Stanisław Leśniewski

O podstawach filozoficznych teorii mnogości

Filozofia Nauki 6/2, 123-139

1998

Filozofia Nauki
Rok VI, 1998, Nr 2(22)

ARCHIWUM

Stanisław Leśniewski

O podstawach filozoficznych teorii mnogości*

Przedrukowany poniżej tekst recenzji (zamieszczonej pierwotnie w Przeglądzie Filozoficznym *r. XVII(1914) z. 4 s. 488–5–7) wart jest – naszym zdaniem przypomnienia – z co najmniej trzech powodów. Po pierwsze, tekst ten rzuca pewne dodatkowe światło na poglądy filozoficzne Stanisława Leśniewskiego z tego okresu; niewielka liczba publikacji, które w ogóle ogłosił twórca mereologii, sprawia, że każdy jego artykuł stanowi bezcenne źródło do poznania jego ówczesnego stanowiska. Po drugie, znajdujemy w tym tekście pewne idee, które zostały rozwinięte dwa lata później w* Podstawach ogólnej teorii mnogości. *Po trzecie wreszcie, tekst ten stanowi żywy przykład precyzyjnej analizy krytycznej, o której już za życia Leśniewskiego krążyły legendy.*

Uwaga: przypisy redakcji zostały zaznaczone gwiazdkami, a pochodzące od redakcji wstawki w tekście głównym – ujęte w nawiasy kwadratowe.

Redakcja

Teoria mnogości na „podstawach filozoficznych" Benedykta Bornsteina. (Recenzja rozprawy dra Bornsteina pt. „Podstawy filozoficzne teorii mnogości"[1])

Dr Benedykt Bornstein napisał rozprawę, w której starał się zaopatrzyć teorię mnogości w „podstawy filozoficzne": uważał on, iż do pewnych sprzeczności, które dają się widzieć w teorii mnogości, prowadzi nie sama teoria mnogości, lecz błędne jej uzasadnienie filozoficzne,[2] a pogląd taki na stan rzeczy, panujący w teorii mnogości, stanowił właśnie zapewne genezę pragnienia autora, by przysporzyć tej nauce trochę myśli, które by ją mogły „filozoficznie" uzasadnić.

* Tytuł pochodzi od redakcji.
[1] *Przegląd Filozoficzny,* 1914, z. 2.
[2] *I.c.*, s. 193.

Teoria mnogości jest dyscypliną teoretyczną, której takie lub inne losy posiadają pierwszorzędne znaczenie naukowe: z jednej strony – od pewnego czasu problematy jej stają się opoką, na której są rozwiązywane rozmaite ważne zagadnienia analizy matematycznej i geometrii; z drugiej strony – związek teorii mnogości z licznymi badaniami w zakresie „logistyki", „logiki klas" i metafizyki czyni ją pomocnym narzędziem pracy na polu tzw. nauk „filozoficznych".

Teoria mnogości powstała dopiero w ostatnich dziesięcioleciach wieku ubiegłego, jest więc nauką młodą; kwestie „podstaw" stanowią dotychczas jeden z najsłabszych punktów w systemie tej nauki, są wciąż opracowywane z rozmaitych punktów widzenia, czynią tedy z rozprawy p. Bornsteina pracę, posiadającą charakter naukowej „aktualności" ...

Zadaniem notatki niniejszej jest zdanie sprawy z wartości pracy p. Bornsteina w zakresie analizy podstaw teorii mnogości: mam tu zamiar odpowiedzieć na pytanie, czy i w jakim stopniu „podstawy filozoficzne" teorii mnogości, wykoncypowane przez p. Bornsteina, przyczyniają się do usunięcia z tej nauki jakichś sprzeczności, tkwiących w niej dotąd, do uzasadnienia tego, co jest dotychczas nieuzasadnione, a wyjaśnienia tego, co nie jest jasne.

1. TERMINY – „ILOŚĆ" I „LICZBA" U P. BORNSTEINA

Na początku ustępu I rozprawy p. Bornsteina[3] znajdujemy zdanie następujące: „Jeżeli mnogość elementów, z których każdy istnieje indywidualnie", „tj. jako różna od innych jednostka, rozpatrujemy *tylko jako mnogość jednostek*, to rozpatrujemy ją z punktu widzenia ilości, przy czym ta mnogość jednostek stanowi właśnie *ilość, względnie liczbę* istniejących indywidualnie elementów danej mnogości". Ponieważ, jak widzimy z tego zdania, wyrażenie „istnieje indywidualnie" jest tu interpretowane przez wyrażenie „istnieje jako różna od innych jednostka", więc całe zdanie należy interpretować tak: „Jeżeli mnogość elementów, z których każdy istnieje jako różna od innych jednostka, rozpatrujemy tylko jako mnogość jednostek, to rozpatrujemy ją z punktu widzenia ilości, przy czym ta mnogość jednostek stanowi właśnie ilość, względnie liczbę istniejących jako jednostki, różne od innych, elementy danej mnogości". Stąd zaś: przez wyrażenie „ilość, względnie liczba elementów danej mnogości, istniejących jako jednostki, różne od innych" rozumie p. Bornstein mnogość jednostek, jako którą się „rozpatruje" mnogość daną. Możliwe tu są dalej dwie ewentualności: albo się „rozpatruje" mnogość daną jako taką mnogość jednostek, jaką jest mnogość dana, albo też „rozpatruje" się ją jako taką mnogość jednostek, jaką mnogość dana nie jest. Druga z tych ewentualności wskazywałaby na to, że się „rozpatruje" daną mnogość błędnie, jest bowiem z koniecznością błędne takie „rozpatrywanie" jakiegoś przedmiotu, które polega na tym, że się go „rozpat-

[3] *Lc.*, s. 183.

