Adam Olszewski

Uwagi o dowodzie tezy Churcha

Filozofia Nauki 13/4, 113-128

2005

Filozofia Nauki
Rok XIII, 2005, Nr 4(52)

Adam Olszewski

Uwagi o dowodzie tezy Churcha

> Church's Thesis has, within logic, a similar function to dogmas and doctrines within the Church. The faithful get excited at the cost of being ridiculous to outsiders.
>
> G. Kreisel [24.12.1992]

Oto oryginalne sformułowanie Tezy Churcha[1] (dalej TC) podane przez jej autora, amerykańskiego logika Alonzo Churcha (1903-1995):

> Zdefiniujemy teraz wcześniej dyskutowane pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej w liczbach całkowitych dodatnich, przez identyfikację go z pojęciem funkcji rekurencyjnej liczb całkowitych dodatnich (lub lambda-definiowalnych funkcji liczb całkowitych dodatnich).
>
> *We now define the notion already discussed of an effectively calculable function of positive integers by identifying it with the notion of a recursive function of positive integers (or of a lambda-definable function of positive integers)*.[2]

TC będę rozumiał następująco:

(TC) **Pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej i pojęcie funkcji rekurencyjnej są identyczne**.[3]

---

[1] Oczywiście nazwa *Teza Churcha* nie pochodzi od samego Churcha, lecz od jego ucznia Kleenego i odnosi się nieco innego sformułowania niż to, które jest przyjęte w niniejszej pracy.

[2] Sformułowanie to pojawiło się w pracy [Church 1936]. Wcześniej Church przedstawił Amerykańskiemu Towarzystwu Matematycznemu abstrakt swej pracy i w nim również pojawiło się, nieco inne, sformułowanie tezy.

[3] Chociaż Church używał terminu *notion*, ja będę używał polskiego *pojęcie* w znaczeniu angielskiego *concept*. To mocne założenie wprawdzie rzutuje na niniejszą pracę, ale nie będzie tutaj

W pracy rozważę cztery zagadnienia związane z możliwością dowodu TC:
(I) Czy TC może być traktowana jako definicja syntetyczna?
(II) Jak **nie** należy rozumieć TC?
(III) Jak można rozumieć zwrot *dowód przez TC*?
(IV) Czy dowód TC jest możliwy?

1. ZAGADNIENIE I: CZY TC MOŻE BYĆ ROZUMIANA JAKO DEFINICJA SYNTETYCZNA?

Murawski, rozważając TC, pisze:

> Wspomnijmy dla porządku, że tezę Churcha możemy traktować po prostu jako definicję syntetyczną. Wtedy jej przyjęcie (czy odrzucenie) jest tylko sprawą gustu, smaku czy wygody. Jeżeli przyjmiemy ją, to staje się ona po prostu banalną i pustą prawdą, jeśli ją odrzucimy, to również nie ma to żadnego znaczenia.[4]

W podobnym duchu wypowiada się Piergiorgio Odifreddi. Choć nie używa on terminu ‘definicja syntetyczna’, to wspomina o pustości TC rozumianej jako definicja.[5] Tradycyjnie, przez definicję syntetyczną pewnego terminu rozumie się taką definicję, która albo wprowadza do języka definiowany termin, albo nadaje terminowi istniejącemu uprzednio w języku nową treść. Taka definicja jest rodzajem umowy terminologicznej. Wiadomo jednak, że takie umowy terminologiczne nie mogą być stosowane bez ograniczeń. Dla poprawnego dołączenia definicji syntetycznej jakiegoś terminu (do jakiegoś języka) należy wykazać dwie rzeczy: że obiekt oznaczany terminem definiowanym istnieje oraz że jest tylko jeden. Niespełnienie któregoś z tych dwóch warunków może spowodować sprzeczność w obrębie języka, do którego dołączono definicję.

Dla ustalenia sposobu rozumienia definicji syntetycznej przyjmuję za Ludwikiem Borkowskim następujące określenie:

D jest *syntetyczną* definicją terminu *W* w języku *J*, gdy:

- *D* jest definicją terminu *W* (w znaczeniu *Z*) w języku *J*,
- W języku *J* nie istnieją tezy zawierające relewantnie termin *W* w znaczeniu *Z*, a przyjęte w *J* nie na podstawie definicji *D*.[6]

W stylizacji pragmatycznej:

---

rozważane. Sprawa ta zostanie przeze mnie podjęta w artykule ‘*Church's own formulation of his Thesis and its Interpretations*’, który powinien się ukazać z początkiem roku 2006.

