Wojciech Krysztofiak

Metamatematyka i intensjonalność

Filozofia Nauki 10/3/4, 123-148

2002

Filozofia Nauki
Rok X, 2002, Nr 3—4(39—40)

Wojciech Krysztofiak

Metamatematyka i intensjonalność*

W *Filozofii Nauki*, nr 4 (36) 2001, Krzysztof Wójtowicz oraz Cezary Cieśliński formułują w swoich uwagach zarzuty krytyczne wobec niemal wszystkich stwierdzeń wyrażonych w pracy [Krysztofiak 2000]. W niniejszym tekście pragnę ustosunkować się do przedstawionych, negatywnych ocen. Niektóre z nich są wynikiem niezrozumienia mojego tekstu (rzecz jasna winę za niezbyt jasne przedstawienie swoich racji ponosi zawsze ich autor, a nie krytyk).

1. PODSTAWOWE NIEPOROZUMIENIE: (NIE)ROZSTRZYGALNOŚĆ ZBIORU H

Wypada powtórzyć, iż celem mojego artykułu nie było „obalenie" twierdzenia Gödla (bo dowód tego twierdzenia jest poprawny), lecz udzielenie odpowiedzi na pytanie: Jakie warunki semantyczne i ontologiczne są *implicite* założone w procedurze dowodowej twierdzenia Gödla o niepełności arytmetyki liczb naturalnych? W świetle tak postawionego pytania, nie interesują mnie własności zbioru H na gruncie arytmetyki. Interesują mnie własności zbioru H na gruncie procedury dowodowej twierdzenia Gödla. O własnościach „obiektywnych" tego zbioru napisałem:

> Zbiór H składa się z liczb, których nazwy, podstawione za zmienne w odpowiednich formułach zdaniowych z jedną zmienną wolną, nie generują tez arytmetycznych. Zbiór H jest z pewnością nieskończony. Skoro bowiem zbiór formuł sprzecznych zawierających jedną zmienną wolną jest zbiorem nieskończonym, to elementami zbioru H będą wszystkie liczby, które służą do ponumerowania tychże sprzecznych formuł [...] ponadto zawartość zbioru H zależy od użytej techniki numeracji (s. 68).

* Autor pragnie wyrazić podziękowanie prof. Andrzejowi Pietruszczakowi za lekturę niniejszego tekstu i kilka technicznych uwag.

W przedstawionym cytacie nie ma mowy o rozstrzygalności zbioru H. Przedstawiona wyżej charakterystyka zbioru H wynika z opisu sposobu jego konstrukcji i jest niezależna od założeń uwikłanych w procedurę dowodową twierdzenia Gödla. O rozstrzygalności zbioru H mówię w kontekście samego dowodu nierozstrzygalności arytmetyki: zbiór H jest rozstrzygalny na gruncie założenia niewprost dowodu nierozstrzygalności i sposobu konstrukcji zbioru H. Przedstawiam banalny dowód, że z założenia rozstrzygalności arytmetyki i definicji zbioru H można wywnioskować tezę o rozstrzygalności zbioru H (s. 66; od słów: „Łatwo wykazać [...]" do „Zatem H jest zbiorem rozstrzygalnym"): Art $\in$ ROZ $\rightarrow$ H $\in$ ROZ.

Mój krytyk, C. Cieśliński, przedstawia tak oto strukturę dowodu nierozstrzygalności arytmetyki (s. 76):

(a) T jest rozstrzygalna (założenie dowodu niewprost)
(b) H jest rozstrzygalny (wniosek z założenia)
(c) H jest reprezentowany w T przez formułę ψ (wniosek z (b) i twierdzenia o reprezentowalności)
(d) H nie jest reprezentowany w T przez ψ. Sprzeczność.

Cieśliński w punkcie (b) przyjmuje twierdzenie: Art $\in$ ROZ $\rightarrow$ H $\in$ ROZ. A więc aby dowieść nierozstrzygalności arytmetyki, trzeba założyć rozstrzygalność zbioru H (w postaci założenia niewprost o rozstrzygalności arytmetyki).

Z kolei drugi krytyk, K. Wójtowicz, przypisuje mi pomyłkę „[...] w momencie uznania, że istnieje efektywna procedura sprawdzenia, czy dana liczba $n \in$ H [...]" (s. 84). Jeśli zakładamy niewprost, że arytmetyka jest rozstrzygalna, to tym samym wnioskujemy, że istnieje efektywna procedura sprawdzenia, czy dana liczba $n \in$ H (gdyż $n \in$ H wtedy, gdy odpowiednia formuła nie jest tezą arytmetyczną) a więc musimy przyjąć, że zbiór H jest rozstrzygalny na gruncie założeń dowodu.

Cieśliński ponadto dodaje: „również dalej w omawianym artykule Krysztofiak uparcie twierdzi, że zbiór H jest rozstrzygalny, wbrew dowodowi, który sam wcześniej podał" (s. 76). Otóż, o rozstrzygalności zbioru H mówię w artykule, po naszkicowaniu dowodu nierozstrzygalności arytmetyki, jedynie w trzech miejscach. Oto dwie z tych wypowiedzi:

> Kluczowym składnikiem dowodu twierdzenia o niepełności arytmetyki liczb naturalnych jest konstrukcja rozstrzygalnego zbioru H. Zbiór ten okazuje się nie być reprezentowalny w arytmetyce liczb naturalnych (s. 68).

> Następnie w ramach procedury dowodowej twierdzenia o niepełności arytmetyki jest konstruowany pewien rozstrzygalny zbiór H_i (dla kodu i). Ten zbiór należy do zbioru potęgowego, generowanego przez zbiór wszystkich liczb naturalnych. Następnym krokiem w dowodzie jest pokazanie tego, że zbiór H_i nie jest reprezentowalny w systemie arytmetyki liczb naturalnych [...] (s. 77).

Być może zacytowane wypowiedzi są niefortunne, niezbyt jasne. Mogłem użyć bardziej precyzyjnych zwrotów: „Kluczowym składnikiem twierdzenia o niepełności arytmetyki liczb naturalnych jest konstrukcja zbioru H, na mocy założenia niewprost, rozstrzygalnego", „w ramach procedury dowodowej [...] jest konstruowany pewien zbiór H_i (dla kodu *i*), na mocy założenia nie wprost, rozstrzygalny". Moi krytycy mogli się jednak wykazać odrobiną życzliwości w przypisywaniu mi stwierdzenia, że zbiór H jest rozstrzygalny (w artykule moją intencją było stwierdzenie, że zbiór H jest rozstrzygalny na gruncie założenia niewprost [...]). Otóż, udowodnione jest, że każdy rozstrzygalny zbiór liczb naturalnych jest reprezentowalny w arytmetyce. Więc skoro twierdzę, że zbiór H nie jest reprezentowalny, to oczywiście także, że zbiór H nie jest rozstrzygalny. Ponadto, gdybym tego wniosku nie wyprowadził, to bym nie mógł wyprowadzić z: Art $\in$ ROZ $\rightarrow$ H $\in$ ROZ, wniosku o nierozstrzygalności arytmetyki. Podsumowując, w procedurze dowodowej nierozstrzygalności arytmetyki zakłada się niewprost rozstrzygalność zbioru H podczas, gdy w istocie nie jest on zbiorem rozstrzygalnym. Ta jego faktyczna własność — wydaje się — nie jest istotna z punktu widzenia pytania o założenia semantyczne i ontologiczne procedury dowodowej twierdzenia Gödla. Ta jego faktyczna własność jest istotna z punktu widzenia poprawności dowodu; generuje sprzeczność z założoną niewprost rozstrzygalnością.

Innym źródłem nieporozumienia jest moje stwierdzenie, że „analizowany zbiór jest efektywnie (kryterialnie) zdefiniowany". I w tym miejscu powinienem był dodać, że zbiór H jest efektywnie zdefiniowany na mocy założenia niewprost o rozstrzygalności arytmetyki. To zaś, że jest on kryterialnie zdefiniowany nie zależy od tego czy arytmetyka jest rozstrzygalna czy też taką nie jest. I z tym zgadza się Wójtowicz, twierdząc:

> Pozostając przy terminologii Autora należy się oczywiście zgodzić ze stwierdzeniem, że zbiór H_i nie istnieje na gruncie świata wyznaczonego przez skonstruowany ciąg formuł, gdyż H nie jest definiowalny żadną formułą ψ. Jest również wyznaczony kryterialnie. Nie jest on jednak zbiorem zdefiniowanym efektywnie, gdyż nie istnieje algorytm stwierdzający, czy $n \in$ H (s. 91).

Problem semantyczny i ontologiczny, jaki się wyłania, jest następujący: Skoro zbiór H jest zdefiniowany kryterialnie (definicja jego jest poprawna), to zbiór H istnieje. Skoro zbiór H istnieje i nie jest pusty, to jego elementy posiadają własność należenia do tego zbioru. Dokonując parafrazy ontologicznej tego spostrzeżenia: istnieje świat (pierwszy), w którym istnieją liczby posiadające własność należenia do zbioru H oraz istnieją liczby posiadające własność nienależenia do zbioru H. A skoro zbiór H nie jest rozstrzygalny, to nie jest reprezentowalny w arytmetyce. A więc nie o wszystkich elementach zbioru H da się rozstrzygnąć na gruncie arytmetyki, czy posiadają, czy nie posiadają własność należenia do zbioru H. Dokonując parafrazy ontologicznej tego wniosku: istnieje świat (drugi), w którym istnieją liczby naturalne, o których nie da się rozstrzygnąć, czy posiadają własność należenia do zbioru H, czy też tej własności nie posiadają. Z drugiej strony, na mocy założenia niewprost zakłada się, że zbiór H jest rozstrzygalny, a więc o wszystkich liczbach naturalnych da się rozstrzygnąć, czy należą, czy też nie należą do zbioru H. Dokonując parafrazy ontologicznej tego założenia: istnieje świat (trzeci), w którym o każdej liczbie da się rozstrzygnąć, czy należy, czy też nie należy do zbioru H. Światy: drugi i trzeci, nie mogą być tym samym światem (taki świat byłby bowiem sprzeczny, a zakładamy, że światów sprzecznych nie ma). A jaka jest ich relacja do świata pierwszego? Który z tych światów jest ekstensjonalny, a które są intensjonalne? Jakich więc operacji na światach dokonujemy dowodząc nierozstrzygalności arytmetyki?

2. ILE JEST ZBIORÓW TYPU H?

Cieśliński przy okazji omawiania struktury dowodu twierdzenia o nierozstrzygalności arytmetyki formułuje następującą uwagę:

> Zauważa on [Krysztofiak] słusznie, że zawartość wspomnianego zbioru zależy od przyjętej metody kodowania. Zaraz potem wygłasza jednak zadziwiającą tezę: technik numeracji formuł jest nieprzeliczalnie wiele (!), a zatem istnieje nieprzeliczalnie wiele zbiorów „typu H" (s. 76).

Z przedstawioną oceną jest powiązana uwaga Wójtowicza dotycząca mojego stwierdzenia, że istnieje nieprzeliczalnie wiele kodów gödlowskich. Według Wójtowicza, stwierdzenie takie nie jest prawdziwe, gdyż kodowanie gödlowskie musi być efektywne (s. 85).