ruje", jako taki, jakim dany przedmiot nie jest. Gdyby pewna mnogość *m* jednostek była „ilością, względnie liczbą" „istniejących indywidualnie" elementów mnogości danej już w takim razie, kiedy dana mnogość jest „rozpatrywana" jako mnogość *m* – niezależnie od tego, czy mnogość dana jest *m*, czy też nie jest *m*, to znaczy niezależnie od tego, czy „rozpatrywanie" jej jest błędne, czy poprawne, to dana mnogość miałaby tyle „ilości, względnie liczb", ile by było różnych – poprawnych lub błędnych – jej „rozpatrywań"; wystarczyłoby naówczas, aby mnogość dana była „rozpatrywana" raz jako mnogość *m* jednostek, innym znów razem jako różna od mnogości *m* mnogość jednostek *n* – do tego, by każda z dwóch różnych od siebie mnogości jednostek – *m* oraz *n* – była „ilością, względnie liczbą" jednej i tej samej mnogości danej. Konsekwencja taka byłaby sprzeczna ze stanowiskiem p. Bornsteina, który uważa np. że nawet dwom mnogościom równoważnym o elementach „istniejących indywidualnie" odpowiada jedna tylko liczba, co byłoby niemożliwe, gdyby którejkolwiek z tych mnogości odpowiadały dwie liczby różne. Ponieważ tedy prowadzi do sprzeczności ze stanowiskiem teoretycznym p. Bornsteina przypuszczenie nasze, iż pewna mnogość *m* jest dla p. Bornsteina „ilością, względnie liczbą" „istniejących indywidualnie" elementów mnogości danej już w takim razie, kiedy dana mnogość jest „rozpatrywana" jako mnogość *m* – niezależnie od tego, czy mnogość dana jest m, czy też nie jest *m* – więc pozostaje tylko przypuszczenie drugie, iż mnogość *m* uważa p. Bornstein za „ilość, względnie liczbę" „istniejących indywidualnie" elementów mnogości danej nie już wtedy, gdy dana mnogość jest „rozpatrywana" jako mnogość jednostek *m*, lecz dopiero wtedy, gdy mnogość dana jest rzeczywiście mnogością jednostek *m*. Wypada stąd więc, iż jakaś mnogość *m* może być „ilością, względnie liczbą" dla samej tylko mnogości *m*, to znaczy dla samej siebie: tak tedy „ilością, względnie liczbą" mnogości danej może być tylko sama mnogość dana; inaczej – dowolna mnogość jednostek, różnych od innych, oraz „ilość, względnie liczba" tej mnogości – są tym samym przedmiotem; tak więc:

(I) ilością mnogości *M* może być tylko mnogość *M*;

(II) liczbą mnogości *M* może być tylko mnogość *M*.

Z porównania tez (I) i (II) wypada:

(III) ilość mnogości *M* oraz liczba mnogości *M* są tym samym przedmiotem.

Odnośnik 2 rozprawy p. Bornsteina[4] brzmi: „Między ilością a liczbą istnieje tu taka różnica, jak np. między białością rzeczywistą a pojęciem białości; ilość bowiem jest cechą rzeczywistą mnogości elementów istniejących indywidualnie, liczba zaś jest odpowiednikiem pojęciowym tej cechy".

Z odnośnika tego widzimy, iż ilość mnogości jest cechą tej mnogości, a więc nie jest samą mnogością, liczba zaś mnogości jest pojęciem pewnej cechy mnogości, a mianowicie pojęciem *m* ilości; wypada stąd, iż liczba danej mnogości nie jest jej ilością, albowiem jest pojęciem ilości mnogości, i nie jest też samą daną mnogością,

[4] *l.c.*

albowiem sama mnogość i pojęcie pewnej cechy tej mnogości (w naszym wypadku pojęcie ilości) nie mogą być tym samym przedmiotem. Tak więc:

(IV) ilością mnogości *M* nie może być mnogość *M*;
(V) ilość mnogości *M* oraz liczba mnogości *M* nie są tym samym przedmiotem;
(VI) liczbą mnogości *M* nie może być mnogość *M*.

Teza (I) jest sprzeczna z tezą (IV), teza (II) – z tezą (VI), teza (III) – z tezą (IV). Tak więc analiza dwóch terminów p. Bornsteina – „ilość" oraz „liczba" – doprowadziła nas już do stwierdzenia trzech sprzeczności w jego „filozoficznej" koncepcji.

2. TERMINY – „ISTNIEJĄCY INDYWIDUALNIE" I „ISTNIEJĄCY FORMALNIE" – U P. BORNSTEINA

Z cytatu z pracy p. Bornsteina, przytoczonego na początku ustępu 1, widzimy, iż przez element mnogości „istniejący indywidualnie" rozumie p. Bornstein taki element, który istnieje „jako różna od innych jednostka". Nie spotykam się w pracy p. Bornsteina z definicją wyrazu „jednostka", chcę więc interpretować w wyrażeniu powyższym wyraz „jednostka" w taki sposób, by mógł on oznaczać wszelki „jeden przedmiot" (tak, jak się zdaje, ten „trudny" wyraz jest używany w przeważnej ilości wypadków); że zaś każdy przedmiot może być niewątpliwie z pewnego stanowiska rozważany jako „jeden przedmiot", więc wyraz „jednostka" może oznaczać tyleż, co wyraz „przedmiot". Przy takiej interpretacji wyrazu „jednostka" (a innej, jak już zaznaczyłem, p. Bornstein nie podaje) – elementem mnogości „istniejącym indywidualnie" byłby każdy taki przedmiot, który istnieje jako przedmiot, różny od innych przedmiotów. Każdy jednak przedmiot jest przynajmniej numerycznie różny od innych przedmiotów, jeżeli więc można powiedzieć o jakimkolwiek przedmiocie, że „istnieje", to można o nim z pewnością powiedzieć i to, że istnieje jako przedmiot, różny od innych przedmiotów; w ten sposób wszelki „istniejący" element mnogości „istnieje indywidualnie"; inaczej – elementem mnogości, „istniejącym indywidualnie", jest wszelki element mnogości, który „istnieje". Nie spotykam się w rozprawie p. Bornsteina z definicją wyrazu „istniejący"; muszę więc interpretować wyraz ten „na własną rękę", jak to już uczyniłem z niezdefiniowanym przez p. Bornsteina wyrazem „jednostka". W rozprawie swojej „Przyczynek do analizy zdań egzystencjalnych"[5] interpretowałem zdanie typu „*A* istnieje" przez zdanie typu „Pewien przedmiot jest *A*". Ponieważ w zastosowaniu do każdego elementu dowolnej mnogości jest prawdą, iż pewien przedmiot jest tym właśnie elementem danej mnogości, więc „istnieje" w tym sensie każdy element dowolnej mnogości. Nadajmy teraz wyrazowi „ist-

[5] S. Leśniewski, „Przyczynek do analizy zdań egzystencjalnych", *Przegląd Filozoficzny*, 1911. [Przedruk w: *Filozfia Nauki* r. II(1994) nr 1, s. 117–143.]

niejący" funkcję inną: przypuśćmy, jak to nieraz czynią matematycy,[6] iż wyraz „istniejący" znaczy „wolny od sprzeczności". I w tym sensie każdy element dowolnej mnogości „istnieje", ponieważ, jak każdy w ogóle przedmiot, nie może on być sprzeczny, musi tedy być „wolnym od sprzeczności[7] (zaznaczam, iż zasadę niesprzeczności uznaje i p. Bornstein, który się posługuje tą zasadą np. przy dowodzie lematu 3[8]). Przy obu więc interpretacjach wyrazu „istnieje" (a swojej interpretacji tego wyrazu p. Bornstein, jak już zauważyłem, nie podaje) – każdy element dowolnej mnogości „istnieje"; ponieważ jednak, jak widzieliśmy wyżej, elementem mnogości, „istniejącym indywidualnie", jest wszelki element mnogości, który „istnieje", więc:

(VII) każdy element każdej mnogości „istnieje indywidualnie".

