{x} = 1.$$

Czy to jest tożsamość, czy nie? Według definicji — tożsamością to nie jest, gdyż nie zawsze dostajemy prawdę: mianowicie dla $x = 0$ dostajemy nonsens. To prowadzi nas do pewnej trudności. Musimy wprowadzić pojęcie twierdzenia. [Na przykład:]

$$\vdash (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Znak $\vdash$ przyjął Russell, a przed nim jeszcze Frege, jako znak na twierdzenie. Ponieważ nie zawsze [coś] musi być z konieczności prawdą, zatem muszę odróżnić to, co uważam za prawdę, od tego, co uważam za nieprawdę. Jeżeli mam taki znak, jak znak twierdzenia, to uważam napis [poprzedzony tym znakiem] za prawdziwy.

Dopiero odróżnienie twierdzenia od sądu pozawala nam zrozumieć, dlaczego swobodnie przyjmujemy sądy prawdziwe, fałszywe i bezsensowne. Co innego jest [bowiem] sąd jako materiał, a co innego sąd jako twierdzenie. [Zastanówmy się teraz,] czy wolno mi napisać twierdzenie:

$$\vdash \frac{x}{x} = 1$$

Co do tego — zdania są podzielone. Mogę bowiem powiedzieć tak: [jeżeli] podstawię za x — 0, to otrzymam nonsens; z drugiej strony nie wolno za x podstawiać tego, co by dawało nonsens, bo w takim razie nie moglibyśmy np. operować pierwiastkiem:

$$\vdash x > 0 \supset (\sqrt{x})^2 = x.$$

[Wróćmy teraz do twierdzenia:]

$$\vdash \frac{x}{x} = 1.$$

To twierdzenie mamy prawo napisać. W takim razie przez twierdzenie będziemy rozumieli taką rzecz, że każde podstawienie sensowne daje prawdę; niemniej [jednak] wolno nam powiedzieć, że powyższe twierdzenie nie jest tożsamością.

Pojęcie tożsamości możemy ograniczyć najzupełniej do twierdzeń o dowolnym zakresie podstawień przynajmniej w arytmetyce, bo w teorii typów i to byłoby niemożliwe.

[Rozważmy teraz funkcję zdaniową:
$y + x = 1$]

x	y	$y + x = 1$
..	..	P
..	..	F

Tutaj będzie nieskończenie wiele P i nieskończenie wiele F.

WYKŁAD 4: 22.01.1931

[Weźmy bardziej złożony przykład:]

$$(x-3)\cdot(x+2)=0 \equiv x^2-x-6=0$$
$$\equiv x^2=x+6$$
$$\equiv |x| = \sqrt{(x+6)}$$

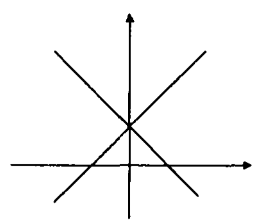
[Zobaczmy jak przedstawiają się dwa następujące podstawienia:]

x	$(x-3)\cdot(x+2)=0 \equiv \lvert x\rvert = \sqrt{x+6}$	$x=\sqrt{x+6}$
3	$0=0 \equiv 3=3$	$3=3$
–2	$0=0 \equiv 2=2$	$-2=2$

Do porządnego rozwiązywania równań symbol równoważności nie wystarcza.

[Wprowadzimy najpierw pojęcie sumy logicznej.] Suma logiczna znana jest pod nazwą „p albo q”, to znaczy, albo jedno zdanie zachodzi, albo drugie. Objaśnienie tej sumy w języku codziennym nastęcza pewne trudności. Wyobraźmy sobie, że chcemy zbudować równanie dwóch prostych równocześnie:

$$y = x + 1$$
$$y = -x + 1.$$



Równanie [to] przedstawia daną liczbę, [to] znaczy, że każdej parze liczb, spełniającej równanie, odpowiada punkt na tej linii — i na odwrót. Znaleźć równanie pary prostych — to znaczy — znaleźć takie równanie, aby znowu powyższy związek zachodził.

$$y = x + 1 \equiv y - x - 1 = 0$$
$$y = -x + 1 \equiv y + x - 1 = 0$$

$(y-x-1)\cdot(y+x-1)=0$

Równanie to przedstawia dwie linie proste, przedstawione na rysunku [powyżej]. Jeżli punkt nie leży na tej linii, to ani jednego, ani drugiego czynnika nie obraca w 0, a zatem dostajemy fałsz. Jeśli punkt leży na jednej albo drugiej linii, to jeden z czynników obraca się w 0, a zatem równanie jest spełnione. Ta myśl, która tym iloczynem została wyrażona, nadaje się do tego, aby ją logicznie sformułować. Chodzi tu o to, że jakiś punkt leży albo na obu prostych, albo na jednej, albo na drugiej.

x	y	$(y-x-1)=0 \vee y+x-1=0 \equiv$	$(y-x-1)\cdot(y+x-1)=0$
0	1	$P \vee P$	P
1	2	$P \vee F$	P
1	0	$F \vee P$	P
0	0	$F \vee F$	F

Jeżeli którykolwiek ze składników jest prawdziwy, to całość jest prawdziwa. Funktory są tu niepotrzebne. [Dodajmy jeszcze, że] znaki „albo" i „lub" oznaczają to samo. Czy będziemy czytali [znak „$\vee$" jako] „lub", czy „albo", to jest kwestia smaku.[2]

[Każda równoważność, której człony są prawdziwe, jest prawdą. Powstają jednak wątpliwości, czy prawdziwy jest także sąd:]

Sokrates jest człowiekiem $\equiv$ $2\cdot 2=4$.