Otóż, w swoim artykule odróżniam dwa pojęcia: operację numeracji i operację numeracji gödlowskiej. Wydaje się, że Cieśliński tego nie zauważa. Operacja numeracji została jednak w artykule formalnie zdefiniowana — jako superpozycja dwóch funkcji: funkcji numeru w zbiorze X z uwagi na relację mniejszości oraz operacji numeracji gödlowskiej.

$$y \in X \rightarrow [NR_{X,<}(y) = n \text{ ztw } y \text{ jest } n\text{-tą liczbą z uwagi na relację} < \text{w zbiorze X}]$$

Jeśli mamy już zdefiniowaną i-tą operację numeracji gödlowskiej Ng_i, to następnie definiujemy zbiór wszystkich numerów gödlowskich $NG_i = \{n: (\exists\alpha)(Ng_i(\alpha) = n)\}$. Definicja operacji numeracji Nr_i generowanej przez kod gödlowski i jest następująca:

$$Nr_i(\alpha) = NR_{NG,<}(Ng_i(\alpha)).$$

Na mocy operacji numeracji Nr_i, wyznaczonej przez numerację gödlowską Ng_i, jesteśmy w stanie efektywnie uporządkować wszystkie formuły arytmetyki Peano o jednej zmiennej wolnej w ciąg. Będzie on miał postać: $\langle\alpha_1,\ldots, \alpha_n,\ldots\rangle$. Wyrażenie „$\alpha_n$" czytamy: „formuła α o n-tym numerze gödlowskim z uwagi na relację mniejszości w zbiorze wszystkich numerów gödlowskich wyznaczonych przez kod i". Następnie na dolnych indeksach formuł tak otrzymanego ciągu dokonujemy operacji zmniejszenia ich o jeden. W ten sposób otrzymujemy ciąg o postaci $\langle\alpha_0,\ldots, \alpha_n,\ldots\rangle$. Konstrukcja takiego ciągu jest punktem wyjścia w konstrukcji zbioru H_i. Okazuje się jednak, że ten wyjściowy ciąg możemy poddawać rozmaitym operacjom przestawiania formuł z pewnej pozycji na inną pozycję. W wyniku takich działań także otrzymujemy nieskończone ciągi formuł o jednej zmiennej wolnej. Takich ciągów jest nieprzeliczalnie wiele, gdyż zbiór wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazami są liczby naturalne, ma moc continuum. Jeśli więc przez technikę numeracji będzie się rozumiało dowolną funkcję przekształcającą dowolny nieskończony ciąg formuł w inny, nieskończony ciąg tych samych formuł, to skoro takich ciągów jest nieprzeliczalnie wiele, to technik numeracji także jest nieprzeliczalnie wiele. Oczywiście, nieprzeliczalnie wiele z tych technik numeracji nigdy nie zostanie zdefiniowanych. Ale z tego nie wynika, że one nie istnieją.

Czy z tego, że istnieje nieprzeliczalnie wiele technik numeracji (w sensie określonym powyżej) wynika, że zbiorów typu H istnieje nieprzeliczalnie wiele? Jeśli zakłada się, że ciąg formuł, który służy do konstrukcji zbioru H, jest zdefiniowany rekurencyjnie, to, rzecz jasna, jako że takich ciągów jest przeliczalnie wiele, zbiorów typu H także jest przeliczalnie wiele. I tu rację ma C. Cieśliński. Jednakże postawić można następujące pytanie: Czy do konstrukcji zbioru H wystarczy stwierdzenie istnienia nieskończonego ciągu formuł, czy też wymagane jest stwierdzenie istnienia takiego ciągu wraz z podaniem jego rekurencyjnej definicji ? Albo inaczej: Czy do konstrukcji zbioru H wymagane jest jedynie stwierdzenie istnienia nieskończonego ciągu formuł czy też ponadto wymagana jest identyfikacja takiego ciągu? Jeśli do konstrukcji zbioru H wymagane jest jedynie istnienie takiego nieskończonego ciągu formuł o jednej zmiennej wolnej bez konieczności rekurencyjnego zdefiniowania takiego ciągu, to skoro takich ciągów („nie posiadających" rekurencyjnej definicji) jest nieprzeliczalnie wiele, to zbiorów typu H jest nieprzeliczalnie wiele. Akceptując to założenie, C. Cieśliński racji nie ma. Czy wobec tego to założenie jest zasadne? Odpowiedź na to pytanie wymaga rozstrzygnięcia pewnej innej kwestii: Czy w dowodzie niereprezentowalności (i tym samym nierozstrzygalności) zbioru H trzeba stosować regułę opuszczania kwantyfikatora szczegółowego zmiennej przebiegającej zbiór formuł? Jeśli nie, to C. Cieśliński nie ma racji.[1]

Istnieje nieskończony ciąg [α] formuł o jednej zmiennej wolnej. Załóżmy, iż ciąg ten nie jest rekurencyjnie zdefiniowany, a więc nie jesteśmy w stanie obliczyć dla każdej formuły jej pozycji i odwrotnie dla każdej pozycji nie jesteśmy w stanie wskazać formuły (jest to ciąg, którego nie umiemy zidentyfikować, choć taki ciąg istnieje, gdyż istnieje pewien nieskończony, rekurencyjnie zdefiniowany ciąg tych samych formuł). Następnie definiujemy zbiór H: (1) $(\forall n)[n \in \mathrm{H} \equiv \sim(\mathrm{Art} \vdash \alpha_n(^{v}/_{n'}))]$. Jako, że z założenia niewprost arytmetyka jest rozstrzygalna, to dla każdej formuły istnieje algorytm sprawdzenia, czy jest ona tezą, czy nie jest tezą arytmetyki. Zatem zbiór H jest rozstrzygalny, choć nie umiemy zidentyfikować wszystkich formuł w ciągu [α]. Może to się wydać paradoksalne, że (z założenia niewprost o rozstrzygalności arytmetyki) jesteśmy w stanie sprawdzić każdą formułę arytmetyczną o jednej zmiennej wolnej, co do tego, czy jest ona tezą, czy też nie jest tezą arytmetyczną, a nie umiemy jej zidentyfikować w ciągu [α]. Ale z drugiej strony istnieje rekurencyjnie zdefinio-

[1] C. Cieśliński wydaje się stosować tę regułę (w tekście nie jest to jednoznacznie uwidocznione). Sugeruje to następujący fragment jego dowodu: „Skoro H jest rozstrzygalny, to na mocy twierdzenia o reprezentowalności istnieje taka ψ, że $\forall n[n \in \mathrm{H} \equiv \mathrm{T} \vdash \psi(n')]$. Niech teraz k będzie numerem gödlowskim formuły y(v). Otrzymujemy: $k \in \mathrm{H} \equiv \mathrm{T} \vdash \psi(k')$" (s. 75).

wany ciąg [β] tych samych formuł (konstruujemy go na mocy efektywnej numeracji gödlowskiej). Ciągi [α] i [β] różnią się jedynie pozycjami występowania w nich pewnych formuł (te same formuły występują w obu ciągach, tylko że niektóre z nich występują w obu ciągach na odmiennych pozycjach). Skoro więc, na mocy założenia niewprost o rozstrzygalności arytmetyki, jesteśmy w stanie sprawdzić każde podstawienie (zmiennej kolejnymi cyframi oznaczającymi kolejne liczby naturalne) formuł efektywnie skonstruowanego ciągu [β], to tym samym jesteśmy w stanie sprawdzić każdą formułę nieefektywnie skonstruowanego ciągu [α], gdyż oba ciągi «zrobione» są z tych samych formuł. A więc brak algorytmu identyfikacji niektórych formuł w ciągu [α] nie pociąga faktu, że nie istnieje algorytm sprawdzania tych formuł. Metaforycznie mówiąc: choć nie umiemy pewnej formuły zidentyfikować w ciągu formuł [α], to jednak mamy pewność, na mocy założenia niewprost o rozstrzygalności arytmetyki, że tę niezidentyfikowaną formułę wcześniej sprawdziliśmy w ciągu [β], czy jest ona czy też nie jest tezą arytmetyki. Zatem na mocy twierdzenia o reprezentowalności, skoro zbiór H musimy uznać za rozstrzygalny (z założenia niewprost o rozstrzygalności arytmetyki), mamy: (2) $(\exists\alpha_k)\ (\forall n)[n\in \mathrm{H} \equiv \mathrm{Art} \vdash \alpha_k({}^{v}/_{n'})]$. Z (2) otrzymujemy: (3) $(\forall n)(\exists\alpha_k)[n\in \mathrm{H} \equiv \mathrm{Art} \vdash \alpha_k({}^{v}/_{n'})]$. Opuszczając kwantyfikator ogólny w (3) na zmienną *k*, wyprowadzamy: (4) $(\exists\alpha_k)[k\in \mathrm{H} \equiv \mathrm{Art} \vdash \alpha_k({}^{v}/_{k'})]$. W (1) opuszczając kwantyfikator ogólny na zmienną *k*, dostajemy: (5) $k\in \mathrm{H} \equiv \sim(\mathrm{Art} \vdash \alpha_k({}^{v}/_{k'}))$. Z (4) i (5) wynika: (6) $(\exists\alpha_k)[\sim(\mathrm{Art} \vdash \alpha_k({}^{v}/_{k'})) \equiv \mathrm{Art} \vdash \alpha_k({}^{v}/_{k'})]$. Wniosek (6) jest sprzeczny logicznie na mocy praw rachunku predykatów (zatem zbiór H jest niereprezentowalny, a zatem nierozstrzygalny, choć na mocy założenia niewprost: rozstrzygalny). Udało się więc nam wyprowadzić wniosek o niereprezentowalności zbioru H bez konieczności identyfikowania jakiejkolwiek bądź formuły nieefektywnie skonstruowanego ciągu [α] (bez konieczności stosowania reguły opuszczania kwantyfikatora szczegółowego). A więc do stwierdzenia istnienia (na mocy definicji) zbioru H nie jest wymagana identyfikacja nieskończonego ciągu formuł o jednej zmiennej wolnej. A skoro takich nieidentyfikowalnych ciągów jest nieprzeliczalnie wiele, to zbiorów typu H jest nieprzeliczalnie wiele.

Oczywiście, dowód twierdzenia o nierozstrzygalności arytmetyki musimy rozpoczynać od efektywnej konstrukcji nieskończonego ciągu formuł o jednej zmiennej wolnej (do tego potrzebna jest technika efektywnej numeracji gödlowskiej).[2] Skoro bowiem z założenia niewprost arytmetyka jest rozstrzygalna, to musimy mieć pewność, że w procedurze sprawdzania, czy odpowiednia formuła o jednej zmiennej wolnej jest tezą, czy też nie jest tezą dla kolejnych podstawień zmiennych cyframi, bierzemy pod uwagę wszystkie takie formuły. I właśnie numeracja gödlowska, konstytuująca efektywny, nieskończony ciąg formuł, daje nam taką pewność. Później w celu zdefiniowania zbioru H możemy dalej użyć tego efektywnego ciągu. W powyż-

[2] Przedstawiając dowód nierozstrzygalności arytmetyki w swojej pracy, rozpoczynam od słów: „Na mocy gödlowskiej techniki arytmetyzacji języków formalnych łatwo jest wykazać, że zbiór formuł zdaniowych języka arytmetyki jest efektywnie enumerowalny" (s. 65).

szej argumentacji pragnąłem jednak wykazać, że użycie efektywnie skonstruowanego ciągu formuł w zdefiniowaniu zbioru H nie jest koniecznością. Do zdefiniowania zbioru H możemy również użyć ciągu nieefektywnego; nie przeszkadza to wcale w wyprowadzeniu sprzeczności z założenia niewprost o rozstrzygalności arytmetyki (rzecz jasna z punktu widzenia samego dowodu użycie takiego nieefektywnego ciągu w zdefiniowaniu zbioru H jest niepotrzebną komplikacją, jednakże procedura dowodowa pozwala na to — i to jest filozoficznie interesujące). Przyznam więc rację Cieślińskiemu jeśli wykaże, iż użycie nieefektywnego ciągu formuł w zdefiniowaniu zbioru H jest błędem logicznym na gruncie dowodu nierozstrzygalności arytmetyki.