Na stronicy 187 w rozprawie p. Bornsteina[9] znajdujemy ustęp nastepujący: „Podobnie jak o elementach, danych indywidualnie (aktualnie, materialnie), podobnie też o elementach pewnej mnogości, danych formalnie, mówić będziemy, że istnieją formalnie". Z niekształtnego tego zdania (gdyby się je chciało ująć ściśle, to by się doszło do wniosku, iż o elementach „danych indywidualnie" „będzie mówił" p. Bornstein, że „istnieją one formalnie", co by było sprzeczne z innymi wypowiedziami p. Bornsteina), należy się prawdopodobnie domyślać, iż podobnie jak o elementach, „danych indywidualnie", mówi p. Bornstein, że „istnieją indywidualnie" – mówić będzie o elementach „danych formalnie", że „istnieją formalnie". Tak więc przez element „istniejący indywidualnie" rozumie tu p. Bornstein wszelki element, który jest „dany indywidualnie", Chcąc zdać sprawę z tego, co znaczy u p. Bornsteina wyrażenie „element dany indywidualnie", biorę następujący ustęp ze stronicy 186:[10] „Mnogość skończona może być dana albo za pomocą wyszczególnienia jej elementów, albo też za pomocą podania ogólnej definicji lub też prawa tworzenia jej elementów. W pierwszym przypadku mówić będziemy, że elementy mnogości dane są indywidualnie (aktualnie, materialnie), w innych – że dane są formalnie." Z ustępu tego widzimy, iż przez element „dany indywidualnie" rozumie p. Bornstein element mnogości, która „jest dana za pomocą wyszczególnienia jej elementów". P. Bornstein nie podaje definicji wyrazu „dana": przypuszczam, że wyraz ten w niezupełnie dla mnie jasnym wyrażeniu „dana za pomocą wyszczególnienia jej elementów" znaczy mniej więcej tyleż, co „określona", „wyznaczona" lub coś podobnego. W tym sensie nie mogłaby być „daną za pomocą wyszczególnienia jej elementów" żadna mnogość nieskończona, jak np. mnogość wszystkich liczb, żadna bowiem taka mnogość nie

[6] Por. np. H. Poincarí, *Nauka i metoda*; przekład M.H. Horowitza, Warszawa–Lwów 1911, s. 137 i 138.

[7] Por. Stanisław Leśniewski, „Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności", *Przegląd Filozoficzny*, 1912. [Przedruk w: *Filozfia Nauki* r. II(1994) nr 2, s. 117–147.]

[8] [B.] Bornstein, *lc.*, s. 185.

[9] *Lc.*

[10] *Lc.*

może być, jak wiemy, „wyznaczona" za pomocą wyszczególnienia wszystkich jej elementów. Tak więc nie każda mnogość jest „dana za pomocą wyszczególnienia jej elementów". W myśl powyższej definicji wyrażenia „element dany indywidualnie" – nie jest „danym indywidualnie" żaden element takiej mnogości, która nie jest „dana za pomocą wyszczególnienia jej elementów"; tak więc nie każdy element mnogości jest „dany indywidualnie". Ponieważ jednak, jak widzieliśmy nieco wyżej, przez element „istniejący indywidualnie", rozumie p. Bornstein element „dany indywidualnie", więc nie każdy element mnogości „istnieje indywidualnie". Mamy więc:

(VIII) nieprawdą jest, że każdy element każdej mnogości „istnieje indywidualnie".

Przyjrzyjmy się przez chwilę mnogości liczb naturalnych, mniejszych od 4. Mnogość ta może być, rzecz prosta, „wyznaczona" za pomocą wyszczególnienia jej elementów – 1, 2 i 3, z czego wypada, iż każdy z tych właśnie elementów jest „dany indywidualnie", inaczej – „istnieje indywidualnie". Powstać może kwestia, czy elementy te, to znaczy liczby – 1, 2, 3 – „istnieją" również „formalnie". Z cytowanego wyżej ustępu pracy p. Bornsteina ze stronicy 187[11] widzimy, iż przez element, „istniejący formalnie", rozumie p. Bornstein wszelki taki element, który jest „dany formalnie": elementem zaś „danym formalnie" nazywa, jak widzieliśmy wyżej w ustępie ze stronicy 186,[12] element takiej mnogości, która jest „dana za pomocą podania ogólnej definicji lub też prawa tworzenia jej elementów". Mnogość liczb naturalnych, mniejszych od 4, jest taką właśnie mnogością, albowiem jest „wyznaczona" („dana", jak mówi p. Bornstein) przez wyrażenie „liczba naturalna, mniejsza od 4", które, jak mówią matematycy, „definiuje" wszystkie elementy tej mnogości, a więc jest ich „definicją". Wypada stąd, iż każdy z elementów mnogości liczb naturalnych, mniejszych od 4, to znaczy każda z liczb – 1, 2, 3 – jest „dana formalnie"; z definicji zaś w takim razie każda z liczb – 1, 2, 3 – „formalnie istnieje". Widzieliśmy przedtem, że te same liczby – 1, 2, 3 – „istnieją" również „indywidualnie"; wypada stąd [że]:

(IX) niektóre elementy mnogości, „istniejące formalnie", „istnieją indywidualnie".

Na stronicy 187[13] znajdujemy u p. Bornsteina jeszcze ustęp taki: „Trzeba tu przy tym jasno sobie uprzytomnić, że termin „istnienie formalne" elementów jest tylko sposobem wygodnym wyrażania się, nie oznacza jednak zupełnie rodzaju bytu poszczególnych elementów: przeciwnie, oznacza on, jak wiemy, że elementy mnogości, jako takie, jako elementy poszczególne, nie istnieją, istnieje zaś istotnie, przy tym jako indywiduum, tylko ich *forma*, tj. prawo tworzenia lub odnośna definicja".

[11] *Lc.*
[12] *Lc.*
[13] *Lc.*

Podkreśla więc tu p. Bornstein z całym naciskiem, iż termin „istnienie formalne" elementów „oznacza", że elementy mnogości „jako takie, jako elementy poszczególne, nie istnieją"; ponieważ wyrażenie „nie istnieją, jako takie, jako elementy poszczególne" ma zapewne znaczyć tyleż, co „nie istnieją indywidualnie", więc wypada ze zdania powyższego, iż elementy, którym przysługuje „istnienie formalne" „nie istnieją indywidualnie". Tak tedy:

(X) żaden element mnogości, „istniejący formalnie", nie „istnieje indywidualnie".