[Otóż] jeżeli logika odwołuje się do przykładów z życia codziennego, a nie robi tego dostatecznie ostrożnie, to naraża się zawsze na wątpliwości, które nie są natury logicznej, ale pochodzą od tego materiału, z którego czerpiemy. Jeżeli chcemy logikę porządnie zbudować, musimy z języka codziennego zachować to, co jest najzupełniej zrozumiałe. Ponieważ musimy nawiązać do jakichś przykładów, bierzemy je [z tego powodu nie z życia codziennego, lecz] z matematyki elementarnej. Założymy, że jest ona [...] [systemem twierdzeń], który żadnych wątpliwości nie budzi, jeżeli się ją porządnie przerobi.

[Przyjrzyjmy się wyrażeniu:]

$x^2=a^2$

[Mamy tu:]

$|x|=\sqrt{a^2}$

[albo inaczej:]

$x=\pm\sqrt{a^2}$

[czyli:]

$x=\sqrt{a^2} \vee x=-\sqrt{a^2}$

[Dla:]

$(a=0)$

[2] W oryginale ostatnie zdanie jest nieco dalej, w miejscu oznaczonym: [...] na następnej stronie.

[otrzymujemy:]

$x^2 = 0 \equiv x = +0 \vee x = -0 \equiv x = 0 \vee x = 0$

Alternatywy [tej] nie będziemy uznawali [za właściwą]. [...]

[Odpowiednio mamy też:]

$x \leq a \equiv x < a \vee x = a$

[Przy:]

$x + y = 1$

[i:]

$x - y = 1$

[mamy:]

$x + y = 1 \vee x - y = 1$

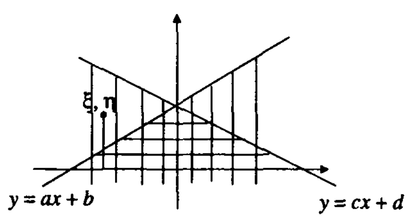
WYKŁAD 5: 23.01.1931

Nawiązywanie do języka codziennego jest o tyle niesłuszne, a nawet szkodliwe, że każdemu się wydaje [wtedy], że to [co nawiązuje do owego języka] ma jakieś zastosowanie w życiu codziennym, podczas gdy tego zastosowania nie ma i mieć nie może.

Nikt w nauce nie wprowadza żadnego znaku bez jakiegoś celu, a tylko w nauce dawniejszej była moda [na] elegancję. Chodzi nam o to, aby stworzyć aparat, na którym by się można oprzeć na tyle, aby można było powiedzieć, iż jeśli coś wypadnie z tego aparatu, to będzie pewne.

Zastosujmy [obecnie] pojęcie [sumy logicznej] „albo" do nierówności.

Mamy dwie jakiekolwiek proste. Chcę powiedzieć, że y jest mniejszy od rzędnych obu prostych. Nie napiszę tego bez znaku „albo", bo iloczyn już mi nie pomaga.



$y = ax + b$ $y = cx + d$

[Chodzi więc o to, by obowiązywały odpowiednio dwa warunki:]

$\eta < a\xi + b$

$\eta < c\xi + d$

Gdyby te dwa warunki obowiązywały równocześnie:

$\eta < a\xi + b \vee \eta < c\xi + d$

to chodziłoby o obszar podwójnie zakreskowany.

Na tym przykładzie bardzo jasno wychodzi to, że powyższy układ może być spełniony w wypadku, kiedy jedno i drugie jest prawdziwe, mianowicie dla obszaru podwójnie zakreskowanego.

[Teraz wprowadzimy pojęcie iloczynu logicznego. Zauważmy, że] słówka „i" używa się ciągle w matematyce, nie pisząc tego [wyraźnie], np. dla układu dwóch równań. [Otóż:]

$$\beta < \alpha < j$$

to jest to samo, co

$$\alpha < j \wedge b < a,$$

[gdzie znak] $\wedge$ — [to tyle, co] „oraz". (Zamiast tego znaku Hilbert używa znaku „+" albo „·"; znak w logice jest rzeczą główną, dlatego też były ciągłe wrzenia [między logikami co do wyboru notacji], gdyż każdy chciał to znakowanie udoskonalić.)

Iloczyn logiczny jest prawdziwy, gdy oba czynniki są prawdziwe; fałszywy — gdy jeden przynajmniej czynnik jest fałszywy. [Obrazuje to poniższa tabelka:]

p	q	$p \wedge q$
P	P	P
P	F	F
F	P	F
F	F	F

Nauka o nierównościach drugiego stopnia jest nauką, która po prostu prosi się o używanie symbolu iloczynu. [Weźmy np. nierówność:]

$$(x-3)\cdot(x+2) < 0.$$

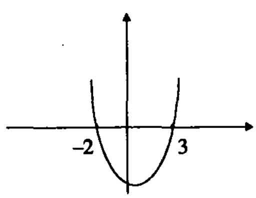
Aby rozwiązywać [tego rodzaju] nierówności, można przedstawić wielomian [występujący] po lewej stronie [nierówności] graficznie. To będzie najlepsze postępowanie.

[Mamy więc:]

$$x^2 - x - 6 < 0 \equiv (x-3)\cdot(x+2) < 0 \equiv -2 < x < +3$$

[Piszemy] równanie paraboli:

$$y = x^2 - x - 6$$



[Teraz:]

$$(x-3)\cdot(x+2) > 0 \equiv x < -2 \vee x > 3$$

$$(x-3)\cdot(x+2) \leq 0 \equiv -2 \leq x \leq 3$$

$$(x-3)\cdot(x+2) > 0 \equiv x < -2 \vee x > 3$$

Warunki te uzupełnianią się wzajemnie, to znaczy jeżeli x czyni zadość warunkowi pierwszemu, to nie może czynić zadość drugiemu warunkowi. Jeden z tym warunków zachodzić musi. Znak równoważności zachodzi [zatem] pomiędzy jednym [warunkiem] a negacją drugiego:

$\sim [(x < -2) \vee (3 < x)] \equiv [(-2 \leq x) \wedge (x \leq 3)]$[3]

[Na podstawie prawa De Morgana:]

$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

[mamy:]

$\sim [(x < -2) \vee (3 < x) \equiv [\sim (x < -2) \wedge \sim (3 < x)]$

[i ostatecznie:]

$-2 \leq x \equiv \sim (-2 > x)$

Nie można powiedzieć, żeby prawo [De Morgana, do którego się wyżej odwołaliśmy] w życiu codziennym pewnych usług nie oddawało — np. w sądownictwie. Niemniej [jednak] logicy, który na tego rodzaju zastosowania logiki się powołują, złą jej wyrządzają przysługę. Cel logiki taki [tylko] być nie może; musi on być olbrzymi i wzniosły.