Jest rzeczą oczywistą, że w celu skonstruowania efektywnych, nieskończonych ciągów formuł, operacja kodowania musi być efektywna. I w związku z tym takich operacji kodowania jest przeliczalnie wiele. Ale jeśli dopuszczamy istnienie nieefektywnych, nieskończonych ciągów formuł, to musimy zgodzić się z tym, że istnieją funkcje kodujące nieefektywnie. A skoro istnieje nieprzeliczalnie wiele nieskończonych, nieefektywnych ciągów formuł, to istnieje nieprzeliczalnie wiele ich nieefektywnych funkcji kodujących (kodów). Mój błąd w stwierdzeniu, że istnieje nieprzeliczalnie wiele kodów gödlowskich, polega więc na tym, że użyłem terminu „kod gödlowski" niezgodnie z jego standardowym sposobem użycia na gruncie metamatematyki. Nazwijmy więc takie nieefektywne funkcje kodowania kodami pseudo-gödlowskimi. Można wykazać, że jeśli nieskończony zbiór zmiennych indywiduowych jest zawarty w alfabecie języka arytmetyki, to istnieje nieprzeliczalnie wiele kodów pseudo-gödlowskich generowanych przez dany kod gödlowski. W definicji kodu gödlowskiego, używanego w [R. Murawski, 1990, s.84—85], występuje warunek dla zmiennych indywiduowych o postaci: Ng(„x_i") = $2i$. Zgodnie z tym warunkiem, jeśli zmiennych indywiduowych jest nieskończenie wiele, to każda liczba parzysta jest numerem jakiejś zmiennej indywiduowej. Istnieje nieprzeliczalnie wiele nieskończonych ciągów utworzonych ze wszystkich liczb parzystych. Każdy z takich ciągów reprezentuje różnowartościowo konwers jakiejś funkcji kodującej nieskończony zbiór zmiennych indywiduowych. Zatem funkcji kodujących nieskończony zbiór zmiennych indywiduowych jest nieprzeliczalnie wiele. Skoro więc zbiór kodów gödlowskich w dziedzinie obciętej do nieskończonego zbioru zmiennych indywiduowych jest przeliczalny i skoro zbiór kodów gödlowskich jest zawarty w nieprzeliczalnym zbiorze funkcji kodujących, to różnica drugiego i pierwszego zbioru (a więc zbiór kodów pseudo-gödlowskich) jest zbiorem nieprzeliczalnym. Na mocy istnienia pewnego pseudo-gödlowskiego kodu, stwierdzamy istnienie pewnego nieefektywnego ciągu formuł o jednej zmiennej wolnej. Skoro każdy taki nieefektywny ciąg formuł może być użyty w zdefiniowaniu zbioru H, to skoro istnieje nieprzeliczalnie wiele kodów pseudo-gödlowskich, to istnieje nieprzeliczalnie wiele zbiorów typu H.

3. KWESTIA ILOŚCI METOD EFEKTYWNYCH

W swoim artykule — nie w części głównej, tylko w przypisie — podałem w wątpliwość twierdzenie, że ilość metod efektywnych jest przeliczalna (s. 80). Wątpliwość tę wyraziłem w celu podważenia argumentu (a nie samego stwierdzenia), że funkcja h (użyta przy konstrukcji definicji zbioru H) jest nieobliczalna, gdyż istnieje przeliczalnie wiele metod efektywnych.[3] Przy czym swoją wątpliwość próbowałem uzasadnić: „[...] rachunki logiczne [...] można by interpretować jako opisy metod efektywnych. [...] Wiadomo zaś, że liczba logik pośrednich jest nieprzeliczalna" (s. 80) Z tego wynika, że metod efektywnych jako opisów rachunków logicznych jest nieprzeliczalnie wiele.

Przedstawiony argument można by kwestionować poprzez stwierdzenie, że: (i) termin „opis" jest użyty niestandardowo, gdyż analizując sposób użycia tego terminu w przedstawionym argumencie, można wyprowadzić wniosek, że istnieją opisy nieidentyfikowalne (a więc nieopisywalne); (ii) rachunki logiczne nie są opisami jakichkolwiek metod. Odpowiadając na pierwszy z możliwych zarzutów, należałoby stwierdzić, że termin „opis" jest użyty w znaczeniu terminu „reprezentacja"; w związku z tym musielibyśmy zaakceptować wniosek, iż istnieją nieidentyfikowalne reprezentacje metod efektywnych. Odpowiedź na drugi zarzut wyglądałaby tak: Skoro dowolny rachunek logiczny reprezentuje zbiór dowodów, a każdy dowód jest ciągiem wyróżnionych (poprawnych) inferencji logicznych, to skoro każda wyróżniona inferencja logiczna jest obliczalna, to dowolny rachunek logiczny reprezentuje zbiór efektywnych ciągów inferencji logicznych. Jeśli zaś metodę efektywną utożsamię z dowolnym zbiorem efektywnych ciągów inferencji logicznych, to dowolny rachunek reprezentuje jakąś metodę efektywną. Jeśli zaś istnieją nieidentyfikowalne rachunki logiczne (gdyż jest ich nieprzeliczalnie wiele), to istnieją nieidentyfikowalne metody efektywne w nieprzeliczalnej ilości.

Wójtowicz przypisuje mi stwierdzenie, że istnieje nieprzeliczalnie wiele dowodów. W mojej pracy nie ma takiego stwierdzenia, choć ono wynika z utożsamienia przeze mnie dowodu i metody efektywnej. Na poparcie swojej interpretacji mojego stwierdzenia przywołuje nawet fragment z mojego artykułu [Wójtowicz, s. 92]. W świetle tego fragmentu dowód pojmuję jako parę uporządkowaną: ⟨poprawny ciąg formuł (lub ciąg wyróżnionych inferencji), operator konsekwencji (logika)⟩. Stwierdzam bowiem „[...] dowody są zawsze dowodami na gruncie danego systemu logicznego. System logiczny można zaś ująć jako zbiór dowodów wyznaczonych przez operację konsekwencji logicznej [...]". Wydaje mi się, że przywołane zdania wyrażają taką treść, w świetle której mówienie o tym, że pewien ciąg formuł jest dowo-

[3] Funkcja h jest nieobliczalna, gdyż zbiór H jest nierozstrzygalny. W dowodzie nierozstrzygalności arytmetyki nie możemy jednak zakładać, że funkcja h (użyta w definicji zbioru H) jest nieobliczalna, gdyż zakładalibyśmy wtedy to, co chcemy udowodnić. Wręcz odwrotnie — z założenia niewprost *funkcja h musi być uznana za obliczalną.*

dem pewnej formuły bez relatywizacji do logiki, jest niepoprawne albo jest „skrótem myślowym" (jeśli implicite wiadomo o jaką logikę chodzi). Z tych dwóch przywołanych zdań bowiem wynika to, że dowody są zawsze dowodami na gruncie zbiorów dowodów wyznaczonych przez operację konsekwencji logicznej. Oczywiście, mogłem to w pracy stwierdzić wprost. Istnienie nieprzeliczalnie wielu dowodów wynika więc z istnienia nieprzeliczalnie wielu logik (operatorów konsekwencji), a także z tego, że niektóre logiki dopuszczają nieskończone dowody.

Oczywiście, Wójtowicz ma rację, że jeśli już wybraliśmy logikę predykatów pierwszego rzędu, to ilość dowodów na gruncie tej logiki jest przeliczalna. I w swojej pracy nigdzie nie zakwestionowałem tego faktu.

Celem sformułowania mojej uwagi w ocenianym przez Wójtowicza i Cieślińskiego artykule było nakłonienie czytelnika do refleksji filozoficznej nad powiązaniami treściowymi pomiędzy pojęciami: efektywności, logiczności i rekurencyjności (obliczalności). Otóż możemy sformułować pewien «paradoks» (nazwijmy go „paradoksem powszechnej metajęzykowości"): Jeśli dowolny poprawny (na gruncie jakiejś logiki) argument zapisany jest w języku czysto przedmiotowym, to aby stwierdzić jego poprawność logiczną, musimy najpierw zidentyfikować logikę na gruncie której został on sformułowany. Skoro ilość logik jest nieprzeliczalna, to może się zdarzyć, iż w procedurze stwierdzania poprawności argumentu nigdy nie natrafimy na logikę, na gruncie której został on sformułowany. Tym bardziej więc jeśli mamy dany nieskończenie przeliczalny zbiór poprawnych na gruncie jakiejś logiki argumentów, to może zdarzyć się, iż w procedurze stwierdzania ich poprawności nigdy nie natrafimy na logikę, na gruncie której te argumenty zostały sformułowane. Niech więc tym zbiorem argumentów będzie teoria wszechświata pozostawiona nam przez przybyszów z Ziemi Bliźniaczej (jest to nawiązanie do Putnama). Składnia ich języka jest identyczna ze składnią naszego języka; symbole pierwotne ich języka są tak samo rozumiane (z wyjątkiem rozumienia logicznego), jak symbole naszego języka. Przybysze informują nas o tym, iż sprawdzili efektywnie, że ich argumenty są poprawne na gruncie ich logiki. Jednakże nie zdążyli wskazać nam swojej logiki, gdyż ziemskie wirusy ich uśmierciły. Jak więc my Ziemianie mamy się przekonać czy Bliźniaczanie mają rację (nie kłamią)? Ale załóżmy jednak, że Bliźniaczanie nie kłamią. W jaki sposób mamy stwierdzić efektywnie, że ich argumenty (dowody) są poprawne? A skoro zbiór poprawnych argumentów (dowodów) reprezentuje metodę efektywną, to postawione pytanie dotyczy sformułowania efektywnej metody identyfikacji pewnej efektywnej metody. Oczywiście, nasz problem zniknąłby, gdyby Bliźniaczanie pozostawili nam tekst swojej teorii wszechświata z preambułą: „Nasza teoria została sformułowana na gruncie takiej a takiej logiki". Ale taka preambuła jest sformułowana w metajęzyku. Wyobraźmy sobie sytuację odwrotną. My, Ziemianie, pozostawiamy Bliźniaczanom nieskończony zbiór dowodów arytmetycznych, sformułowanych na gruncie logiki klasycznej. O tym jednakże nasi planetarni bliźniacy nie wiedzą. Jak więc mają efektywnie stwierdzić, że nasze dowody są poprawne? Potrzebują do realizacji tego naukowego zadania „metajęzykowej preambuły". Zatem jeśli przeprowadzamy na gruncie języka przedmiotowego dowolny dowód, to aby stwierdzić jego poprawność musimy poprzedzić go wierszem zerowym o postaci: „Jestem sformułowany na gruncie takiej a takiej logiki". Taki zabieg jest konieczny z powodu nieprzeliczalnej ilości logik. Jeśli zaś ograniczamy się do jakiegoś przeliczalnego zbioru logik, które dopuszczają jedynie dowody będące skończonymi ciągami formuł, to zabieg „preambułowania" dowodów jest zbędny. Na przykład, mamy do wyboru dwie logiki: klasyczną oraz intuicjonistyczną, a także ciąg formuł języka rachunku zdań. Załóżmy ponadto, że jest to dowód założeniowy na gruncie którejś z tych logik. Istnieje efektywna metoda stwierdzenia, na gruncie której z tych logik dany ciąg formuł jest dowodem. Suma zbiorów dowodów klasycznego rachunku zdań i intuicjonistycznego rachunku zdań jest bowiem efektywnie enumerowalna. Wyliczając po kolei wszystkie dowody takiego zbioru zawsze trafimy (prędzej czy później) na identyczny dowód z badanym dowodem. Tego jednak nie da się wykonać dla każdego dowodu jeśli do wyboru mamy nieprzeliczalnie wiele logik zdaniowych (czasami może nam się udać identyfikacja logiki badanego dowodu, ale to zależy od «szczęścia» przy losowaniu logiki z nieprzeliczalnego zbioru logik).

4. INTENSJONALNOŚĆ FUNKTORA NUMERACJI

W swojej pracy argumentowałem na rzecz stwierdzenia, iż funktor numeracji, używany w metamatematyce, jest funktorem intensjonalnym. Wójtowicz omawiając moją argumentację zauważa, iż w proponowanym przeze mnie ujęciu „[...] niemal każdy metajęzyk okaże się intensjonalny [...] każdy metajęzyk, w którym można wyrazić fakt, że w języku są dwa składniowo różne, ale równoważne zdania, okaże się metajęzykiem intensjonalnym" (s. 89). Z kolei Cieśliński stwierdza: „Charakterystyka kontekstów ekstensjonalnych, jaką podaje Krysztofiak, jest nadużyciem" (s. 78).