Teza (VIII) jest sprzeczna z tezą (VII), a teza (IX) – z tezą (X). Analiza więc jeszcze dwóch terminów, którymi operuje p. Bornstein, doprowadziła do stwierdzenia nowych sprzeczności w jego „filozoficznych podstawach".

3. „LEMAT 2" P. BORNSTEINA

Swój „lemat 2" formułuje p. Bornstein: „W mnogości elementów, istniejących indywidualnie, części właściwej tej mnogości nie może odpowiadać ta sama liczba, co całości".[14] Wiemy już z ustępu 2, że na stronicach 183 i 187 podaje p. Bornstein dwie różne interpretacje wyrażenia „istniejący indywidualnie"; dwie te interpretacje prowadzą do dwóch sprzecznych pomiędzy sobą rezultatów, którym są tezy (VII) i (VIII). Interpretując tedy „lemat 2" p. Bornsteina, muszę nadać w nim wyrażeniu „istniejący indywidualnie" kolejno oba wykluczające się wzajemnie znaczenia.

W pierwszym wypadku (A) „lemat 2" p. Bornsteina przybierze postać następującą: „W mnogości elementów, istniejących jako jednostki, różne od innych, części właściwej tej mnogości nie może odpowiadać ta sama liczba, co całości".

W drugim wypadku (B) „lemat" będzie wyglądał tak: „W mnogości elementów, danych indywidualnie, części właściwej tej mnogości nie może odpowiadać ta sama liczba, co całości".

W obydwu wypadkach może tkwić pewna dwuznaczność w wyrazie „odpowiadać", użytym w zastosowaniu do „liczby". Mogą się tu narzucać od razu dwie takie interpretacje:

(a) „liczba m odpowiada mnogości M" znaczy „liczba m jest liczbą mnogości M";

(b) „liczba m odpowiada mnogości M" znaczy „liczba m jest równoważna mnogości M".

Interpretacja (a) nie daje się tu zastosować, albowiem, jak wiemy z tezy (II), liczbą mnogości M może być tylko sama mnogość M, sama więc tylko mnogość M może w tym sensie być liczbą „odpowiadającą" mnogości M; liczba tedy, „odpowiadająca"

[14] *Lc.*, s. 184.

mnogości M, nie może „odpowiadać" jakiejś innej (nawet równoważnej z mnogością M) mnogości N, której, jak wiemy, może „odpowiadać" jako liczba, jedynie sama mnogość N; jedna i ta sama liczba nie może więc „odpowiadać" w tym sensie dwom mnogościom równoważnym, co stoi w sprzeczności z lematem 1 p. Bornsteina, stwierdzającym, iż „dwom mnogościom równoważnym o elementach, istniejących indywidualnie, odpowiada ta sama liczba".[15]

Wobec sprzeczności, do której prowadzi interpretacja (a) wyrazu „odpowiadać", będę przy analizie „lematu 2" p. Bornsteina stosował interpretację (b).

Po tym wyjaśnieniu „lemat 2" w wypadku (A) przybierze postać następującą: „W mnogości elementów, istniejących jako jednostki, różne od innych, części właściwej tej mnogości nie może być równoważna ta sama liczba, co całości".

Ustaliłem już w ustępie 2, iż każdy element każdej mnogości istnieje jako jednostka, różna od innych (teza (VII)); każda tedy mnogość jest mnogością elementów, istniejących jako jednostki, różne od innych; można więc sformułować „lemat 2" (A) krócej: „W żadnej mnogości części właściwej tej mnogości nie może być równoważna ta sama liczba, co całości".

W sformułowaniu takim „lemat 2" p. Bornsteina jest tezą fałszywą: żadna mnogość nadskończona nie ulega temu „lematowi"; przykład: mnogości wszystkich liczb parzystych, która jest częścią właściwą mnogości wszystkich liczb naturalnych, jest równoważna ta sama liczba, co mnogości wszystkich liczb naturalnych; komentarz: uważajmy** mnogość wszystkich liczb całkowitych ujemnych; w myśl tezy (VII) każdy element tej mnogości (nazwijmy ją „U") „istnieje indywidualnie"; mnogość U jest, jak wiemy z elementarnej teorii mnogości, równoważna zarówno mnogości wszystkich liczb parzystych, jak mnogości wszystkich liczb naturalnych; ponieważ mnogość U jest, jak widzieliśmy, liczbą (a mianowicie liczbą samej mnogości U), więc możemy ustalić, iż mnogości wszystkich liczb naturalnych jest równoważna ta sama liczba, co właściwej części tej mnogości.

W wypadku (B) „lemat 2" p. Bornsteina, stanowiąc tezę prawdziwą, jest trywialnie prostą konsekwencją znanego z elementarnej teorii mnogości twierdzenia, że mnogość skończona nie może być równoważna swej właściwej części. Komentarz: ponieważ, jak wiemy z analizy cytowanego wyżej ustępu pracy p. Bornsteina ze stronicy 186,[16] elementem „danym indywidualnie" jest element mnogości, „wyznaczonej" za pomocą wyszczególnienia jej elementów, więc mnogość elementów, „danych indywidualnie" jest mnogością elementów mnogości, „wyznaczonej" za pomocą wyszczególnienia jej elementów, czyli jest mnogością, „wyznaczoną" za pomocą wyszczególnienia jej elementów; mnogość taka musi być mnogością skończoną, gdyby bowiem taką nie była, nie mógłby być dokonany proces wyszczegól-

---

[15] Por. *l.c.*, s. 183.

[16] *L.c.*

** Tu: „rozważmy".

nienia nieskończonego szeregu jej elementów, nie mogłaby więc ta mnogość być za pomocą wyszczególnienia jej elementów „wyznaczona"; jako zaś mnogość skończona, nie może ona być równoważna swej właściwej części.

Zarówno przy interpretacji (A), przy której „lemat 2" p. Bornsteina jest tezą fałszywą, jak przy interpretacji (B), przy której „lemat" ten jest trywialną prawdą, nie wynika on z przedstawionego przez p. Bornsteina „dowodu": „dowód" ten jest jednym z brutalnych przykładów błędnych rozumowań, którymi tak wspaniałomyślnie szafuje p. Bornstein. Przytaczam „dowód" p. Bornsteina *in extenso*, aby ułatwić kontrolę mojej krytyki czytelnikom – na wypadek, jeżeli się tacy znajdą.