[4] [Murawski 1990, s. 63].

[5] Por. [Odifreddi 1999, s. 103].

[6] [Borkowski 1990, s. 20]. Termin stały *W* występuje *relewantnie* w tezie *T* języka *J*, gdy zastąpienie go w tej tezie innym terminem tej samej kategorii semantycznej, ale o innym zakresie, da w wyniku zdanie niebędące tezą języka *J*.

> *D* jest *syntetyczną* definicją wyrazu *W* w języku *J* ze względu na osobę *S*, gdy osoba *S* zalicza *D* do syntetycznych definicji wyrazu *W* w *J*.[7]

A) Spostrzeżenie Borkowskiego, relatywizujące definicję syntetyczną do osoby (podmiotu), zdaje sprawę z tego, że uznanie definicji jakiegoś wyrażenia za definicję syntetyczną (*resp.* analityczną) jest zdeterminowane przez, na przykład, intelektualny trening, jaki przeszła dana osoba, czy jej poglądy filozoficzne, co wpływa na zakres jej doświadczenia i używany język. Należy to brać pod uwagę, gdyż od tego zależy (ze względów pragmatycznych) uznanie jakiejś definicji analitycznej w jednym języku, za syntetyczną w innym języku. Języki takie powinny spełniać warunek przekładalności.[8] W tym sensie, TC (rozumiana nawet jako definicja analityczna) mogłaby zostać uznana za definicję syntetyczną.[9] Na przykład, można mówić o języku ogólnej teorii obliczalności (teorii leżącej na pograniczu kilku dziedzin), w którym TC byłaby definicją analityczną i języku teorii funkcji rekurencyjnych, w którym TC byłaby definicją syntetyczną. W takim jednak przypadku TC podpadałaby pod *brzytwę Ockhama*[10] i byłaby całkowicie zbędna. Od definicji syntetycznych wymaga się, aby były naukowo przydatne. W obrębie nieformalnego języka matematyki istnieje przecież termin *funkcja rekurencyjna* i każdą rolę, jaką miałby spełnić termin *funkcja efektywnie obliczalna*, można spełnić za pomocą pierwszego terminu. Przydatność TC jako definicji syntetycznej redukuje się wtedy całkowicie.

B) Moim głównym argumentem za tym, że TC nie może być tak rozumiana, jest fakt, że może zostać sfalsyfikowana. Zatem, zgodnie z *kryterium falsyfikowalności* Poppera, TC miałaby charakter naukowy (choć on sam odnosił to kryterium raczej do teorii naukowych). Dla sfalsyfikowania TC 'wystarczy' znaleźć funkcję efektywnie obliczalną, co do której specjaliści byliby zgodni, że obliczalną jest, a równocześnie taką, o której można by wykazać, że nie jest rekurencyjna. Uznanym i poprawnym definicjom syntetycznym przysługuje (trywialnie) prawdziwość na mocy samej umowy, w obrębie języka, w którym definicja jest sformułowana.[11] Definicja syntetyczna nie może być fałszywa, lecz najwyżej niepoprawna lub odrzucona.

C) Po trzecie, wyraźnym zamiarem Churcha było uzasadnić TC, a gdyby ją rozumiał jako definicję syntetyczną, to chyba by nie próbował jej uzasadnić. Choć oczywiście rozumiał ją jako definicję.

---

[7] [Borkowski 1990, s. 41].

[8] Por. [Borkowski 1990, s. 35]. Warunek przekładalności (w sensie węższym) wymaga, by odpowiednie relacje tworzenia zdań i relacje wynikania obu języków były izomorficzne.

[9] Trzeba wtedy wykazać zachodzenie warunków poprawności definicji, przede wszystkim niesprzeczności, co wydaje się trudnym zadaniem.

[10] 'Pluralitas non est ponenda sine necessitate'.

[11] Borkowski wspomina o szczególnych sposobach sformułowania definicji syntetycznych niebędących zdaniami w sensie logicznym (jako reguł używania terminu np. 'niech wyraz *W* znaczy…), które są podstawą do odmawiania im wartości logicznej. Por. [Borkowski 1990, s. 61-62].