[Teraz z kolei wprowadzimy pojęcie wynikania. Otóż] mamy [np.] twierdzenie: Dwie liczby równe trzeciej są sobie równe.

W arytmetyce względnie w algebrze operujemy przede wszystkim liczbami. Znaki: *a, b, c, x, y, z* — przedstawiają dowolne liczby. Twierdzę [więc], że jeżeli w rachunku dwie dowolne liczby są równe trzeciej, to są sobie równe. Chcę to [teraz] napisać za pomocą znaków. Równoważność tu mi się na nic nie przyda, bo gdybyśmy napisali:

$a = b \wedge b = c \equiv a = c$,

to można się od razu przekonać, że to nie jest prawda:

a	b	c	$[(a = b) \wedge (b = c)] \equiv (a = c)$
1	0	1	F $\quad$ P

Otrzymujemy bowiem po lewej stronie fałsz, po prawej [zaś] prawdę. Musimy tu użyć [właśnie] wynikania.

WYKŁAD 6: 24.01.1931

Mamy twierdzenie następujące:

$\vdash [(a = b) \wedge (b = c) \supset (a = c)]$.

Znak wynikania ($\supset$) jest zaczerpnięty z życia codziennego. [Czytając to twierdzenie,] musimy zwrócić uwagę na litery. Litera jako taka nic w ogóle oznaczać nie może; litery są tylko na to, żeby na ich miejsce coś podstawiać: *a, b, c* ... — nie są żadnymi liczbami, tylko wyrażeniami zmiennymi:

Jeżeli *a, b, c* — są to jakiekolwiek liczby, i jeżeli $a = b$, oraz $b = c$, to $a = c$.

Tak się czyta powyższe twierdzenie. Nasze twierdzenie musi być prawdziwe dla jakichkolwiek podstawień za *a, b, c*:

[3] Chwistek stosował w swoich wykładach notację kropkową. Ze względu na to, że wyszła ona niemal zupełnie z użycia, zmieniamy ją wszędzie na notację nawiasową. Wyrażenie $\sim [(x < -2) \vee (3 < x)] \equiv [(-2 \leq x) \wedge (x \leq 3)]$ w notacji kropkowej wygląda następująco: $\sim . x < -2 \vee 3 < x \equiv . -2 \leq x \wedge x \leq 3$".

a	b	c	$(a = b) \wedge (b = c)$	$a = c$	$[(a = b) \wedge (b = c)] \supset (a = c)$
1	1	1	P	P	P
1	0	0	F	F	P
1	0	1	F	P	P

[Mamy następujące zależności:]

$P \supset P$

$F \supset F$

$F \supset P$

O tym, że z fałszu wynika bądź prawda, bądź fałsz, łatwo się przekonać, bo np. z twierdzenia fałszywego:

$a \cdot b = a + b$

może nie zawsze wypaść prawda.

[To,] że z fałszu wyprowadzamy nieraz prawdę, i że z fałszu wyprowadzamy [niekiedy] fałsz, to jest rzecz pewna. Dziwnym jest raczej np. takie twierdzenie:

$\vdash [(1 = 0) \wedge (0 = 1)] \supset (1 = 1).$

W całym wynikaniu jest to niepokojące dlatego, że każdy miesza dwie rzeczy: proces dowodzenia, czyli czynność, ze związkiem wynikania. Gdy mówimy, że z pierwszego wynika drugie, to każdy myśli, że można tego dowieść, podczas gdy wszystkie metody, które posiada, zawodzą go, bo nie potrafi do nich nawiązać; zapomina o tym, że powyższego twierdzenia dowiedliśmy dzięki temu, iż powołaliśmy się na twierdzenie, że z fałszu może wynikać cokolwiek. Jesteśmy tutaj na terenie rozszerzonym:

$[(x + 5) = (2x - 1)] \equiv (x = 6)$

$[(x^2 + 1) = x^2] \equiv (5 = 6)$

bo żadna liczba rzeczywista nie czyni zadość danemu warunkowi. Lewa strona ma stale wartość F, wobec czego po prawej stronie mogę napisać jakiekolwiek wyrażenie, mające wartość F. Jeżeli przyjmujemy zasadę, że z fałszu wynika fałsz i prawda — to nie czynimy tego dla fantazji, tylko dlatego, żeby konsekwentnie móc stosować pewne twierdzenie.

Wynikanie ze zmiennymi nazywają niekiedy logicy „wynikaniem formalnym", a bez zmiennych — „materialnym". Nazwa ta nie bardzo się stosuje [do odpowiednich przypadków], gdyż oba znaki wynikania są [w nich] te same, tylko w pierszym są zmienne, a w drugiem za zmienne podstawiono stałe. Kto by sądził, że z założenia:

$(1 = 0) \wedge (0 = 1)$

nie wynika, iż:

$1 = 1,$

ten by się mylił.

Upewniliśmy się, że z fałszu może wynikać fałsz lub prawda, ale nie upewniliśmy się, że z fałszu każdy fałsz i każda prawda wynika. Musimy się o tym upewnić. Wynika zaś to stąd, że takie twierdzenia musimy na każdy sposób przyjąć.