„Niech M będzie mnogością elementów, z których każdy istnieje indywidualnie, m zaś odnośną mnogością jednostek, tj. liczbą, odpowiadającą mnogości M. Niech dalej N będzie mnogością innych elementów istniejących indywidualnie, n zaś odnośną mnogością *jednostek*, tj. liczbą, odpowiadającą mnogości N. Dołączmy elementy mnogości N do elementów mnogości M i utwórzmy w ten sposób mnogość $M + N$; wtedy liczbą odpowiadającą mnogości $M + N$ będzie – na zasadzie definicji liczby, odpowiadającej mnogości elementów istniejących indywidualnie – mnogość, składająca się z m oraz n jednostek ($m + n$ jednostek). Mnogość jednak składająca się z m oraz n jednostek nie może być ta sama, co liczba odpowiadająca części właściwej tej mnogości – M. A więc w mnogości elementów, istniejących indywidualnie, części właściwej tej mnogości nie może odpowiadać ta sama liczba, co całości".[17]

„Dowód" tu sformułowany zawiera w sobie przynajmniej dwa błędy.

Błąd I: nieprawdą jest, że liczbą, „odpowiadającą" mnogości $M + N$, musi być mnogość, składająca się z $m + n$ jednostek. Komentarz: uważajmy[***] dwie następujące mnogości: (1) mnogość synów Jakuba (niech to będzie mnogość „M"); (2) mnogość apostołów (niech to będzie mnogość „N"); każdy element mnogości M, jak również każdy element mnogości N, „istnieje indywidualnie" w obu przyjmowanych przez p. Bornsteina, a wspominanych przeze mnie wyżej znaczeniach wyrażenia „istniejący indywidualnie"; tak więc zarówno mnogość M, jak mnogość N, posiadają liczby; na podstawie tezy (II) – liczbą mnogości M jest mnogość M, liczbą zaś mnogości N jest mnogość N; ponieważ więc zarówno mnogość M, jak mnogość N są liczbami, możemy przy wyrazach „M" oraz „N" dodawać dowolnie – wyraz „mnogość" lub też wyraz „liczba"; ponieważ mnogości M i N są z założenia równoważne, więc możemy napisać:

(1) mnogość M jest równoważna liczbie N,
(2) mnogość N jest równoważna liczbie M.

Ponieważ, jak już wyjaśniłem na początku niniejszego ustępu 3, wyrażenie „liczba m odpowiada mnogości M" znaczy u p. Bornsteina właśnie tyle, co wyrażenie „liczba m jest równoważna mnogości M", więc mogę dwa zdania powyższe sformułować tak:

[17] *l.c.*, s. 184 i 185.
[***] Zob. przyp. [**].

(1) mnogości M „odpowiada" liczba N,
(2) mnogości M „odpowiada" liczba N.

Kładąc $m = N$, a $n = M$, otrzymuję:

(1) mnogości M „odpowiada" liczba m,
(2) mnogości N „odpowiada" liczba n.

Jeżeli przyjmiemy kwestionowane przeze mnie pod rubryką „Błąd I" twierdzenie p. Borsnteina, to z dwóch zdań powyższych otrzymujemy: mnogości $M + N$ „odpowiada" mnogość, składająca się z $m + n$ jednostek. Atoli – „być mnogością, składającą się z $m + n$ jednostek" znaczy to „być mnogością jednostek, której mocą jest $m + n$". Tak więc mnogości $M + N$ „odpowiada" mnogość jednostek, której mocą jest $m + n$. Zastępując z powrotem „m" przez „N", a „n" przez „M", otrzymujemy:

mnogości $M + N$ „odpowiada" mnogość jednostek, której mocą jest $N + M$;
stąd:
mnogość $M + N$ jest równoważna mnogości, której mocą jest $M + N$.

Ponieważ mnogość $M + N$ jest równoważna mnogości, której mocą jest $M + N$, więc musi się znaleźć pewna taka mnogość, której mocą jest $M + N$ (gdyby bowiem takiej mnogości nie było, to nie mogłaby żadna mnogość być tej mnogości równoważna); tak tedy mnogość $M + N$ jest mocą jakiejś mnogości; podstawiając zamiast „M" i „N" ich początkowe znaczenia, otrzymujemy:

suma mnogości synów Jakuba i apostołów jest mocą jakiejś mnogości; stąd zaś: pewna mnogość ludzi, posiadająca moc 24, jest mocą jakiejś mnogości.

Wniosek ten jest oczywiście nonsensowny; sama mnogość ludzi, posiadająca moc 24, nie może być, rzecz prosta, mocą żadnej mnogości; mocą jakiejś mnogości może być co najwyżej *moc* mnogości ludzi, posiadającej moc 24 – to znaczy sama moc 24.

Błąd II: nieprawdą jest, że mnogość składająca się z $m + n$ jednostek, nie może być tą samą, co mnogość, składająca się z m jednostek. W myśl wyjaśnień moich w ustępie pod rubryką „Błąd I" – wyrażenie „mnogość, składająca się z $m + n$ jednostek" oznacza mnogość jednostek, której mocą jest $m + n$, wyrażenie zaś „mnogość składająca się z m jednostek" oznacza mnogość jednostek, której mocą jest m; tak więc teza p. Bornsteina, podana przeze mnie pod rubryką „Błąd II", może być sformułowana w sposób następujący: „mnogość jednostek, której mocą jest $m + n$, nie może być tą samą, co mnogość jednostek, której mocą jest m". Uważajmy*** – dla wykazania fałszywości tego twierdzenia – dwie mnogości – M i N; niech M będzie mnogością wszystkich liczb naturalnych, większych od 5, N zaś niech będzie mnogością wszystkich liczb naturalnych, mniejszych od 6. Dodając do siebie obie

*** Por. przyp. **.

mnogości – M i N, otrzymamy mnogość $M + N$, to znaczy – w naszym wypadku – mnogość wszystkich liczb naturalnych: jak widzimy, mocą mnogości M jest *ap* (*przez literę „a"* oznaczam moc mnogości przeliczalnych), mocą mnogości N jest 5, mocą mnogości $M + N$ jest a. Zauważyłem już, że każdy przedmiot może być rozpatrywany jako „jednostka", jest więc „jednostką" i wszelka liczba naturalna; wypada stąd, iż mnogość $M + N$ jest mnogością jednostek; tak więc pewna mnogość jednostek, a mianowicie $M + N$, posiada moc a. Połóżmy teraz $m = a$, $n = 5$. Otrzymujemy: mnogość M ma moc m, mnogość N – moc n, mnogość $M + N$ – moc m. Na podstawie wyjaśnień samego p. Bornsteina na stronicach 191 i 193[18] wiemy, iż przez „$m + n$" rozumie p. Bornstein moc mnogości $M + N$, jeżeli mocą mnogości M jest m, mocą zaś mnogości N jest n.[19] Tak więc mocą mnogości $M + N$ jest $m + n$. Wypada stąd, iż jedna i ta sama mnogość jednostek, a mianowicie mnogość $M + N$, posiada zarówno moc m, jak moc $m + n$. Inaczej: mnogość jednostek, której mocą jest $m + n$, może być ta sama, co mnogość jednostek, której mocą jest m. Inaczej: mnogość, składająca się z $m + n$ jednostek, może być ta sama, co mnogość, składająca się z m jednostek.