Otóż, w swojej pracy nie sformułowałem jakiejkolwiek bądź charakterystyki kontekstów ekstensjonalnych, z wyjątkiem sugestii, wyrażonej w przypisie, że należałoby raczej mówić o kontekstach w pełni ekstensjonalnych, w pełni intensjonalnych oraz częściowo ekstensjonalnych, a więc, że ekstensjonalność/intensjonalność jest stopniowalną (albo niedychotomiczną) własnością kontekstów językowych (dlatego dziwi mnie uwaga Cieślińskiego).[4] W pracy sformułowałem charakterystykę kontekstów intensjonalnych. Zgodnie z nią, kontekst intensjonalny jest takim kontekstem, w którym nie obowiązuje zasada ekstensjonalności; w przypisie do tej charakterystyki sformułowałem uwagę, że zasad ekstensjonalności można sformułować wiele. Dlatego też o ekstensjonalności nie można mówić bez relatywizacji do określonej zasady (reguły) ekstensjonalności. Absolutne konteksty ekstensjonalne można by określić jako te, w których obowiązują wszystkie zasady ekstensjonalności; to określenie wy-

[4] Quine poddał krytyce dychotomię: analityczny — syntetyczny. Być może należałoby poddać analogicznej krytyce dychotomię: ekstensjonalny — intensjonalny (zob. na temat dychotomii: analityczny — syntetyczny [Woleński 2001, s.113—126]).

maga, oczywiście, sformułowania teorii ekstensjonalności, na gruncie której podano by algorytm generowania takich zasad (reguł).

W mojej argumentacji na rzecz intensjonalności funktora numeracji użyłem takiej oto zasady ekstensjonalności (przy czym symbol „$\Leftrightarrow$" oznacza relację równoważności logicznej i jest funktorem zdaniotwórczym od dwóch argumentów nazwowych; w tym wypadku nazw oznaczających formuły jakiegoś języka przedmiotowego; a wyrażenie „$\psi(\alpha/\beta)$" jest nazwą oznaczającą formułę powstającą z formuły ψ w wyniku zastąpienia α przez β):

(*) $$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\psi(\alpha) \Leftrightarrow \psi(\alpha/\beta)}$$

Okazuje się, że stosując wyżej sformułowaną zasadę ekstensjonalności w kontekstach językowych z funktorem numeracji, otrzymuje się sprzeczność. Łatwo można wskazać na przyczynę zachodzenia tego lingwistycznego faktu. Niech wyrażenia o postaci: 'Y_1', 'Y_2' będą nazwami formuł języka przedmiotowego: Y_1, Y_2 (czyli nazwy formuł tworzymy na mocy zastosowania cudzysłowu do danych formuł). Zasadę (*) można przeformułować następująco:

(**) $$\frac{`Y_1\text{'} \Leftrightarrow `Y_2\text{'}}{\psi(`Y_1\text{'}) \Leftrightarrow \psi(`Y_1\text{'}/`Y_2\text{'})}$$

Stosując zasadę (**) do kontekstów z funktorem numeracji, otrzymuje się sprzeczność w wyniku zastępowania formuł w kontekstach cudzysłowowych innymi, równoważnymi logicznie formułami. U podstaw konstrukcji zasady (**) stoi założenie, że wyrażenia typu: 'Y_1', 'Y_2' są złożonymi wyrażeniami nazwowymi, utworzonymi z funktora cudzysłowowego (nazwotwórczego od argumentu zdaniowego) i formuły zdaniowej. Można by więc argumentować, że kontekst: „Nr('α') = *n*" jest intensjonalny z uwagi na użycie intensjonalnego funktora cudzysłowowego,[5] a nie z uwagi na użycie funktora „Nr". Czy wobec tego można by uzyskać sprzeczność, stosując odpowiednią regułę ekstensjonalności w kontekstach z funktorem numeracji, w których nie występuje funktor cudzysłowowy?

Zinterpretujmy zasadę (*) w nastepujący sposób: „$\psi(\alpha)$" niech będzie dowolną metanazwą, oznaczającą jakąś formułę zdaniową, w której występuje metanazwa 'α' zaś „$\psi(\alpha/\beta)$" niech będzie dowolną metanazwą, oznaczającą formułę zdaniową, powstającą z formuły oznaczanej przez „$\psi(\alpha)$" w wyniku zastąpienia metanazwy 'α' przez metanazwę 'β'. Przyjmijmy następujące założenia:

(1) Zdanie ze strony 1 = 'x=x'

(2) Zdanie ze strony 2 = 'y=y'

---

[5] A. Tarski stwierdza: „Sens intuicyjny funkcji cudzysłowowej i samych cudzysłowów nie jest dostatecznie jasny. W każdym razie nie są to funktory ekstensjonalne [...]" [Tarski 1995, s. 25]. Podobnie Quine traktuje konteksty cudzysłowowe jako konteksty oznaczeniowo nieprzeźroczyste [Quine 1969, s.195].

(3) Zdanie ze strony 3 = 'Nr(Zdanie ze strony 1) = n'
(4) Zdanie czwarte = 'Nr(Zdanie ze strony 2) = n'
(5) Zdanie ze strony 3 jest prawdziwe.

Na podstawie (1) i (2) oraz twierdzeń metalogiki, otrzymujemy:
(6) Zdanie ze strony 1 $\Leftrightarrow$ Zdanie ze strony 2

Stwierdzenie (6) podpada pod metaformułę „$\alpha \Leftrightarrow \beta$". Ponadto, metanazwa „Zdanie ze strony 3" podpada pod formę metanazwy „$\psi(\alpha)$", gdyż oznacza formułę zdaniową, w której wystepuje metanazwa „Zdanie ze strony 1". Ponadto, metanazwa „Zdanie czwarte" oznacza formułę zdaniową, powstającą z formuły oznaczanej przez metanazwę „Zdanie ze strony 3" w wyniku zastąpienia metanazwy „Zdanie ze strony 1" metanazwą „Zdanie ze strony 2". W związku z tym, na mocy reguły (*) w aktualnej interpretacji, można wyprowadzić:
(7) Zdanie ze strony 3 $\Leftrightarrow$ Zdanie czwarte

Z wniosku (7) oraz twierdzenia, że dwa równoważne logicznie zdania posiadają tę samą wartość logiczną wnioskujemy:
(8) Zdanie ze strony 3 jest prawdziwe $\equiv$ zdanie czwarte jest prawdziwe

Na mocy teorii kodowania wiemy, że:
(9) Zdanie czwarte jest fałszywe

Zatem z (5), (8) i (9) ostatecznie wyprowadzamy sprzeczność:
(10) Zdanie czwarte jest prawdziwe i Zdanie czwarte jest fałszywe.

W przedstawionym rozumowaniu od wiersza (6) do wiersza (10) została zastosowana (wraz z elementarnymi twierdzeniami teorii konsekwencji i semantyki logicznej) reguła ekstensjonalności (*), w której sformułowaniu nie jest użyty funktor cudzysłowowy. Zatem nie można twierdzić, że funktor cudzysłowowy jest powodem nieekstensjonalności kontekstu o postaci: „$\mathrm{Nr}(\alpha) = n$".

Mimo to obrońca ekstensjonalności funktora numeracji mógłby sformułować następującą konstatację: Użyta w rozumowaniu reguła wnioskowania jest niepoprawna albo opisuje wnioskowania przy pomocy intensjonalnego funktora „$\Leftrightarrow$". Otóż, użytą regułę można przekształcić na twierdzenie, mówiące że wszelkie własności orzekalne o formułach zdaniowych danego języka dziedziczą się z uwagi na relację równoważności logicznej; dwie równoważne logicznie formuły dowolnego ekstensjonalnego języka posiadają te same własności. Wprowadźmy definicję: Dowolny metajęzyk jest ekstensjonalny wtedy, gdy wszelkie własności wyrażalne przy pomocy predykatów metajęzykowych są dziedziczne z uwagi na relację równoważności logicznej. Widzimy wyraźnie, że relacja równoważności logicznej jest dziedziczna z uwagi na samą siebie. Zatem predykat „$\Leftrightarrow$" nie może generować intensjonalności w kontekstach metajęzykowych. Predykat numeracji formuł jest predykatem intensjonalnym, gdyż własność posiadania przez formułę zdaniową takiego a takiego numeru nie jest dziedziczna z uwagi na równoważność logiczną. To samo dotyczy wszelkich własności syntaktycznych formuł, relewantnych względem relacji różnokształtności formuł. Predykaty wyrażające takie własności generują intensjonalność metajęzykową.

Łatwo wskazać jest takie metajęzyki, które posiadają charakter ekstensjonalny w wyżej zaproponowanym sensie. Metajęzyk, w którym sformułowana jest aksjomatyczna teoria konsekwencji dla logiki klasycznej, ma charakter ekstensjonalny. Obowiązują w nim bowiem reguły o postaci:

(1) $\alpha \Leftrightarrow \beta \vdash$ '$Cn(\alpha)=X$' $\Leftrightarrow$ '$Cn(\beta)=X$';

(2) 'α' $\Leftrightarrow$ 'β' $\vdash$ '$Cn($'α'$)=X$' $\Leftrightarrow$ '$Cn($'β'$)=X$'.

W szczególności reguła (2) wyraża to, że funktor cudzysłowowy nie generuje intensjonalności; na gruncie teorii konsekwencji w kontekstach cudzysłowowych wolno dokonywać podstawień formuł równoważnych logicznie, na przykład: jeśli 'x=x' $\Leftrightarrow$ 'y=y', to skoro Cn('x=x')=X, to Cn('y=y')=X. Funktor numeracji nie posiada tych samych własności inferencyjnych, jakie posiada funktor konsekwencji logicznej. Innym ekstensjonalnym metajęzykiem jest metajęzyk teorii boolowskiego wartościowania logicznego dla klasycznego rachunku zdań (metajęzyk metody zero-jedynkowej). Wolno bowiem na gruncie tego metajęzyka wnioskować według proponowanej reguły ekstensjonalności: jeśli 'α' $\Leftrightarrow$ 'β', to skoro Val_i('α')=1, to Val_i('β')=1. Funktor numeracji nie posiada więc tych samych własności inferencyjnych, jakie posiada funktor wartościowania zero-jedynkowego. Zatem własności wyrażane przy pomocy funktora konsekwencji logicznej oraz własności wyrażane przy pomocy funktora wartościowania logicznego dziedziczą się z uwagi na równoważność logiczną formuł (a tak nie jest w wypadku własności wyrażanych za pomocą funktora numeracji).

Jeśli więc dwa wymienione metajęzyki nazywamy ekstensjonalnymi (i z tym niemal każdy logik zgodzi się), to metajęzyk z funktorem numeracji nie może być w tym samym sensie konceptualizowany jako ekstensjonalny. Zatem są racje aby nazwać go w jakimś sensie metajęzykiem intensjonalnym. I wcale nie jest tak, jak sugeruje Wójtowicz, że klasa metajęzyków ekstensjonalnych byłaby nieliczna, gdyż niemal każdy metajęzyk byłby intensjonalny.