Mamy twierdzenie:

$\vdash [(p \supset q) \wedge (q \equiv r)] \supset (p \supset r)$

Jeżeli taką zasadę będę chciał przyjąć, to będę musiał powiedzieć, że jeśli z mego twierdzenia fałszywego wynika jedna prawda, to ponieważ każda prawda jest równoważna każdej prawdzie, więc z tego twierdzenia wynika każda prawda. Tak samo z fałszem.

p	q	$p \supset q$
P	*P*	*P*
P	*F*	*F*
F	*P*	*P*
F	*F*	*P*

Należy odróżnić [— jeszcze raz to podkreślmy —] czynność wnioskowania od związku wynikania. Jeżeli mamy jakiekolwiek dwa twierdzenia i damy [określoną] wartość jednemu i drugiemu, np. twierdzeniu p wartość *P* (prawda) i twierdzeniu q wartość *P*, to nie potrafimy wyprowadzić związku $p \supset q$, jeżeli nie będziemy mieli [odpowiedniego] prawa; ale gdy mamy to prawo, to nie musimy wynikania wyprowadzać, tylko od razu mówimy, że jeśli jedno i drugie jest prawdziwe, to jedno z drugiego wynika.

W praktyce codziennej mamy twierdzenia, co do których nie wiemy, czy są prawdziwe, czy — fałszywe. Wskutek tego z żadnej tabelki bezpośrednio w praktyce korzystać nie wolno.

a	b	c	$(a = b) \supset (b = a)$	$[(a = b) \wedge (b = c)] \supset (a = c)$
..	..	..	*P*	*P*

[Oto przykładowe prawa, z których korzystamy.]

$\vdash (a = b) \supset (b = a)$

Jest to prawo przemienności [znaku równości].

$\vdash [(a = b) \wedge (b = c)] \supset (a = c)$

Jest to prawo przechodniości znaku równości. Związek równości pomiędzy dwiema liczbami jest to relacja zwrotna i przechodnia, jaka łączy liczby.

Z punktu widzenia wartości naprawdę możemy powiedzieć, że:

$(a = b) \supset (b = a) \equiv \{[(a = b) \wedge (b = c)] \supset (a = c)\}$

$[(p \equiv q) \wedge (p \supset q)] \supset (p \supset q)$[4]

$[(a = b) \wedge (b = a)] \supset [(a = b) \supset (b = a)]$.

Chociaż jednego twierdzenia z drugiego nie można wyprowadzić, to jedno z drugiego wynika dzięki temu, że założyliśmy, iż są to zdania prawdziwe. Jeżeli napiszemy:

$[(a = b) \supset (b = a)] \supset \{[(a = b) \wedge (b = c)] \supset (a = c)\}$,

[4] Formuła powinna wyglądać raczej następująco: $(p \equiv q) \supset [(p \supset q) \wedge (q \supset p)]$.

to mówimy, że jest to prawdziwe dzięki temu, że o jednym i drugim wiedzieliśmy już, że są prawdziwe. Jeśli czegoś dowodzę, to mam do czynienia z wyrażeniami, które raz są prawdziwe, drugi raz — fałszywe.

Moja praca w matematyce polega na tym, żeby pomiędzy jednym takim wyrażeniem a drugim znaleźć jakiś związek. Jeżeli w jednym wypadku z wartości *F* wynika *P*, to tak musi się dziać zawsze. Kolizji żadnej w dowodzeniu być nie może, dlatego że skoro dowodzę — to nie mam do czynienia w praktyce z funkcjami, których wartości znałbym. Ile razy skorzystam z tego prawa, to wyjdą mi prawdy banalne. Jakie konsekwencje z tego wychodzą, to pokaże się na równaniach.

[Zbadajmy np. podstawienia dla następujących wyrażeń:]

x	$(x = \sqrt{x+6}) \supset [x^2 = (x+6)]$
3	$P \quad \supset \quad P$
–2	$F \quad \supset \quad P$
0	$F \quad \supset \quad F$

Widzimy, że to wartościowanie będzie nas prześladowało zawsze przy podstawianiu. Gdybyśmy nie powiedzieli, że z dowolnego fałszu wynika dowolna prawda, to nie moglibyśmy robić powyższych podstawień. Z fałszu wynika każde zdanie sensowne, a z prawdy wynika tylko prawda.

[Gdyby ktoś pytał o wyrażenia w rodzaju:]

Dwa równa się trzy $\supset$ Sokrates jest człowiekiem

[to odpowiedzielibyśmy, że] tego [związku] nie mamy [tutaj] o tyle, że przyjęliśmy określenia z zakresu matematyki.

WYKŁAD 7: 29.01.1931

Twierdzę, że mamy [oto] przed sobą aparat, który pozwoli nam wyprowadzić wszystkie twierdzenia logiczne prawdziwe, w ilości dowolnej, zupełnie mechanicznie, bez żadnego zrozumienia, co te twierdzenia mają oznaczać. Już algebra jest czymś podobnym — lecz tam materiał jest nieco szerszy, ale reguły [tam występujące] trochę trudno pojąć. Chodzi o to, że tutaj są te reguły niesłychanie proste. Mamy przede wszystkim dwie zasady:

I. *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *v*, *w* — są [to] wyrażenia.

II. Jeżeli *E*, *F* są [to] wyrażenia, to i */EF* jest wyrażeniem.

Są to reguły budowania wyrażeń. [Aby wyjaśnić znaczenie schematu */EF*,] wystarczy tylko podać tabliczkę do liczenia:

E	*F*	*/EF*
+	+	–
+	–	+
–	+	+
–	–	+

Jeśli z tabliczki wyjdą same wartości prawdziwe, to taką rzecz będę uważał za twierdzenie logiczne; [inaczej mówiąc,] jeżeli tabliczka daje same prawdy, to wyrażenie jest twierdzeniem. Nie twierdzę, że to jest powiedziane językiem precyzyjnym — bo to jest metoda obrazowa. Logika systematyczna takimi obrazami się nie posługuje, lecz chodzi o to, że to jednak każdemu wystarczy — bo tu nieporozumienia żadnego nie ma. Niemniej jednak, gdy się temu bliżej przypatrzymy, to się pokaże, iż tu są różne wątpliwości, a gdy zechcemy je usunąć, to się rzecz rozwlecze. Chodzi teraz o to, jak mamy taką tabliczkę robić. Każdy myślący zauważy, że mamy dwa gatunki zmiennych: zmienne, przy pomocy których objaśniamy, i zmienne, które jako przedmioty wprowadzamy; mamy więc zmienne systemu i te zmienne, przy pomocy których rzecz objaśniamy. Jeżeli objaśnimy rzecz przy pomocy zmiennych, to już wychodzimy poza język codzienny, który pojęcia zmiennych nie zna. Ci logicy, którzy chcieli wszystko sprowadzić do języka codziennego w ścisłym tego słowa znaczeniu, napotykali na te trudności, że niejednokrotnie nie wiadomo było, co to jest język w ścisłym znaczeniu, a po wtóre — nie mogli wprowadzić zmiennych.