Jak widzimy – analiza „lematu 2" p. Bornsteina doprowadza do następujących wyników: (1) „lemat 2" dopuszcza dwie interpretacje: jedna z nich daje tezę fałszywą, druga jest trywialnie prostą konsekwencją pewnego twierdzenia, znanego i uznanego w elementarnej teorii mnogości; (2) żadna z tych interpretacji nie opiera się na przedstawionym przez p. Bornsteina „dowodzie", ten bowiem zawiera w sobie co najmniej dwa błędy.

4. „LEMAT 3" P. BORNSTEINA

„Lemat 3" p. Bornsteina brzmi, jak następuje: „Mnogość elementów, istniejących indywidualnie, nie może być równoważna swej właściwej części".[20]

Zależnie od znaczenia wyrażenia „istniejący indywidualnie", „lemat" ten może być interpretowany dwojako – równolegle do dwóch interpretacji „lematu 2":

Interpretacja (A): „Mnogość elementów, istniejących jako jednostki, różne od innych, nie może być równoważna swej właściwej części".

Interpretacja (B): „Mnogość elementów, danych indywidualnie, nie może być równoważna swej właściwej części".

Ponieważ, jak już ustaliłem w krytyce „lematu 2" w interpretacji (A), każda mnogość jest mnogością elementów, istniejących jako jednostki, różne od innych, więc „lemat 3" może brzmieć krócej tak: „żadna mnogość nie może być równoważna swej właściwej części". Twierdzenie to jest oczywiście twierdzeniem fałszywym,

---

[18] *Lc.*

[19] Na stronicach 191 i 192 używa p. Bornstein nie liter „*m*" i „*n*", lecz liter „*a*" i „*b*"; nie zmienia to jednak naturalnie postaci rzeczy.

[20] *Lc.*, s. 185.

zaprzecza mu też sam p. Bornstein, pisząc na stronicy 186 w odnośniku 8: „Tak np. mnogość wszystkich liczb całkowitych dodatnich daje się jedno-jednoznacznie przyporządkować swej właściwej części – mnogości liczb parzystych dodatnich".

„Lemat 3" w interpretacji (B) jest, jak i „lemat 2" w interpretacji (B), trywialną konsekwencją twierdzenia z elementarnej teorii mnogości; mnogość przedmiotów, „danych indywidualnie", nie może być równoważna swej właściwej części dlatego, iż (jak wiemy z ustępu o „lemacie 2" w interpretacji (B)) jest mnogością skończoną, uczy zaś nas właśnie elementarna teoria mnogości, iż żadna mnogość skończona nie może być równoważna swej właściwej części.

Będzie się może komuś zdawało, iż jestem ujemnie uprzedzony do zasług, które położył p. Bornstein na polu „filozoficznego uzasadnienia" teorii mnogości; cóż stąd, powie ktoś, że wyniki badań p. Bornsteina, jak np. „lematy" 2 i 3 w interpretacji (B) są proste? Wiele jest wielkich odkryć naukowych, które się wydają bardzo prostymi, gdy zostały dokonane! ... Pierwszorzędnej wagi teorie naukowe można by – przy dobrych chęciach – nazwać „trywialnymi" konsekwencjami twierdzeń znanych! ...

Zdaje mi się, że nie uratuje p. Bornsteina nawet taki właśnie sposób „zaszachowania" jego krytyka: „lematy" 2 i 3 w interpretacji (B) nie są bynajmniej udowodnione przez p. Bornsteina: opierają się one na „dowodzie" „lematu 2", który zawiera w sobie dwa błędy, jak to już wyżej wykazałem. Tak więc, czy owak – „krucho" by było z teorią mnogości, która by się chciała oprzeć na podstawach, budowanych z „lematów" p. Bornsteina ...

5. „BEZWZGLĘDNIE PEWNE" TWIERDZENIE P. BORNSTEINA

Na podstawie trzech lematów, z których dwa były wyżej przedmiotem mojej krytyki, buduje p. Bornstein „zasadnicze", jak twierdzi, i „bezwzględnie pewne" twierdzenie następujące: „Mnogość elementów, istniejących indywidualnie, może być tylko skończona".[21]

Twierdzenie to dopuszcza, jak i „lematy" 2 i 3, dwie interpretacje:

Interpretacja (A): „Mnogość elementów, istniejących jako jednostki, różne od innych, może być tylko skończona".

Interpretacja (B): „Mnogość elementów, danych indywidualnie, może być tylko skończona".

Twierdzenie p. Bornsteina w interpretacji (A) można, jak wiemy z ustępów 3 i 4, przedstawić w formie takiej: „Wszelka mnogość może być tylko skończona".

Teza nowo otrzymana jest oczywiście błędna, zaprzecza też jej stanowczo sam p. Bornstein, twierdząc, iż „istnienie mnogości nieskończonych jest faktem".[22]

---

[21] *Lc.*, s. 186.

[22] *Lc.*, odnośnik 8.

Twierdzenie p. Bornsteina w interpretacji (B) może być również, jak już wiemy, sformułowane tak: „Mnogość, „wyznaczona" za pomocą wyszczególnienia jej elementów, może być tylko skończona". Twierdzenie takie jest banalną prawdą, o której „wszyscy dawno wiedzą", i która nie potrzebuje w najmniejszym nawet stopniu nieuzasadniających jej zresztą lematów p. Bornsteina.

Spójrzmy teraz jeszcze z pewnej nowej, a jak zobaczymy, bardzo „drastycznej" strony na „bezwzględnie pewne" twierdzenie p. Bornsteina.

Skoro mnogość elementów, istniejących indywidualnie, może być tylko skończona, więc:

(XI) żadna mnogość nieskończona nie jest mnogością elementów, istniejących indywidualnie.