Jak uzasadnić rozróżnienie na własności formuł zdaniowych, które dziedziczą się z uwagi na relację równoważności logicznej, oraz własności, które się w ten sposób nie dziedziczą? Jeśli na gruncie semantyki denotacyjnej założymy, że formuły zdaniowe denotują stany rzeczy (na gruncie semantyki fregowskiej zakłada się, że istnieją tylko dwa stany rzeczy: byt (jedynka) i niebyt (zero)), to dwie formuły są równoważne logicznie wtedy, gdy denotują ten sam stan rzeczy. Zatem własności formuł zdaniowych, które dziedziczą się z uwagi na równoważność logiczną, są również własnościami formuł, które dziedziczą się z uwagi na ich kodenotacyjność. I odwrotnie wszystkie własności formuł, które dziedziczą się z uwagi na ich kodenotacyjność, również dziedziczą się z uwagi na równoważność logiczną (w wypadku systemów zupełnych semantycznie). Zatem własności formuł wyrażane przez metajęzykowe predykaty ekstensjonalne byłyby własnościami wyznaczanymi przez własności korelatów semantycznych formuł (przez własności konceptualizujące świat, o którym mówimy na gruncie danego języka przedmiotowego). Metajęzykowe predykaty intensjonalne natomiast wyrażałyby te własności formuł zdaniowych, które nie byłyby wyznaczane przez własności korelatów semantycznych formuł. Takimi predykatami, na przykład, byłyby — obok predykatu numeracji — predykaty wyrażające kolor zdania, kształt czcionki, strukturę fonologiczną itd.

Obrońca ekstensjonalności predykatu numeracji mógłby próbować zakwestionować powyższą argumentację następująco: Jeśli zdanie „Ta formuła jest napisana w kolorze czarnym" ma charakter intensjonalny, to analogicznie zdanie „Ten klocek jest czarny" także powinno zostać uznane za intensjonalne. Oczywiście, można opisywać własności obiektów lingwistycznych, takie jak: struktura graficzna, struktura fonologiczna, struktura elektroniczna czy nawet struktura kinetyczna, w sposób ekstensjonalny. W takich sytuacjach obiekty takie są traktowane jako indywidua (konkrety lub abstrakty) posiadające własności, które nie są wyznaczane przez własności korelatów semantycznych tych obiektów. Trudności logiczne zaczynają się pojawiać wtedy, gdy na gruncie jednej metateorii chce się opisywać oba typy własności formuł: własności wyznaczane przez własności korelatów semantycznych (własności ekstensjonalne) oraz własności niezależne od własności korelatów semantycznych (własności intensjonalne). W takich metateoriach należy wówczas zrezygnować z zasady ekstensjonalności, gdyż ona generuje sprzeczność (skoro zgodnie z tą zasadą wszystkie własności formuł zdaniowych dziedziczą się z uwagi na równoważność logiczną, to skoro na gruncie metateorii mówimy o własnościach formuł, które nie posiadają tej własności, to wówczas zasada ekstensjonalności generuje sprzeczność).[6]

5. KWESTIA INTENSJONALNOŚCI OPISÓW SYNTAKTYCZNYCH

C. Cieśliński formułuje uwagę, że zgodnie z moim pojmowaniem kontekstów intensjonalnych „[...] dowolny, syntaktyczny opis danego zdania ψ należałoby uznać za intensjonalny, nie stosowałby się on bowiem do niektórych logicznie mu równoważnych (por. np. „Zdanie „2+2=4" składa się z pięciu symboli", „Zdanie „2+2=4 i 2+2=4" składa się z pięciu symboli)" [Cieśliński, s. 78]

Otóż, zgodnie z moją koncepcją intensjonalności, własność składania się formuły z określonych symboli (o ile taka własność istnieje) jest własnością intensjonalną, gdyż własność ta nie dziedziczy się z uwagi na równoważność logiczną formuł, a więc nie jest wyznaczona przez własności korelatów semantycznych formuł. Składanie się z pięciu symboli przez zdanie „2+2=4" nie zależy w jakikolwiek bądź sposób od tego, że 2+2 = 4.

Ponadto, przykład Cieślińskiego jest bardzo wieloznaczny. Opisy syntaktyczne, w których użyty jest predykat „składa się z n symboli", są wieloznaczne i zasadniczo

[6] Bez rezygnacji z zasady ekstensjonalności sytuacja metamatematyki, uprawianej z wykorzystaniem techniki arytmetyzacji języka, byłaby analogiczna do sytuacji, w której chciałoby się skonstruować teorię opisującą jednocześnie biologiczne własności kasztanów z placu Pigalle i ich semantyczne własności reprezentowania informacji szpiegowskiej, określonej na zawartości świata przedstawionego w „Stawce większej niż życie".

niezrozumiałe (chyba, że «na oko»). Składać się z elementów bądź z części mogą jedynie zbiory dystrybutywne bądź zbiory mereologiczne (całości). Zatem moglibyśmy zaproponować następujące eksplikacje funkcji składania się z n symboli: (1) Składa się (ψ) = n wtedy, gdy liczba kardynalna zbioru reprezentującego ψ wynosi n; (2) Składa się (ψ) = n wtedy, gdy liczba kardynalna klasy mereologicznej reprezentującej ψ wynosi n. Na przykład, zdanie „2+3=5" składa się z pięciu symboli, gdyż liczba kardynalna zbioru (lub klasy mereologicznej) {'2', '+', '3', '=', '5'}, który reprezentuje zdanie „2+3=5", wynosi pięć. Stosując tę strategię wobec zdania „2+2=4", należałoby stwierdzić, że zdanie to składa się z czterech symboli, gdyż {'2', '+', '2', '=', '4'}= {'2', '+', '=', '4'}, a liczba kardynalna tego ostatniego zbioru wynosi cztery. Cieśliński jednak stwierdza, że formuła „2+2=4" składa się z pięciu symboli. Przedstawioną trudność można by rozwiązać poprzez zastosowanie zbiorów lub klas mereologicznych z powtórzeniami; elementom takich zbiorów przyporządkowuje się tak zwany współczynnik repetycji (funkcję przyporządkowującą obiektowi jakąś liczbę naturalną). Funkcja składania się byłaby więc zdefiniowana następująco: (3) Składa się (ψ) = n wtedy, gdy suma wartości współczynników repetycji elementów zbioru (klasy mereologicznej) reprezentującego ψ wynosi n. Ale czy zbiory (klasy mereologiczne) z powtórzeniami są dalej bytami ekstensjonalnymi czy też intensjonalnymi? Jeśli bowiem mówi się, że dany element należy ze współczynnikiem repetycji równym dwa do danego zbioru, to znaczy to, że dany element pojawia się w danym zbiorze dwa razy. Przy takiej interpretacji teoria mnogości zbiorów z powtórzeniami byłaby teorią pojawiania się obiektów w zbiorach. Obiekty lingwistyczne musiałyby być pojmowane jako zbiory, w których inne obiekty lingwistyczne pojawiałyby się wielokrotnie. Ale skoro formuły-napisy składają się z innych napisów, a napisy są konkretami fizycznymi, to jak wówczas zrozumieć to, że dany konkret pojawia się wielokrotnie w różnych miejscach w innym konkrecie-napisie? Jeśli zrezygnuje się z interpretacji nominalistyczno-reistycznej formuł, a więc założy się, że formuły składają się z typów-napisów, to i tak problem wielopojawieniowości typów-napisów w formułach nie znika. Skoro typy-napisy są klasami abstrakcji względem egzemplarzy-napisów z uwagi na relację równokształtności, to wtedy należałoby mówić, że w niektórych zbiorach reprezentujących formuły niektóre klasy abstrakcji pojawiają się wielokrotnie. Czy więc relacja pojawiania się obiektu w zbiorze jest relacją ekstensjonalną czy też relacją intensjonalną? Zwolennik ekstensjonalności opisów syntaktycznych musi stwierdzić, że ta relacja ma charakter ekstensjonalny. Ale tak nie jest, gdyż obiekty wielopojawieniowe nie spełniają teoriomnogościowej zasady ekstensjonalności dla obiektów indywiduowych: $x = y$ wtw $(\forall A)[x \in A$ wtw $y \in A]$. Pierwsza dwójka w formule „2+2=4" należy do zbioru obiektów pojawiających się w badanej formule przed znakiem „+", zaś druga dwójka nie należy do tego zbioru; zatem obie dwójki są różnymi obiektami (chociaż nie jest tak przy interpretacji ich jako typów-napisów; obie dwójki są tym samym typem-napisem).

Wszystkich zasugerowanych aporii można uniknąć jeśli formuły pojmie się jako ciągi arytmetyczne symboli językowych czyli jako funkcje odwzorowujące zbiór liczb naturalnych w zbiór symboli alfabetu danego języka, spełniające pewne warunki, wyznaczone przez reguły składni danego języka (przy takim ujęciu do alfabetu danego języka należy tak zwany pusty element językowy, np. pauza). Formułę „x=y" można by wtedy reprezentować jako nieskończony zbiór par o postaci: {⟨0, 'x'⟩, ⟨1, '='⟩, ⟨2, 'y'⟩, ⟨3, '∅'⟩,...,⟨n, '∅'⟩,...}, gdzie '∅' jest nazwą symbolu pustego. Przedstawiony sposób reprezentowania formuł daje się uprościć w taki sposób, że każdemu, nieskończonemu zbiorowi par (który reprezentuje pewną formułę) można jednoznacznie przyporządkować dokładnie jeden skończony zbiór par, taki do którego nie należą pary z pustym elementem językowym. Przy takiej modyfikacji zdanie Cieślińskiego można reprezentować tak oto: {⟨0, '2'⟩, ⟨1, '+'⟩, ⟨2, '2'⟩, ⟨3, '='⟩, ⟨4, '4'⟩}. Skonstruowany zbiór składa się rzeczywiście (tak, jak chce tego Cieśliński) z pięciu elementów.

Akceptując wyżej przedstawiony sposób teoriomnogościowego reprezentowania obiektów lingwistycznych, można wyjaśnić to, dlaczego opisy syntaktyczne, w których stwierdza się liczebność symboli budujących formuły, mają charakter intensjonalny. Skoro formuły zdaniowe danego języka są reprezentowane jako zbiory odpowiednio skonstruowanych par uporządkowanych, to wszystkie ekstensjonalne własności lub relacje określone na formułach są redukowalne do własności lub relacji określonych na tychże „zbiorach-reprezentacjach" lub obiektach teoriomnogościowych skonstruowanych ze „zbiorów-reprezentacji". Tak, na przykład, można rozumieć relację równoważności logicznej formuł — jako relację zachodzącą pomiędzy „zbiorami-reprezentacjami". Operacja konsekwencji logicznej daje się zredukować do operacji przekształcającej zbiory „zbiorów-reprezentacji" w zbiory „zbiorów-reprezentacji". Wszystkie te własności lub relacje ekstensjonalne, określone na dziedzinie obiektów lingwistycznych, odwzorowują jakieś własności lub relacje określone na dziedzinie korelatów semantycznych obiektów lingwistycznych (tak jest, gdyż wszystkie własności lub relacje ekstensjonalne, określone na obiektach lingwistycznych, dziedziczą się z uwagi na relację równoważności logicznej, a ta z kolei jest definiowalna jako kodenotatywność formuł; czyli równoważność logiczna w dziedzinie obiektów lingwistycznych jest homomorficznym obrazem identyczności w dziedzinie korelatów semantycznych formuł). Natomiast w sytuacji, w której określamy liczebność zbioru symboli budujących formuły, konstruujemy funkcję przyporządkowującą „zbiorom-reprezentacjom" (obiektów lingwistycznych) liczby, czyli obiekty zamieszkujące nową (transcendentną) dziedzinę ontologiczną zarówno w stosunku do świata obiektów lingwistycznych jak i świata korelatów semantycznych. I otóż funkcja składania się formuły z *n* symboli nie jest funkcją odwzorowującą jakąś funkcję określoną w dziedzinie korelatów semantycznych formuł językowych. I w tym znaczeniu opisy syntaktyczne, w których stwierdza się liczebność zbioru symboli budujących formuły czy też ich długość, mają charakter intensjonalny. Uogólniając, wszystkie predykaty metajęzykowe, które wyrażają własności obiektów lingwistycznych poprzez pozostawanie ich w rozmaitych relacjach do obiektów ze światów, które nie są skorelowane semantycznie z dziedziną obiektów lingwistycznych, mają charakter intensjonalny.