Może ktoś powiedzieć, że przez wprowadzenie skończonej ilości niewiadomych dostaniemy za mało twierdzeń, a w takim razie trzeba tych liter podać więcej. Moglibyśmy taką przyjąć zasadę:

Jeśli E jest literą, to E jest wyrażeniem.

Jeśli E jest literą, to E' jest literą.

Wtedy mielibyśmy nieskończoność.

Cel, do jakiego dążymy, polega na tym, żeby z nas samych wydobyć to, co jest maszyną. Nasze życie wewnętrzne nie jest maszyną. Pokaże się [natomiast], że całe rozumowanie, że wszystkie nauki aprioryczne — należą do gatunku maszynowego.

Jeżeli wprowadzę E', to mam trudność podstawiania za E. Za E mamy podstawiać wyrażenia; milcząco albo wyraźnie muszę powiedzieć, że jeśli E jest literą, to E' nie zawiera E.

To, że mamy skończoną ilość twierdzeń ciekawych, to nas nie martwi, bo cały rachunek twierdzeń logicznych nie wychodzi poza skończoną ilość. Tu jednak skończonej ilości twierdzeń nie mamy, bo możemy komplikować sprawę w nieskończoność. To, że twierdzenia będą się powtarzały, jest do pewnego stopnia niepotrzebne, ale to powtarzanie się może nas jednak interesować.

Powiadamy: mamy przed sobą mniej więcej określony system i zmechanizowany tak zwany rachunek zdań albo logikę elementarną. Nie mówię, że ona wystarcza, że wyczerpuje wszystko, że jej zastosowania są ważne; ale ona sama jest ważna: samo zjawisko, że taka maszyna myślowa istnieje, jest ważne.

Teraz przeprowadzimy szereg ćwiczeń, ale przedtem uwolnimy się raz na zawsze — przez wprowadzenie odpowiednich skrótów — od znaków pozostałych, znowu nie praktycznie — tylko teoretycznie.

Dotąd pisaliśmy:

$\vdash (\sim p \supset q) \equiv (p \vee q)$

Zrobimy tak, aby został tylko jeden znak, a zrobimy to za pomocą definicji.

Ale pojęcie definicji jest niesłychanie mętne, jeżeli chodzi o tradycję. Należy się [zatem] nad znaczeniem tego pojęcia zastanowić. Tę sprawę odkładamy jednak na później, bo mamy za mały materiał, aby krytykę różnych [takich] pojęć, jak definiowanie, przeprowadzić. Pokażemy jednak metodę definiowania.

Russell pisze w ten sposób:

$(p \supset q) = (\sim p \vee q)$ Df

[gdzie „Df" jest skrótem słowa „definicja"). Jeżeli się ktoś pyta, co znaczy [tu]„równa się", to trzeba powiedzieć, że to nie jest żadna równość, bo znak „Df" oznacza, że to jest zdanie innej kategorii — że to zdanie nie należy do właściwych twierdzeń.

Prof. Wilkosz pisze w ten sposób:

$(p \supset q) \underset{\mathrm{Df}}{=} (\sim p \vee q)$.

Wprowadzenie znaku „$\underset{\mathrm{Df}}{=}$" jest błędne, bo znak ten wymaga [dalszego] objaśnienia. Przy objaśnieniach [zaś] napotykamy na pewne trudności, a co gorzej zamazujemy rolę definicji. Wtedy definicja jest tylko *malum necessarium*. Definicja należy raczej do interpretacji systemu.

Jeżeli *E*, *F* są [to] wyrażenia, to zachodzą następujące skróty:

Skrót	Wyrażenie	Objaśnienie słowne
$\sim E$	$/EE$	negacja
$E \vee F$	$/ \sim E \sim F$	suma logiczna
$E \supset F$	$/ E \sim F$	implikacja
$E \wedge F$	$\sim /EF$	iloczyn
$E \equiv F$	$(E \supset F) \wedge (F \supset E)$	równoważność

Aby istotę [powyższych] rzeczy zrozumieć, trzeba jeszcze jednego wysiłku umysłowego. W matematyce tak [to] rozumiemy, że niejako [najpierw] wiemy, co [to] jest negacja, a [dopiero później] wyrażamy to pewnym znakiem; tu jest przeciwnie, bo ja [najpierw] wiem, co to jest znak, a dopiero ten znak interpretuję [następnie] jako negację. To, co tu jest naprawdę interesujące, jest przerzucone w dziedzinę interpretacji systemu. Uważamy, że podstawą [tych] rzeczy jest właśnie strona maszynowa; drugorzędą rzeczą są objaśnienia tego, a tymczasem zdaje się być na odwrót. Robię tak dlatego, że właśnie dla tych pojęć chcę szukać jakiejś solidnej podstawy, której nie znajdujemy w jakimś myśleniu, bo właśnie swobodne myślenie napotyka na tyle trudności i zawiłości, że na nim oprzeć się nie możemy. Opieramy się [więc] na pewnym szablonie. Pojęcia zajmujące [nas] wprowadzamy do tego [właśnie] szablonu.