Uważajmy***** dowolną mnogość nieskończoną $M = \{E\}$;[23] każdy z elementów mnogości M, to znaczy każde E, możemy rozważać jako element pewnej mnogości skończonej o jednym elemencie: elementy mnogości M – E_a, E_b, E_c ... są elementami odpowiednich mnogości o jednym elemencie – $\{E_a\}$, $\{E_b\}$, $\{E_c\}$... . Każda z mnogości – $\{E_a\}$, $\{E_b\}$, $\{E_c\}$... – jest, jako mnogość skończona, mnogością elementów, istniejących indywidualnie, pisze bowiem p. Bornstein z jednej strony, iż „mnogości skończone i nieskończone różnią się posiadaniem, ew. nieposiadaniem odpowiedniej ilości elementów",[24] a z drugiej strony, że „konieczny warunek istnienia ilości ... elementów danej mnogości polega na indywidualnym istnieniu jej elementów",[25] z obu zaś tych wypowiedzi wypada, iż wszelka mnogość skończona musi odpowiadać „koniecznemu warunkowi istnienia" ilości swoich elementów, to znaczy być mnogością elementów, istniejących indywidualnie. Skoro więc każda z mnogości – $\{E_a\}$, $\{E_b\}$, $\{E_c\}$ ... – jest mnogością elementów, istniejących indywidualnie, to elementy każdej z tych mnogości istnieją indywidualnie; istnieją więc indywidualnie – E_a, E_b, E_c ..., to znaczy istnieją indywidualnie wszystkie E; skoro zaś każde E istnieje indywidualnie, więc mnogość $M = \{E\}$ jest mnogością elementów, istniejących indywidualnie. Ponieważ rozumowanie, przeprowadzone przeze mnie w zastosowaniu do nieskończonej mnogości M, ma walor dla wszelkiej mnogości nieskończonej, więc:

(XII) każda mnogość nieskończona jest mnogością elementów, istniejących indywidualnie.

Tak więc „bezwzględnie pewne" twierdzenie p. Bornsteina doprowadza nas do dwóch konsekwencji, które są dwoma zdaniami przeciwnymi – (XI) i (XII). „Filozoficzne podstawy", w które wyposaża teorię mnogości p. Bornstein, otwierają

***** Por. przyp. **.

[23] Za pomocą wyrażenia „$\{E\}$" oznaczam, jak to się nieraz robi w teorii mnogości, taką mnogość, której elementami są E.

[24] *Lc.*, s. 187.

[25] *Lc.*

przed nauką szerokie horyzonty: teoria mnogości może się rozwijać w dowolny sposób i w dowolnym kierunku, niech się tylko nie obawia sprzeczności, bo ją pod tym względem rozgrzesza p. Bornstein.

6. TWIERDZENIE ZERMELI W ŚWIETLE „FILOZOFII" P. BORNSTEINA

W rozprawie swojej wypowiada się p. Bornstein między innymi w sprawie twierdzenia Zermeli, „według którego z każdej mnogości składającej daną mnogość można wybrać jeden element (i wybrane elementy złączyć w mnogość").[26]

„Postulat" Zermeli stał się głośny w matematyce głównie pod wpływem okoliczności, iż został na nim oparty przedstawiony przez Zermelę „dowód" twierdzenia, że każda mnogość może być dobrze uporządkowana[27] – „dowód", który wzbudził wiele hałasu w kołach, zajmujących się teorią mnogości. W sprawie „postulatu" Zermeli wypowiadali się koryfeusze współczesnej matematyki, jak np. Borel, Peano, Heisenberg, a to czyniło z „postulatu", o którym mowa, zagadnienie wciąż „aktualniejsze". Cóż mówi w tej ciekawej sprawie p. Bornstein?

Na stronicy 185 p. Bornstein pisze: „Twierdzenie to, jak zobaczymy później, w zastosowaniu do wszelkiej mnogości w ogóle jest błędne; w zastosowaniu natomiast do mnogości elementów, istniejących indywidualnie, aktualnie, jest prawdą oczywistą: gdy mamy wiele poszczególnych indywiduów, możemy oczywiście jeden z nich wskazać, wybrać". Tak więc jest dla p. Bornsteina prawdą oczywistą, iż każda mnogość elementów, istniejących indywidualnie, podlega „postulatowi" Zermeli.

Wiemy już z ustępu 5, że każda mnogość skończona jest mnogością elementów, istniejących indywidualnie: wiemy z drugiej strony na podstawie tezy (XII), iż każda mnogość nieskończona jest mnogością elementów, istniejących indywidualnie. Z połączenia obu tych okoliczności otrzymujemy nową tezę, która stwierdza, iż każda w ogóle mnogość jest mnogością elementów, istniejących indywidualnie, każda bowiem mnogość jest mnogością skończoną albo nieskończoną. Stąd otrzymujemy:

(XIII) każda mnogość podlega „postulatowi" Zermeli.

Konsekwencji takiej, płynącej z koniecznością z rozmaitych twierdzeń p. Bornsteina, zaprzecza jednak p. Bornstein, któremu sprzeczności, jakie tworzy, nie zdają się bynajmniej przeszkadzać w pracy nad „filozoficznym uzasadnianiem" teorii mnogości. Na stronicy 190 znajdujemy ustępy następujące: „Weźmy ... zbiór nieskończony liczb naturalnych; z ogółu tych liczb będzie kiedykolwiek pomyślana in-

[26] *L.c.*, s. 185.

[27] [E.] Zermelo, „Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet sein kann", *Mathematische Annalen*, 1904. Por. również E. Zermelo, „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", *Mathematische Annalen*, 1908.

dywidualnie oczywiście tylko skończona ich ilość. Pozostaje więc nieskończona mnogość liczb naturalnych, które nigdy nie były i nie będę pomyślane. Mimo jednak nieskończoności tej mnogości nie możemy pomyśleć (i w ten sposób zindywidualizować) ani jednego poszczególnego jej elementu; gdybyśmy go bowiem pomyśleli, to tym samym dalibyśmy świadectwo temu, że nie należy on do mnogości, której elementy nigdy nie były i nie będą pomyślane". ... „Podobne mnogości są też ważne z tego względu, że wykazują nam *ad oculos* błędność twierdzenia Zermeli w stosunku do wszelkiej mnogości w ogóle. Z mnogości przytoczonej powyżej nie można wybrać żadnego elementu, nie można wskazać – jak widzieliśmy – żadnego poszczególnego przedmiotu, należącego do niej; nie można więc tym samym wskazać żadnego elementu mnogości, składających naszą mnogość, np. liczbę parzystą lub nieparzystą, które nie były i nie będą pomyślane."

Z ustępów przytoczonych widzimy, iż – wbrew tezie (XIII) – mnogość liczb naturalnych, które nie były i nie będą pomyślane, nie podlega „postulatowi" Zermeli.

Stanowisko p. Bornsteina, zaprzeczające tezie (XIII), da się zresztą, jak zaraz zobaczymy, przedstawić w postaci ogólniejszej.