Zaprezentowany sposób pojmowania intensjonalności można również zaaplikować do analizy standardowych kontekstów intensjonalnych. Zdanie o postaci „Jan wierzy, że α" może zostać zinterpretowane jako wyrażające zachodzenie konwersu relacji wierzenia między tym, że α, a Janem; symbolicznie: B(α, Jan). Skonstruujmy następującą regułę «umetajęzykowiania» B-kontekstów: $B(\alpha, x) \equiv B^*(`\alpha', x)$, gdzie zmienna '$x$' przebiega zbiór podmiotów «wierzących», zaś 'α' jest nazwą zdania α. Relacja B* będzie więc stanowiła odpowiednik relacji B taki, że ilekroć x zajmuje postawę wierzenia w pewną treść propozycjonalną, tylekroć x zajmuje postawę metajęzykową B* w stosunku do zdania wyrażającego treść, w którą x wierzy. Jeśli więc kontekst „B(α, x)" jest intensjonalny, to także kontekst „B*('α', x)" jest intensjonalny. Zatem «umetajęzykowiona» wersja zdania „B(α, Jan)" będzie miała kształt: „B*('α', Jan)". Następnie umówmy się, że każdy podmiot «wierzący» jest reprezentowany przez jakąś liczbę naturalną; niech Jan będzie reprezentowany przez liczbę pięć, a więc zdanie „B*('α', Jan)" możemy zapisać jako: „B*('α', 5)". Niech teraz: 'α' = '2+2=4'. Zatem mamy: B*('2+2=4', 5). Z wcześniejszych analiz wiemy, że '2+2=4' składa się z pięciu symboli; wyraźmy tę informację następująco: S('2+2=4', 5). Z punktu widzenia teorii kategorii składniowych, zdania: „ B*('2+2 = 4', 5)", „S('2+2=4', 5)", są wygenerowane za pomocą tych samych reguł gramatycznych. Pierwsze ze zdań wyraża taką treść, że pomiędzy pewną formułą (obiektem lingwistycznym) a Janem pojmowanym jako liczba pięć zachodzi relacja B*; przy czym zachodzenie tej relacji jest niezależne od własności korelatu semantycznego formuły '2+2=4'. I właśnie dlatego analizowane zdanie jest intensjonalne. Analogiczna analiza stosuje się do zdania: „S('2+2=4', 5)", które jest opisem syntaktycznym formuły '2+2=4'.

6. LICZBY NATURALNE JAKO BYTY EPISTEMICZNIE NIEZUPEŁNE

W swojej pracy [Krysztofiak 2000] sformułowałem uwagę, że w świetle twierdzenia o nierozstrzygalności arytmetyki liczby naturalne są obiektami epistemicznie niezupełnymi. Definicja tej kategorii teoretycznej jest następująca:

(Df.) $$x \in (\mathrm{Ep.Nzpl}_T) \equiv (\exists\alpha)[\sim T \vdash \alpha(v/`x') \wedge \sim(T \vdash \sim\alpha(v/`x'))]$$

Obiekt x jest epistemicznie niezupełny na gruncie teorii T wtedy, gdy istnieje pewna formuła α o zmiennej wolnej taka, że tezą teorii T nie jest ani formuła powstająca z α w wyniku podstawienia za zmienną wolną nazwy obiektu x ani negacja takiej formuły. Zarówno Wójtowicz jak i Cieśliński zgadzają się z tym, że wszystkie liczby naturalne są w tym znaczeniu epistemicznie niezupełne. Jednakże Wójtowicz [s. 86] dodaje, iż fakt ten „[...] nie ma związku z wyborem konkretnego kodowania gödlowskiTgo, ani z ilością tych kodowań, a jedynie z faktem, że PA jest niezupełna". Z kolei

Cieśliński stwierdza, iż na to, aby liczby naturalne były obiektami epistemicznie niezupełnymi, nie potrzeba istnienia „rozmaitych sposobów kodowania", że „[...] wystarczy jeden" [Cieśliński, s. 77]. Cieśliński więc inaczej niż Wójtowicz wyjaśnia fakt, iż liczby naturalne są obiektami epistemicznie niezupełnymi.

Argument Wójtowicza odwołuje się do faktu, że można udowodnić formuły zdaniowe zapisane w języku arytmetyki, które są niezależne od aksjomatów Peano (prawdopodobnie Wójtowicz ma na myśli formuły: Parisa-Kirby'ego oraz Parisa-Harringtona). Zatem dowolne podstawienia cyfrą zmiennej wolnej formuły koniunkcyjnej o postaci „$\alpha \wedge x = x$" (gdzie α jest dowolną formułą niezależną od aksjomatów Peano) oraz jej negacji nie są dowodliwe na gruncie arytmetyki.

Skoro więc można udowodnić niezależność zdań: Parisa-Kirby'ego oraz Parisa-Harringtona od aksjomatów arytmetyki, bez wykorzystania techniki arytmetyzacji języka, to niezupełność epistemiczna liczb naturalnych nie zależy od istnienia rozmaitych funkcji kodowania języka arytmetyki. Jednym ze sposobów dowodzenia niezależności formuły od jakiegoś zbioru formuł (np. aksjomatów), który nie wykorzystuje techniki arytmetyzacji języka badanej formuły, jest metoda teoriomodelowa. Otóż, pokazuje się, że badana, niezależna formuła jest spełniona (prawdziwa) w standardowym modelu arytmetyki oraz nie jest spełniona w pewnym niestandardowym modelu arytmetyki. Interpretując terminy: „model standardowy arytmetyki" oraz „model niestandardowy arytmetyki" w języku modalnym przy pomocy terminów „świat aktualny arytmetyki" oraz „świat możliwy arytmetyki", można wyprowadzić wniosek: Formuła α jest niezależna od aksjomatów arytmetyki Peano wtedy, gdy formuła α zachodzi w świecie aktualnym arytmetyki i nie zachodzi w pewnym możliwym świecie arytmetyki. Zatem skoro dowody niezależności zdań: Parisa-Kirbego oraz Parisa-Harringtona, wymagają założenia, że istnieje wiele możliwych światów arytmetyki (obok świata aktualnego), to — jako że niezupełność epistemiczna liczb naturalnych jest pochodną tego, że istnieją zdania niezależne zapisane w języku arytmetyki — niezupełność epistemiczna liczb naturalnych jest pochodną tego, że istnieje wiele światów możliwych arytmetyki. Parafraza filozoficzna tego wniosku wskazuje, że niezupełność epistemiczna liczb naturalnych ujawnia się dopiero na gruncie metateorii zakładającej istnienie wielu możliwych światów arytmetyki, a więc metateorii, na gruncie której kwantyfikuje się możliwe światy arytmetyki.

W jednej z wersji dowodu pierwszego twierdzenia Gödla konstruuje się, na mocy techniki arytmetyzacji języka arytmetyki Peano, tak zwane zdanie Gödla, mówiące o samym sobie: „jestem niedowodliwe na gruncie arytmetyki Peano". Następnie dowodzi się, że to zdanie jest nierozstrzygalne, a więc niezależne od aksjomatów arytmetyki. Otóż, zdanie Gödla (G-zdanie) powstaje z formuły arytmetycznej o jednej zmiennej wolnej o postaci: „$(\forall y) \sim \varphi(x, y)$", w wyniku zastąpienia zmiennej wolnej „x" nazwą liczby m, będącej numerem Gödla formuły „$(\forall y) \sim \varphi(x, y)$". Zatem jeśli Ng_i(„$(\forall y) \sim \varphi(x, y)$") $= m$, to G-zdanie = „$(\forall y) \sim \varphi(\underline{m}, y)$", gdzie „$\underline{m}$" jest nazwą arytmetyczną liczby m (zob. [Murawski 1990, s.92]) na gruncie kodu i. Zatem to, jaki liczebnik wstawia się za zmienną wolną w formule „$(\forall y) \sim \varphi(x, y)$", zależy od tego, jaki numer nadaje tej formule dany kod gödlowski. Innymi słowy, jeśli zmieniamy sposób kodowania formuł, to ilekroć formule „$(\forall y) \sim \varphi(x, y)$" przyporządkowujemy odmienny numer, tylekroć zmienia się postać (ale nie kształt składniowy) G-zdania, czyli zdania niezależnego od aksjomatów arytmetyki Peano. Zatem dla każdego kodu gödlowskiego istnieje liczba naturalna, która jest epistemicznie niezupełna. A stąd wynika, że każda liczba naturalna jest epistemicznie niezupełna (gdyż podstawienie koniunkcji G-zdania i funkcji zdaniowej „$x=x$" jest zdaniem niezależnym). Niezupełność epistemiczna liczb naturalnych jest więc pochodną tego, że istnieją niezależne zdania arytmetyczne, wymagające dla swej konstrukcji założenia o istnieniu funkcji numeracji odwzorowującej świat formuł arytmetycznych w świat liczb naturalnych. Parafrazując ten wniosek filozoficznie — niezupełność epistemiczna liczb naturalnych ujawnia się na gruncie metateorii, w której wyróżnia się świat liczb naturalnych oraz świat formuł.

Operacja arytmetyzacji metajęzyka arytmetyki jest operacją przekładu metajęzyka arytmetyki na język arytmetyki. W wyniku tej operacji metazdaniom arytmetycznym (a więc zdaniom, które orzekają o obiektach lingwistycznych rozmaite ich własności) przyporządkowuje się jednoznacznie i efektywnie formuły języka przedmiotowego arytmetyki. Na przykład, formuła o postaci: „Form(n)", która jest zdefiniowana rekurencyjnie, a więc jako wyrażająca pewną własność arytmetyczną liczby n, posiada swój odpowiednik w postaci metazdania: „wyrażenie o numerze Gödla n jest formułą zdaniową". Inny przykład: Vble(n) wtw $n=\langle(n)_0\rangle \wedge (\exists y \leq n)[(n)_0 = 2y]$. Tak zdefiniowany predykat „Vble" jest predykatem zdefiniowanym rekurencyjnie i wyraża pewną własność arytmetyczną liczby n, taką, że liczba n jest wartością operacji „$\langle\ldots\rangle$", zastosowanej do jednowyrazowego ciągu liczb, którego jedynym, zerowym wyrazem jest jakaś liczba parzysta (operacja kodowania ciągu liczb „$\langle\ldots\rangle$" posiada swoją następującą definicję (oczywiście jest to jedna z wielu możliwych propozycji): $\langle(n)_0,\ldots,(n)_i\rangle$ = iloczyn kolejnych liczb pierwszych, podniesionych, odpowiednio, do potęg: $(n)_0,\ldots,(n)_i$). Z drugiej strony formuła „Vble(n)" wyraża informację, że wyrażenie języka arytmetyki o numerze n jest zmienną indywiduową. Definicje innych predykatów arytmetycznych, wykorzystywane w procedurze arytmetyzacji, są tak skomplikowane, że trudno jest uchwycić intuicyjnie ich arytmetyczną treść.

Zakładając, że każda formuła dowolnego języka jest skorelowana semantycznie z pewnym obiektem w określonym modelu (świecie), można stwierdzić, że formuły arytmetyczne zdefiniowane rekurencyjnie na gruncie procedury arytmetyzacji metajęzyka arytmetyki posiadają dwa korelaty semantyczne. Jeśli przez korelat semantyczny formuły będzie się rozumiało stan rzeczy opisywany przez nią w danym świecie, to formuła „Vble(n)" będzie opisywała dwa stany rzeczy: (1) stan rzeczy, że liczba n posiada własność arytmetyczną Vble w świecie liczb naturalnych oraz (2) stan rzeczy, że obiekt lingwistyczny o numerze n jest zmienną indywiduową w świecie obiektów językowych arytmetyki (albo inaczej: liczba n posiada własność bycia numerem pewnej zmiennej indywiduowej). Oczywiście, dowolne zdanie dowolnego języka może być interpretowane na różne sposoby, a więc skorelowane z różnymi korelatami semantycznymi w różnych światach. Jednakże w dowodzie pierwszego twierdzenia Gödla, G-zdanie jest interpretowane jednocześnie na dwa sposoby: (1) jako wyrażające treść arytmetyczną i (2) jako wyrażające treść metajęzykową (lingwistyczną). Aby przekonać się o tym, prześledźmy dowód twierdzenia, że G-zdanie nie jest tezą arytmetyki.