Jest to zresztą zupełnie coś podobnego, jak się dzisiaj robi [w podobnych sytuacjach] w fizyce. Fizyk bowiem, mając chaos zjawisk — buduje teorię. Teoria przekracza często zjawiska, a nawet czasem nie ma nic ze zjawiskami wspólnego. Ale fizycy powiadają, że gdy stworzą taką maszynę i przyłożą ją do zjawisk — będzie się wszystko zgadzało.

Należy jeszcze zaznaczyć, że eliminowanie tych symboli może być bardzo żmudne, i dlatego w praktyce tego nie robimy. System logiczny jest to utwór bez definicji, a więc w praktyce z tym nie mamy do czynienia. Wprowadzenie tych symboli ma charakter subiektywny, bo jeżeli nimi operuję, to na nich polegam.

WYKŁAD 8: 31.01.1931

[Pokażemy teraz na przykładach wziętych z historii logiki, jak nasza maszyna działa.]

Duns Scotus, filozof franciszkański z drugiej połowy XIII wieku, powiada tak: w każdym dobrym wynikaniu z przeciwieństwa następnika wynika przeciwieństwo poprzednika. Jeżeli mamy wynikanie:

$p \supset q$,

to — według niego — z tego ma wynikać, że z zaprzeczenia następnika wynika zaprzeczenie poprzednika, tzn.:

$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$.

Jest to twierdzenie, którego prawdziwość wyliczymy [za pomocą naszych tabliczek] momentalnie. Z uwagi na zasadę podwójnego przeczenia możemy to twierdzenie odwrócić. Jest to tak zwane prawo kontrapozycji.

p	q	$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
+	+	+ + +
+	–	– + –
–	+	+ + +
–	–	+ + +

Przedtem potraktowaliśmy sprawę jako maszynę. Twierdzeń interesujących albo mniej interesujących [— wziętych jako przykłady —] nie było. Teraz nawiążemy trochę do życia. Szalona jest różnica pomiędzy poziomem intuicyjnym, a dawnym [— czysto mechanicznym]. Tam wszystko się gubi w słowach, można mieć wątpliwości, czy to jest prawda; a tu już wszystko jest mechaniczne.

Według Dunsa Scota otrzymujemy też:

p	q	$(p \supset q) \supset \sim (\sim q \wedge p)$
+	+	+ + +
+	–	– + –
–	+	+ + +
–	–	+ + +

[Ostatecznie więc mamy dwie równoważności:]

p	q	$(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$	$(p \supset q) \equiv \sim(\sim q \wedge p)$
+	+	+	+
+	–	+	+
–	+	+	+
–	–	+	+

Prawo addycji (dodawania) [głosi]: z któregokolwiek składnika sumy [czyli dyzjunktywy] wniosek na sumę jest dobry, to znaczy ze składnika sumy mogę wnioskować o całej sumie, czy zachodzi, czy nie. [Oczywiście nie zachodzi zależność odwrotna.]

p	q	$p \supset (p \vee q)$	$q \supset (p \vee q)$	$(p \vee q) \supset q$
+	+	+	+	+
+	–	+	+	–
–	+	+	+	+
–	–	+	+	+

To jest prawo, które figuruje w aksjomatyce Russella i Hilberta.

Duns Scotus mówi jeszcze: jeśli jakieś twierdzenie implikuje sprzeczność (a sprzeczność to twierdzenie i zaprzeczenie zarazem), to z tego wynika dowolne twierdzenie (w konsekwencji formalnej).

p	q	r	$[p \supset (q \wedge \sim q)] \supset (p \supset r)$
+	+	+	+
+	+	–	+
+	–	+	+
+	–	–	+
–	+	+	+
–	+	–	+
–	–	+	+
–	–	–	+

To jest najistotniejsza rzecz w całym rachunku. Przykład:

Sokrates jest i Sokrates nie jest $\supset$ laska stoi w kącie.

Duns Scotus odróżnia niemożliwość od fałszywości, podczas gdy my nie mamy tego odróżnienia i tylko przyjmujemy fałszywość. Mówi on: z jakiegokolwiek zdania niemożliwego wynika dowolne zdanie, nie na podstawie konsekwencji formalnej (tzn. że nawet liczyć tego nie trzeba), ale na podstawie prostej konsekwencji materialnej.

p	q	$\sim p \supset (p \supset q)$
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	+

[Kolejne twierdzenie, które znajdujemy u Dunsa Scota brzmi:] jeśli jakieś zdanie jest prawdziwe, to wynika ono z dowolnego twierdzenia.

p	q	$p \supset (q \supset p)$
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	+

Na tym kończy się Duns Scotus.

Przejdźmy do autora jemu wspóczesnego z XIII wieku, mianowicie do Raimunda Lulla.

Jest on z innego [jeszcze] względu sławny — mianowicie z tego, że pierwszy zbudował maszynę logiczną. Maszyna ta nie sięgała zbyt daleko: była to zwykła sztuka kombinowania. Był to rodzaj tablic, na których się kombinowało pewne wypadki. Jeżeli chodzi o [samą] rzecz, to Lullus niewiele zrobił; jeżeli chodzi o pomysł, to odegrał on taką rolę, jak Leonardo da Vinci dla aeroplanu.

Ogromnym potwierdzeniem tendencji maszynowych jest maszyna logiczna, dalej arytmometr (przyrząd do dodawania, mnożenia itd.). Już suwak logarytmiczny jest do pewnego stopnia maszyną. [Przypomnijmy, że całość życia wewnętrznego nie da się zredukować do mechanicznego rachunku.] Nam [jednak] nie chodzi o myślenie jako całość, o myślenie wraz z uczuciem, tylko o myślenie ścisłe, a zatem o takie myślenie, jakie jest w matematyce. Matematycy dawniejsi byli zdania, że myślenia ścisłego poza liczeniem nie ma; że musi się zacząć od liczb naturalnych. Rachunek [logiczny] jest jeszcze ściślejszy niż matematyka, bo reguły [jego] są jeszcze prostsze i jeszcze łatwiej dadzą się sformułować.