Uważajmy[******] mnogość *M* wszystkich przedmiotów niesprzecznych (to znaczy takich, w stosunku do których jest fałszem, iż posiadają one jakąś cechę i zarazem tej samej cechy nie posiadają). Mnogość ta jest, jak widzimy, „wyznaczona", inaczej – „dana" „za pomocą definicji", jest więc – w terminologii p. Bornsteina „mnogością elementów danych formalnie"; wszystkie więc elementy mnogości *M* są „dane formalnie", inaczej – „formalnie istnieją"; ponieważ, jak wiemy z tezy (X), żaden element mnogości, „istniejący formalnie", nie „istnieje indywidualnie", więc żaden element mnogości *M* nie „istnieje indywidualnie"; inaczej – nie „istnieje indywidualnie" żaden przedmiot niesprzeczny; ponieważ jednak dalej, jak już zaznaczyłem w ustępie 2, każdy przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym, więc żaden w ogóle przedmiot nie „istnieje indywidualne". Wypada stąd, iż żaden w ogóle przedmiot nie jest elementem żadnej mnogości, gdyż gdyby jakikolwiek przedmiot był elementem jakiejkolwiek mnogości, to, jak wiemy z tezy (VII), „istniałby indywidualnie". Skoro jednak żaden przedmiot nie jest elementem żadnej mnogości, to żadna mnogość nie posiada elementów; jeżeli zaś żadna mnogość nie posiada elementów, to z żadnej mnogości nie można żadnego elementu „wybrać". Tak więc:

(XIV) żadna mnogość nie podlega „postulatowi" Zermeli.

Z ustępu niniejszego widzimy, iż oprócz różnych interesujących twierdzeń w rodzaju tezy, że żadna mnogość nie posiada elementów, zawdzięczamy p. Bornsteinowi możność zajęcia jasnego stanowiska w sprawie „postulatu" Zermeli: wiemy mianowicie, iż wprawdzie żadna mnogość nie podlega „postulatowi" Zermeli, ale każda mnogość „postulatowi" temu podlega.

******Por. przyp. **.

7. TERMIN „POJEMNOŚĆ" U P. BORNSTEINA

Na stronicy 188 p. Bornstein tak pisze: „Jeżeli więc teraz w mnogości skończonej o elementach danych formalnie wyróżnimy cechę, odpowiadającą ilości elementów mnogości tej o elementach już zindywidualizowanych, to cechę tę będziemy mogli przenieść również na mnogości nieskończone. Cechę tę nazwiemy *pojemnością* mnogości o elementach, danych formalnie (lub, co na jedno wychodzi, pojemnością formy mnogości), i będziemy przez nią rozumieli formalny odpowiednik tej ilości, która charakteryzowałaby elementy mnogości, gdyby istniały one wszystkie indywidualnie."

Przyznam się szczerze, iż z ustępu, który właśnie przytoczyłem, wyjątkowo mało rozumiem; nie zdaje mi się, by miało to być winą moją, nie zaś p. Bornsteina, pomijając bowiem fakt, iż mamy to takie potrzebujące bliższego określenia zwroty, jak np. „cecha, odpowiadająca ilości" lub „przenieść cechę", zauważamy w ustępie cytowanym sprzeczność: dowiadujemy się z niego, iż „na jedno wychodzi", czy coś nazwiemy „pojemnością mnogości o elementach, danych formalnie", czy też „pojemnością formy mnogości"; wypada stąd, iż wyrażenie „mnogość o elementach, danych formalnie" oznacza te same przedmioty, co wyrażenie „forma mnogości", w przeciwnym bowiem razie nie mogłoby „wychodzić na jedno", które z dwóch wchodzących w grę wyrażeń zostanie dla nazwana pewnej cechy użyte; wypada stąd, że:

(XV) każda „forma mnogości" jest mnogością „o elementach, danych formalnie";

z twierdzenia tego wynika w każdym razie, że każda „forma mnogości" jest mnogością; jest więc mnogością między innymi i każda „forma mnogości nieskończonej";[28] na stronicy 187 p. Bornstein pisze: „mamy prawo w pewnym znaczeniu powiedzieć, że mnogość nieskończona elementów istnieje aktualnie, znaczyć to jednak może tylko, że forma mnogości nieskończonej dana jest (istnieje) aktualnie"; wypada stąd, iż jeżeli się nie używa „przenośni", a mówi ściśle, to się może twierdzić, iż (1°) żadna mnogość nieskończona nie istnieje „aktualnie", (2°) „forma mnogości nieskończonej" istnieje „aktualnie"; z połączenia tych dwóch twierdzeń wynika, że „forma mnogości nieskończonej" nie jest mnogością nieskończoną; ponieważ jednak „forma" ta jest, jak widzieliśmy wyżej, mnogością, więc jest mnogością skończoną. „Istnieją" więc „indywidualnie" wszystkie jej elementy; skoro jednak „istnieją indywidualnie", to nie „istnieją formalnie", gdyby bowiem „istniały formalnie", to – na podstawie tezy (X) – nie „istniałyby indywidualnie"; jeżeli zaś elementy „formy mnogości nieskończonej" nie „istnieją formalnie", to nie są „formalnie dane", z czego wypada, iż „forma mnogości nieskończonej" nie jest mnogością „o elementach, danych formalnie". Mamy więc [że]:

(XVI) nie każda „forma mnogości" jest mnogością „o elementach, danych formalnie".

---

[28] O „formie mnogości nieskończonej" mówi p. Bornstein na s. 187.

Sprzeczne ze sobą tezy – (XV) i (XVI) – wskazują nam na to, iż nie możemy operować terminem „pojemność" w ten sposób, jak to nam proponuje p. Bornstein, termin ten bowiem jest komentowany przez p. Bornsteina nie tylko niejasno, lecz i sprzecznie.

8. ZAKOŃCZENIE

Wracam do zagadnienia, które postawiłem przed sobą na wstępie artykułu niniejszego: jaka jest wartość pracy p. Bornsteina w zakresie analizy „podstaw" teorii mnogości?

Odpowiedź na to zagadnienie, popartą przez siedem ustępów poprzednich, formułuję bez zastrzeżeń:

Praca p. Bornsteina nie ma żadnej w ogóle wartości dla „podstaw" teorii mnogości. Nie usuwa ona żadnych „sprzeczności" z teorii mnogości, jak się to zdaje p. Bornsteinowi, lecz je przeciwnie w wielkiej obfitości stwarza; nie uzasadnia „filozoficznie" ani też w żaden inny sposób ani jednego twierdzenia teorii mnogości, nie można bowiem uzasadnić czegoś za pomocą „definicji" i „lematów", pełnych błędów i sprzeczności; nie wyjaśnia nic, bo obmyślone niby w celu wyjaśnienia czegoś koncepcje, jak np. koncepcja „pojemności", są sprzeczne i niejasne.

Kimborciszki,[******] we wrześniu 1914 [roku].

[******] Majątek (ok. 30 km na zachód od Brasławia), należący do ojca Zofii Prewysz-Kwinto, żony S. Leśniewskiego.