Niech γ będzie G-zdaniem, zaś R będzie dwuargumentową relacją rekurencyjną, zdefiniowaną na mocy procedury arytmetyzacji. Zatem formuła „$R(a,b)$" opisuje dwa stany rzeczy: (1) stan rzeczy, że między liczbami a oraz b zachodzi relacja R; (2) stan rzeczy taki, że ciąg formuł o numerze Gödla b jest dowodem zdania powstającego z formuły zdaniowej o jednej zmiennej wolnej, o numerze Gödla a, na mocy zastąpienia zmiennej wolnej, występującej w tej formule, liczebnikiem odpowiadającym numerowi a. Wiersze tego dowodu są następujące (na podstawie [Murawski 1990, s. 92]): (1) Art. $\vdash$ γ (założenie niewprost), (2) $(\exists k)$[numer dowodu G-zdania $\gamma = k$], (3) $\gamma =$ „$(\forall y) \sim \varphi(\underline{m}, y)$" (założenie), (4) $\varphi(x, y)$ mocno reprezentuje relację R (założenie), (5) $(\exists m)$[numer formuły „$(\forall y) \sim \varphi(x, y)$" $= m$], (6) numer dowodu G-zdania $\gamma = \mathrm{k}$, (7) numer formuły „$(\forall y) \sim \varphi(x, y)$" $= \mathrm{m}$, (8) $\mathrm{R(m, k)}$, (9) $\mathrm{R(m, k)} \equiv$ Art. $\vdash$ $\varphi(\underline{m}, \underline{k})$, (10) Art. $\vdash$ $\varphi(\underline{m}, \underline{k})$, (11) Art. $\vdash (\forall y) \sim \varphi(\underline{m}, y)$, (12) Art. $\vdash$ $\sim \varphi(\underline{m}, \underline{k})$, (13) sprzeczność. Wiersz (2) wynika z (1) i tezy o istnieniu funkcji numeracji gödlowskiej. Wiersz (3) jest stwierdzeniem opisującym sposób konstrukcji G-zdania γ. Wiersz (4) wynika z faktu, że relacja R jest rekurencyjna (a to wynika ze sposobu zdefiniowania relacji R na gruncie procedury arytmetyzacji). Wiersz (5) wynika z tezy o istnieniu funkcji numeracji. Wiersz (6) wynika z (2). Wiersz (7) wynika z (5). Wiersz (8) wynika z założenia niewprost (1), wiersza (7), wiersza (6) oraz definicji relacji R na gruncie procedury arytmetyzacji. I właśnie w wierszu (8), zdanie „R(m, k)" jest rozumiane jako odnoszące się do stanu rzeczy takiego, że liczba k jest numerem dowodu formuły γ, powstającej z formuły o jednej zmiennej wolnej: $(\forall y) \sim \varphi(x, y)$, na mocy zastąpienia zmiennej liczebnikiem odpowiadającym numerowi m. A więc zdanie „R(m, k)" jest interpretowane w wierszu (8) jako opisujące pewien fakt (stan rzeczy) lingwistyczny. Z kolei wiersz (9) wynika z (4), twierdzenia o reprezentowalności i definicji relacji R (jako rekurencyjnej). Otóż, w (9) formuła „R(m, k)" występująca po lewej stronie znaku równoważności musi być interpretowana jako opisująca stan rzeczy, że pomiędzy liczbami m oraz k zachodzi rekurencyjna, arytmetyczna relacja R. Sens twierdzenia o silnej reprezentacji jest bowiem taki, że jeśli pomiędzy dwoma liczbami naturalnymi zachodzi pewna relacja rekurencyjna, to w arytmetyce da się udowodnić zdanie stwierdzające zachodzenie tej relacji pomiędzy tymi liczbami. Wiersz (10) wynika z (9) i (8) na mocy reguły odrywania równoważności. Jednakże, trzeba to podkreślić, w (8) zdanie „R(m, k)" jest rozumiane jako stwierdzające zachodzenie relacji dowodliwości pomiędzy ciągiem formuł o numerze k i G-zdaniem, skorelowanym z funkcją zdaniową o numerze m, zaś w (9) „R(m, k)" jest rozumiane jako stwierdzające zachodzenie pewnej relacji arytmetycznej pomiędzy liczbami m oraz k (jest to formuła języka przedmiotowego).

Powyższą argumentację można więc tak oto podsumować filozoficznie: Na gruncie procedury arytmetyzacji (a w szczególności poprzez zabieg numeracji) konstruowane są formuły charakteryzujące się dwudenotacyjnością semantyczną. W szczególności G-zdanie wyraża zarówno pewną treść metajęzykową jak i arytmetyczną; odnosi do dwóch korelatów semantycznych: stanu rzeczy rozgrywającego się w dziedzinie numerowanych obiektów lingwistycznych (a więc modelu lingwistycznym) oraz stanu rzeczy rozgrywającego się w dziedzinie liczb naturalnych (a więc modelu arytmetycznym). Zatem skoro G-zdanie jest niezależne od arytmetyki Peano, to niezupełność epistemiczna liczby *m*, o której to zdanie orzeka pewną własność relacyjną, ujawnia się na gruncie metateorii, w której stwierdza się istnienie świata obiektów arytmetycznych oraz świata obiektów lingwistycznych, odwzorowywanego w tym pierwszym poprzez funkcję numeracji. Warto dodać, że ten świat obiektów lingwistycznych jest światem niestandardowym w tym sensie, że w świecie tym istnieją formuły odnoszące się do samych siebie.

7. LICZBY NATURALNE JAKO BYTY CZYSTO INTENCJONALNE

W swojej pracy [Krysztofiak 2000] nie bronię stanowiska, według którego liczby naturalne są bytami czysto intencjonalnymi. Próbuję uzasadnić pogląd, że jeśli obiekty epistemicznie niezupełne są obiektami czysto intencjonalnymi w sensie Ingardena, to liczby naturalne są bytami czysto intencjonalnymi w świetle założeń semantycznych procedury dowodowej twierdzenia o niepełności (niezupełności) arytmetyki.

Zgadzam się z Wójtowiczem, że nie ma podstaw aby uznać liczby naturalne za byty czysto intencjonalne w sensie Ingardena, o ile liczby naturalne są traktowane jako elementy dziedziny modelu standardowego arytmetyki, czyli jako klasy abstrakcji z uwagi na relację izomorfizmu w dziedzinie skończonych zbiorów dobrze uporządkowanych (jako skończone liczby porządkowe). W takim modelu dana liczba porządkowa albo posiada daną własność albo jej nie posiada (prawo wyłączonego środka obowiązuje bowiem w standardowej teorii mnogości).

W omawianej pracy w ogóle nie uzasadniłem interpretacji ingardenowskiej kategorii obiektów czysto intencjonalnych jako obiektów epistemicznie niezupełnych. Oto szkic takiego uzasadnienia: Według Ingardena, obiekty czysto intencjonalne posiadają miejsca niedookreślenia. To zaś przejawia się w tym, że w dziedzinie takich obiektów nie obowiązuje prawo wyłączonego środka (Ingarden nie precyzuje czy chodzi o semantyczną czy też o logiczną wersję tego prawa).[7] Łatwo można udowodnić, że jeśli obiekt jest czysto intencjonalny w sensie Ingardena, to jest epistemicznie niezupełny (przy czym ten związek pojęciowy jest niezależny od tego, czy przyjmuje

[7] Można akceptować logiczne prawo wyłączonego środka i odrzucać jego wersję semantyczną, ale wtedy trzeba relatywizować pojęcie prawdy do klasy modeli (prawdziwość to tyle, co bycie spełnionym w każdym modelu danej klasy). Zob. [Przełęcki 1982].

się semantyczną wersję prawa wyłączonego środka, czy też nie). Jeśli akceptuje się logiczne prawo wyłączonego środka, a czyni się to na gruncie klasycznie uprawianej matematyki, to wtedy trzeba wywnioskować, że kategoria przedmiotów czysto intencjonalnych jest pusta. A więc liczby naturalne nie mogłyby być w żaden sposób bytami czysto intencjonalnymi. Co więcej, byłoby to rozstrzygnięte jedynie na mocy akceptacji Ingardenowskiej definicji przedmiotu czysto intencjonalnego oraz decyzji wyboru logiki formalnej. Zatem, aby kategoria obiektów czysto intencjonalnych mogła mieć aplikację w dziedzinie obiektów matematycznych, przy jednoczesnej akceptacji logiki klasycznej, można ją zinterpretować jako kategorię obiektów epistemicznie niezupełnych. Wtedy kategoria miejsca niedookreślenia służyłaby do wyrażenia informacji, że obiekt na gruncie pewnej teorii i jej modelu posiada taką własność, że pewne jego cechy w obrębie danego modelu są niewyrażalne logicznie (tzn. nie da się udowodnić na gruncie danej teorii ani tego, że obiekt posiada daną własność, ani tego, że jej nie posiada). Zabieg «intencjonalizacji» obiektów danej teorii polegałby więc na osobliwym rozszerzaniu języka tej teorii w taki sposób, że nowe symbole tak rozszerzonego języka teorii pozwolą wyrazić logicznie (udowodnić) to, że pewne własności obiektów są niewyrażalne logicznie.

Prześledźmy więc mechanizm intencjonalizacji liczb naturalnych na gruncie standardowego modelu arytmetyki w następujących sytuacjach dowodowych: (1) gdy techniką teoriomodelową dowodzimy niezależności niektórych formuł arytmetycznych prawdziwych w modelu standardowym i nieprawdziwych w jakimś modelu niestandardowym; (2) gdy techniką arytmetyzacji dowodzimy niezależności G-zdania.

(Ad 1). W sytuacji pierwszej język arytmetyki Peano jest rozszerzany o język teorii mnogości (niekiedy w podręcznikach mówi się odwrotnie, w duchu programu logicyzmu: mianowicie, że to język teorii mnogości jest rozszerzany o terminy osobliwe arytmetyki Peano). Następnie definiuje się pierwotne kategorie pojęciowe arytmetyki w teorii mnogości i w końcu dowodzi się aksjomatów arytmetyki na gruncie takiej teorii. W ten sposób pokazuje się, że dziedziną standardowego modelu arytmetyki jest zbiór skończonych liczb porządkowych, czyli klas abstrakcji skończonych zbiorów uporządkowanych; działania arytmetyczne okazują się być działaniami określonymi i wykonalnymi właśnie w zbiorze takich klas abstrakcji. Standardowy model arytmetyki okazuje się być podmodelem jakiegoś modelu teorii mnogości. W kolejnym etapie dowodzi się, na gruncie teorii mnogości wzbogaconej o definicje terminów arytmetycznych (albo mówiąc odwrotnie: na gruncie arytmetyki wzbogaconej o język i aksjomaty teorii mnogości), analizowanego, niezależnego zdania arytmetycznego. W ostatniej fazie konstruowana jest pewna struktura teoriomnogościowa, w której prawdziwe są aksjomaty arytmetyki a fałszywe analizowane zdanie (tak otrzymana struktura również okazuje się być modelem arytmetyki i podmodelem jakiegoś modelu teorii mnogości). A więc dowód niezależności pewnego zdania od aksjomatów arytmetyki, w technice teoriomodelowej, jest sformułowany na gruncie teorii bogatszej niż arytmetyka Peano (teorii powstającej w wyniku rozszerzenia arytmetyki o teorię mnogości i jej metateorię).