[Otóż] Lullus mówi: jeżeli z poprzednika mamy jakąś dobrą konsekwencję, to z tego wynika, że jeśli coś wynika z następnika, to to samo wynika też z poprzednika.

p	q	r	$(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$
+	+	+	+
+	+	–	+
+	–	+	+
+	–	–	+
–	+	+	+
–	+	–	+
–	–	+	+
–	–	–	+

To jest prawdziwy sylogizm, albo lepiej — zasada sylogizmu. Jest to naczelna zasada logiki, która przy zaksjomatyzowaniu logiki wysunie się na pierwszy plan. Ale myśmy jeszcze nie zaksjomatyzowali logiki. [To będzie dopiero następny krok w naszej konstrukcji.]

[Lullus powiada dalej, że] każda konsekwencja jest dobra, której poprzednik z zaprzeczeniem następnika nie zgadza się.

$\sim (p \wedge \sim q) \supset (p \supset q)$

$(p \wedge q) \equiv \sim (p / q)$

$(p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \supset q)$

Autor korzysta ze wzorów [zwanych obecnie „wzorami] De Morgana".

$(p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \supset q)$

[Następne prawo Lulla brzmi:] z iloczynu logicznego mogę wywnioskować jakikolwiek składnik.

$(p \wedge q) \supset p$

$(p \wedge q) \supset q$

To prawo chcielibyśmy wyjaśnić z tego punktu widzenia, że dla człowieka niewytrenowanego w logice jest to prawo niezrozumiałe wskutek [...] zbytniej zrozumiałości. Twierdzenie to znane jest pod nazwą „twierdzenia Leibniza".

[Przejdźmy teraz do Williama] Occama (†1374), nominalisty, który wziął bardzo intensywny udział w walce realistów z nominalistami. Powiedział [on m.in.:] nie można obalić teoretycznie wiary w ingerencję duchów, która w historii odegrała wielką rolę.

[Occam] mówi o sumie logicznej, że na to, aby była ona prawdziwa, potrzeba, aby jedna lub druga strona była prawdziwa. Aby suma logiczna była fałszywa, żądamy, aby obie strony były fałszywe.

[Z sumą logiczną związane jest] prawo De Morgana: zaprzeczenie dyzjunktywy jest iloczynem, złożonym z zaprzeczonych składników dyzjunktywy.

$\sim (q \vee p) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

Z każdej części dyzjunktywy mogę wnioskować o całości.

$\sim p \vee (q \supset q)$[5]

Jeżeli w iloczynie dodamy sąd prawdziwy, to nic się nie zmieni:

$(p \supset q) \supset [(p \wedge r) \supset (q \wedge r)]$

[To ostatnie] prawo wypowiedział Albertus de Saxonia (XIV wiek).

[Na tym kończymy przegląd niektórych tradycyjnych praw rachunku logicznego.] Zajmiemy się [teraz jego] aksjomatyką.

Najpierw przejdziemy ją z punktu widzenia historycznego. Skończymy na aksjomacie Nicoda, z którego Hilbert trochę się śmieje, ale który jest bardzo ciekawy.

Aksjomat Nicoda [wygląda następująco]:

$\vdash //p/qr/t/tt//sq//ps/ps$

[Można go też przedstawić następująco:]

$\vdash [p/(q/r)]/\{[t/(t/t)]/[(s/q)/((p/s)/(p/s))]\}$

$[p \supset (q \wedge r)] \supset \{(t \supset t) \wedge [(s/q) \supset (p/s)]\}$

$[p/(q/r)]/\{(t/{\sim}t)/[(s/q)/{\sim}(p/s)]\}$

Aksjomat ten zawiera w sobie zniekształconą [zasadę] sylogizmu i identyczności logicznej.

Nicod doszedł do tego, że logikę można wyprowadzić z dwóch aksjomatów:

$\vdash (t \supset t)$

$\vdash (p \supset q) \supset [({\sim}s/q) \supset (p/s)]$

[Rozważmy bliżej metodę aksjomatyzacji stosowaną w logice. Punktem wyjścia jest układ aksjomatów.] Jeżeli [teraz] mamy kilka aksjomatów, to musimy znać reguły budowania i udowadniania twierdzeń.

[Przyjmijmy, że:]

p, *q*, *r*, *s*, *t* — są literami

[oraz wspomniane już wyżej zasady:]

Jeśli *E* jest literą, to *E* jest wyrażeniem.

Jeśli *E*, *F* są [to] wyrażenia, to */EF* jest [też] wyrażeniem.

To jest [reguła] budowania wyrażeń.

[Przyjmijmy dalej] regułę podstawiania:

Jeśli zachodzi $\vdash E$, [i] jeśli *I* jest literą i *E* zawiera *I*, [i] jeśli *F* jest wyrażeniem, [i] jeśli [zarazem] *K* jest wynikiem podstawienia *F* za *I* w *E*, to zachodzi *K*.

Badanie głębsze nad naturą podstawiania doprowadziło do tego, że musiało się wprowadzić osobny symbol: (*EFGH*), [co] czytamy: jeśli w *E* za *F* podstawię *G*, to otrzymam *H*.

Jest osobna nauka teoretyczna, mianowicie [tak przeze mnie zwana] semantyka, tzn. nauka o podstawianiu, nauka o znakach [(zaznaczmy, że] zwykle „semantyka" oznacza naukę o oznaczaniu wyrażeń). Kwestia podstawiania jest najważniejszą właściwie

[5] Powinno być chyba raczej: $p \supset (p \vee q)$.

kwestią w logice i matematyce. Wszystkie trudności matematyczne natury bardziej teoretycznej sprawia podstawianie.

[Dołączymy to tego] regułę odrywania (tzw. *modus ponens*):

Jeśli zachodzi E oraz $\vdash E \supset F$, to zachodzi F.