Mechanizm intencjonalizacji liczb naturalnych polega na skonstruowaniu semantycznego faktu dwudenotacyjności zdań niezależnych. Przy czym w jednym świecie (modelu standardowym) korelat semantyczny takiego zdania niezależnego zachodzi, zaś w drugim świecie (modelu niestandardowym) nie zachodzi. I oczywiście oba korelaty będą różnymi obiektami teoriomnogościowymi (inaczej oba modele musiałyby być modelami standardowymi, a to jest niemożliwe w wypadku zdań niezależnych). Konstrukcja faktu dwudenotacyjności zdania niezależnego przejawia się w tym, że na zbiór modeli semantycznych arytmetyki jest narzucana pewna osobliwa relacja. Skonstruujmy mianowicie kategorię własności orzekanych o modelach arytmetyki, polegających na tym, że dany stan rzeczy (denotowany przez zdania języka, w którym sformułowana jest teoria danego modelu) zachodzi w danym modelu lub dany stan rzeczy nie zachodzi w danym modelu. Dowodząc techniką teoriomodelową niezależności od aksjomatów arytmetyki pewnego zdania, można pokazać, że modele standardowe arytmetyki posiadają pewne własności (o których «mówią» zdania niezależne), takie że ich odpowiedników nie posiadają modele niestandardowe. Innymi słowy, nie wszystko to, co «rozgrywa się» w modelu standardowym posiada swój odpowiednik w modelu niestandardowym. Jeszcze inaczej — opisu modelu niestandardowego nie da się zrekonstruować w oparciu o opis modelu standardowego.

Zdefiniujmy następującą relację: model m_1 jest wskaźnikiem (oznaką) modelu m_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania α, jeśli denotat zdania α dla m_1 zachodzi w modelu m_1, to denotat tego zdania dla m_2 zachodzi również w modelu m_2. Tak skonstruowana relacja bycia wskaźnikiem (relacja oznaczania) może być użyta do opisu takich zjawisk semiotycznych, jak te, kiedy na przykład mówimy, że dym jest oznaką ognia (na podstawie chemicznego opisu dymu — a więc pewnego modelu — jesteśmy w stanie, na gruncie chemii, określić rozmaite własności ognia; co więcej, każdemu «dymowemu» stanowi rzeczy odpowiada jakiś «ogniowy» stan rzeczy). Nie wszystkie modele arytmetyki pozostają względem siebie w relacji bycia wskaźnikiem (dla kontrastu, wszystkie modele klasycznego rachunku zdań pozostają względem siebie w relacji bycia wskaźnikiem; co więcej relacja ta w zbiorze tych modeli jest relacją równoważnościową). Można skonstruować relację słabszą: model m_1 jest znakiem modelu m_2 wtedy i tylko wtedy, gdy model m_1 nie jest wskaźnikiem modelu m_2 i istnieje takie zdanie α, że denotat zdania α dla m_1 zachodzi w modelu m_1 oraz denotat tego zdania dla m_2 zachodzi również w modelu m_2. Tak skonstruowana relacja bycia znakiem nadaje się do opisu takich zjawisk semiotycznych, jak te, kiedy mówimy, że doniczka w oknie jest znakiem tego, że policja jest w mieszkaniu (nie wszystkie stany rzeczy określone na doniczce — zachodzące w «doniczkowym modelu» — odwzorowują jakieś stany rzeczy określone na policjancie, czyli zachodzące w «policyjnym modelu»; np. waga doniczki nie musi odwzorowywać wagi policjanta lub liczby policjantów w mieszkaniu). Dowodząc niezależności zdań Parisa-Harringtona-Kirby'ego, na zdania te narzuca się relację dwudenotacyjności, która z kolei przejawia się w taki sposób, że w zbiorze modeli arytmetyki jest określona relacja znakowania. W wypadku teorii kategorycznych (których modele są nieskończone), skoro zbiory ich modeli są izomorficzne, to na takich zbiorach da się określić międzymodelową relację bycia wskaźnikiem (relację oznaczania), ale nie da się określić relacji znakowania. Dwudenotacyjność formuł takich teorii będzie się przejawiała poprzez międzymodelową relację bycia wskaźnikiem, a nie poprzez relację bycia znakiem. Dlatego teorie kategoryczne są ekstensjonalne.

Intencjonalizacja liczb naturalnych, na gruncie teoriomodelowej techniki dowodzenia niezależności zdań, będzie więc polegała na narzuceniu na liczby naturalne pewnej relacji intencjonalnej, mianowicie relacji znakowania: liczba n z modelu m_1 znakuje liczbę k z modelu m_2 wtedy, gdy model m_1 jest znakiem modelu m_2 oraz istnieje cyfra η, desygnująca n w m_1 oraz desygnująca k w m_2 oraz istnieje taka formuła $\alpha(\eta)$, która zachodzi w m_1 oraz zachodzi w m_2 (w tym wypadku takimi formułami będą podstawienia aksjomatów cyfrą η).

(Ad 2). Na gruncie techniki arytmetyzacji, dowód niezależności G-zdania wymaga rozszerzenia języka arytmetyki o metajęzyk, w którym wyrażalna jest teoria konsekwencji logicznej (teoria dowodliwości) oraz teoria numeracji obiektów lingwistycznych języka arytmetyki. Konstrukcja G-zdania wspiera się bowiem na konstrukcji funkcji numeracji i relacji dowodliwości. Fakt dwudenotacyjności G-zdania przejawia się w tym, że w pierwszym modelu G-zdanie denotuje stan rzeczy polegający na tym, że pewnej liczbie m przysługuje własność taka, że między tą liczbą, a każdą inną, nie zachodzi pewna, ustalona arytmetyczna relacja (zdefiniowana rekurencyjnie). W drugim modelu (lingwistycznym) G-zdanie denotuje stan rzeczy taki, że liczbie m przysługuje własność taka, że liczba ta jest numerem takiej formuły o jednej zmiennej wolnej, która staje się G-zdaniem w wyniku zastąpienia zmiennej liczebnikiem $\underline{m}$ oraz że tak otrzymane G-zdanie jest niedowodliwe. W obu modelach G-zdanie jest, oczywiście, prawdziwe (kontrastuje to z sytuacją dowodzenia niezależności zdań techniką teoriomodelową). Pierwszy model jest modelem standardowym, zaś drugi model (lingwistyczny) jest jego rozszerzeniem, powstającym: (1) w wyniku wzbogacenia dziedziny modelu standardowego o zbiór obiektów lingwistycznych oraz (2) wprowadzenia nowych własności i relacji określonych na obiektach lingwistycznych i (3) rekurencyjnego zdefiniowania operatora arytmetyzacji odwzorowującego obiekty lingwistyczne w zbiór liczb naturalnych (zbiór numerów tych obiektów). W tym drugim modelu można wyróżnić trzy typy stanów rzeczy (korelatów zdań prawdziwych metaarytmetyki): (1) stany rzeczy czysto arytmetyczne (np. to, że 1+1=2), (2) czysto lingwistyczne (np. to, że Art. $\vdash$„1+1=2") i (3) arytmetyczno-lingwistyczne (np. to, że $(\exists n)$[Nr(„1+1=2")=n]). Osobliwością modelu lingwistycznego jest to, że operator arytmetyzacji przyporządkowuje każdemu czysto lingwistycznemu stanowi rzeczy (zachodzącemu w tym modelu) pewien czysto arytmetyczny stan rzeczy (również zachodzący w tym modelu). Takie arytmetyczne stany rzeczy można określić jako arytmetyczne kopie lingwistycznych stanów rzeczy. Otóż, zbiór arytmetycznych kopii lingwistycznych stanów rzeczy nie pokrywa się ze zbiorem czysto arytmetycznych stanów rzeczy, gdyż nie każda liczba naturalna jest numerem jakiegoś obiektu lingwistycznego (symbolu, formuły czy też dowodu). Skonstruować więc można trzy modele: standardowy model arytmetyki liczb naturalnych będący zbiorem czysto arytmetycznych stanów rzeczy, model złożony ze stanów rzeczy określonych na arytmetycznych kopiach obiektów lingwistycznych języka arytmetyki oraz model złożony ze stanów rzeczy określonych na czysto lingwistycznych obiektach języka arytmetyki. Drugi i trzeci model pozostają względem siebie w stosunku izomorfizmu. Między tymi modelami zachodzi w obie strony relacja bycia wskaźnikiem. Ponadto, model kopii arytmetycznych jest wskaźnikiem standardowego modelu arytmetyki. Jednakże taka relacja nie zachodzi w odwrotnym kierunku; model standardowy arytmetyki nie jest wskaźnikiem modelu kopii arytmetycznych; model standardowy jest znakiem modelu kopii arytmetycznych. Stąd wynika, że liczby naturalne istniejące w modelu standardowym arytmetyki znakują liczby (będące numerami obiektów lingwistycznych języka arytmetyki) modelu kopii arytmetycznych. Nie każdy bowiem arytmetyczny stan rzeczy określony na danej liczbie naturalnej posiada swój odpowiednik w modelu arytmetycznych kopii obiektów lingwistycznych. Dowodząc niezależności G-zdania narzuca się więc na liczby naturalne intencjonalną relację znakowania.

8. UWAGI KOŃCOWE

Wykorzystane w niniejszym tekście pojęcie intencjonalności zostało skonstruowane przez Hintikkę. Otóż, według tego filozofa „[...] intencjonalność nie jest kwestią relacji mających miejsce w świecie. Jej rdzeń tkwi w porównaniach między wieloma możliwymi światami. Jest między-, nie zaś wewnątrzświatowa" [Hintikka 1975, s.112] Innymi słowy, intencjonalność obiektów przejawia się w dyskursie jako jego — dyskursu — intensjonalność czyli wieloświatowość. I w tym znaczeniu język, na gruncie którego dowodzi się nierozstrzygalności arytmetyki jest intensjonalny. W dowodach niezależności zdań arytmetycznych konstruuje się różne modele (światy) arytmetyczne, w których liczby naturalne posiadają różniące się wyglądy. Następnie pokazuje się, że nie ma takiego świata, w którym dana liczba naturalna mogła by przejawiać się jednocześnie poprzez tak skonstruowane wyglądy.

Jeśli założy się, że istotą dyskursu filozoficznego jest jego wieloświatowość, to metamatematyka jest filozofią (według mojego subiektywnego poglądu — najbardziej rozsądną filozofią), a nie matematyką, jak tego sobie życzy Cieśliński.

BIBLIOGRAFIA

Cieśliński, C. (2001), „Arytmetyka i intensjonalność", *Filozofia Nauki*, Rok IX, Nr 4(36), s. 73—81.

Hintikka, J. (1975), „The Intentions of Intentionality", [w:] J. Hintikka, *The Intentions of Intentionality and other New Models for Modalities*, Reidel: Dordrecht (tłum. polskie: A. Grobler, „Intencje Intencjonalności" [w:] Hintikka, J., *Eseje logiczno-filozoficzne*, PWN: Warszawa 1992, s. 106—152.

Krysztofiak, W. (2000), „Twierdzenia Gödla, możliwe światy i intensjonalność", [w:] J. Hartman (red.), *Filozofia i logika. W stronę Jana Woleńskiego*, Wydawnictwo Aureus: Kraków, s. 63—83.

Murawski, R. (1990), *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wydawnictwo UAM: Poznań.

Przełęcki, M. (1982), „Zasada wyłączonego środka a zagadnienie idealizmu", *Studia Filozoficzne* Nr 7—8, s. 89—99.

Quine, W.v.O. (1964), *From a Logical Point of View*, Harvard University Press: Cambridge, Mass. (tłum. polskie B. Stanosz: Quine, W.v.O., *Z punktu widzenia logiki*, PWN: Warszawa 1969).

Tarski, A. (1935/1995) „Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych", *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych*, nr 34, Warszawa 1933 (przedruk w: A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom I*, PWN: Warszawa 1995, s. 13—172).

Woleński, J. (2001), *Epistemologia. Tom II. Wiedza i poznanie*, Aureus: Kraków.

Wójtowicz, K. (2001), „Kilka uwag o twierdzeniu Gödla i intensjonalności", *Filozofia Nauki*, Rok IX, Nr 4(36), 83—93.