Nicod zmodyfikował to twierdzenie [w następujący sposób]:

Jeśli zachodzi $\vdash E$ i jeśli $\vdash E/G/F$ (i jeśli z E wynika G oraz F), to zachodzi F.

WYKŁAD 9: 5.02.1931

W aksjomatyce Whiteheada i Russella znajdujemy:

Jeżeli E jest wyrażeniem, to i $\sim E$ jest wyrażeniem.

Prócz tego suma logiczna jest [tam] przyjęta jako termin pierwotny. Więc jeśli EF jest wyrażeniem, to termin $(E \vee F)$ jest wyrażeniem.

Reguła odrywania jest [w tym systemie] bez kreski, [a] mianowicie:

Jeśli zachodzi $\vdash E$ oraz jeśli zachodzi $\vdash E \supset F$, to zachodzi $\vdash F$.

($(E \supset F)$ jest skrótem zamiast $(\sim E \vee F)$)

Whitehead i Russell przyjmują aż pięć aksjomatów. Hilbert [natomiast] przyjmuje cztery [aksjomaty]. [Oto aksjomatyka Whiteheada i Russella:]

(1) Zasada tautologii:

$\vdash p \vee (p \supset p)$

Jest to zasada dosyć nieprzyjemna, ale potrzeba ją w rachunkach przyjąć.

(2) Zasada permutacji czyli przemienności symbolu „$\vee$":

$\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$

Bez takiej zasady, podanej otwarcie czy w sposób ukryty, ruszyć się nie możemy.

Taka zasada jest przemycona [również] w aksjomacie Nicoda:

$\vdash [p/(q/r)]/\{(t \supset t)/[(s/q) \supset (p/s)]\}$

Zachodzi zasada przemienności:

$\vdash (p \supset p)/\{(t \supset t)/[(s/p) \supset (p/s)]\}$

[Wyrażenie „$(s/p) \supset (p/s)$" stanowi] zasadę przemienności dla kreski. [Skądinąd to,] czy mam zasadę przemienności dla kreski, czy dla znaku [„$\vee$"], to wszystko jedno, bo to są tego samego gatunku znaki. Zasada ta wyraża się w zwykłej arytmetyce w sposób następujący:

$(a + b) = (b + a)$

Metoda Nicoda uwalnia nas od przyjmowania tych zasad, ale te zasady bynajmniej nie przestają istnieć. Wszystkie te zasady zostają *de facto* przy pomocy [aksjomatu] Nicoda wprowadzone.

(3) Zasada addycji:

$\vdash p \supset (q \vee p)$

(4) Zasada kojarzenia (assocjacji) (podobnie jak w arytmetyce zwykłej):

$\vdash [p \vee (q \vee r)] \supset [r \vee (p \vee q)]$

Zasada ta odpadła u Hilberta, gdyż udało się ją wyprowadzić z pozostałych aksjomatów.

W zwykłej arytmetyce mamy to samo, gdy się pisze: $a + b + c$; ściśle [rzecz biorąc] powinniśmy pisać:

$[(a + b) + c] = [a + (b + c)]$

(5) [Zasada] sylogizmu (która jest w tym systemie zamaskowana):

$\vdash (p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$

[Zasada ta jest] prawem sumacji w przeciwieństwie do prawa addycji. Twierdzę, że jest to sylogizm zamaskowany. Jest bardzo użyteczne dla zrozumienia aksjomatu Nicoda [zdemaskowanie tego prawa], gdyż jest to zasadniczy schemat sylogizmu, ale schemat zamaskowany. Aby go zdemaskować, wystarczy xamiast p i q dać ich negację. Wówczas dostaniemy:

$\vdash (\sim p \supset \sim q) \supset [(\sim p \vee r) \supset (\sim q \vee r)]$

Albo krócej:

$\vdash (\sim p \supset \sim q) \supset [(p \supset r) \supset (q \supset r)]$

Jeżeli za r damy q, to otrzymamy z aksjomatu Nicoda:

$\vdash (p \supset q)/\{(t \supset t)/[(\sim s/q) \supset (p \supset s)]\}$

Powyższe twierdzenie powinniśmy wyprowadzić z ogólnych twierdzeń. Pokażemy tylko tok myśli.

Z trzeciej zasady mamy twierdzenie:

(3.1) $\vdash p \supset (p \vee q)$

(jako szczególny przypadek addycji). Jeżeli w [zasadzie] addycji na miejsce q podstawię p, to wyjdzie twierdzenie (3.1). Biorę [teraz] tautologię:

$\vdash p \supset (p \vee p)$

$\vdash (p \vee p) \supset p$

E

Nie mamy tu sylogizmu gotowego, tylko sylogizm zniekształcony:

$\vdash (E \supset F) \supset [(E \vee G) \supset (F \vee G)]$

$\underbrace{[(p \vee p) \supset p]}_{E} \supset \{\underbrace{[(p \vee p) \vee \sim p] \supset (p \vee \sim p)}_{F}\}$

Stosując *modus ponens*, mogę E oderwać.

$\vdash [(p \vee p) \vee \sim p] \supset (p \vee \sim p)$

(3.1) $\vdash p \supset (p \vee q)$

(3.2) $\vdash \sim p \vee (p \vee p)$

Permutację piszę schematycznie:

$(E \vee F) \supset (F \vee E)$

$\vdash [\sim p \vee (p \vee p) \supset [(p \vee p) \vee \sim p]$

Na podstawie *modus ponens* mam twierdzenie:

(3.3) $\vdash (p \vee p) \vee \sim p$

$\vdash p \vee \sim p$

Twierdzenie to jeszcze nie jest tym twierdzeniem, o które nam chodzi. Muszę do niego zastosować permutację. Znowu piszę twierdzenie permutacyjne:

$(E \vee F) \supset (F \vee E)$

$(p \vee {\sim}p) \supset ({\sim}p \vee p)$

$\vdash {\sim}p \vee p$

$p \supset p$

[...][6]

[6]Tu urywają się notatki przekazane nam przez Profesora Szałajkę.