D) Uznanie TC za definicję syntetyczną jest szczególnie wygodne, gdyż wtedy nie wymaga się dowodu lub dowód jest natychmiastowy. Fałszywość TC, co nie może być obecnie wykluczone z powodu np. hypercomputations, skutkowałaby brakiem przydatności takiej definicji syntetycznej.

2. ZAGADNIENIE II. JAKIE BŁĘDY POPEŁNIA SIĘ CZASEM W ROZUMIENIU TC, TZN. JAK NIE MOŻNA ROZUMIEĆ TC?

Niektórzy myśliciele (czasem matematycy) odnośnie do TC popełniają dwa podstawowe błędy: 1) rozumieją ją jako definicję syntetyczną (bo wtedy przestaje być ona interesującym zagadnieniem), co było dyskutowane wyżej; 2) rozumieją ją jako identyczność dwóch zbiorów (klas): „[…] a więc stwierdzenie: klasa O = klasa R nazywamy TEZĄ CHURCHA”.[12]

TC stwierdza identyczność dwóch **pojęć**. *Pojęciami*, od strony logicznej zajmował się Frege, ale później zostały, na długi czas, wyparte z logiki.[13] Frege oparł swój system na logice drugiego rzędu oraz na prawie, które zwie się w literaturze anglojęzycznej *Basic Law V* (BLV) i wygląda tak:

(BLV) $(\varepsilon F = \varepsilon G) = \forall x\, (Fx = Gx)$,

gdzie litery *F, G* są zmiennymi reprezentującymi pojęcia, symbole zaś εF, εG oznaczają odpowiednio ekstensje pojęć *F* oraz *G*. Dwa znaki identyczności (drugi i trzeci licząc od lewej strony) użyte przez Fregego, są często we współczesnej literaturze zastępowane przez znak równoważności: $(\varepsilon F = \varepsilon G) \equiv \forall x(Fx \equiv Gx)$. Identyczność z prawej strony BLV miała przybliżać identyczność pojęć, czyli oddać sens zwrotu: *pojęcie F jest identyczne z pojęciem G*. Jednak dla Fregego miała to nie być zwykła materialna równoważność, jak się ją dzisiaj rozumie. Prawą stronę należało, zgodnie z intencjami Fregego, odczytać: *wartość funkcji (pojęcia) F na danym obiekcie x jest identyczna z wartością funkcji (pojęcia) G na obiekcie x*.[14] BLV w postaci równoważności implikuje (w obie strony), że pojęć ma być tyle samo, ile jest ekstensji (funkcjonalna zależność widoczna przez wzięcie kontrapozycji obu implikacji). Implikacja z lewej na prawo jest problematyczna. BLV, wraz z Zasadą komprehensji[15] dla pojęć [$\exists G \forall x\, (Gx \equiv \varphi(x))$], dają wspólnie to, że pojęć ma być więcej aniżeli

[12] [Murawski 1990, s. 63], por. również [Cutland 1980, s. 67].

[13] W ostatnich latach można zaobserwować renesans zainteresowania pojęciami. Przypominam, że interpretuję Churchowskie *notion* jako (nie do końca Fregowski) *concept*.

[14] Jest to jedno z głównych zagadnień nierozwiązanych przez Fregego.

[15] Frege nie formułuje tej zasady wprost, lecz jest to wynik badań nad jego systemem. Nazwa tej zasady jest prostym spolszczeniem nazwy angielskiej. Zastanawiam się, czy nie byłaby poprawną nazwa: Zasada rozumienia. Nazwa ta wyrażałaby intuicyjną treść zasady, która mówi o możliwości prostego rozumieniu nawet najbardziej złożonych, pod względem logicznym, pojęć.

obiektów (ekstensje miały należeć do obiektów).[16] Trudno sobie wyobrazić jakiś porządny system logiki pojęć i oparty o logikę drugiego rzędu (z Zasadą komprehensji), który dopuszczałby BLV w postaci implikacji z lewej na prawo (od identyczności ekstensji do identyczności pojęć) i nie prowadziłby do sprzeczności. Jednakże sprawa jest znacznie bardziej subtelna. Ciekawą próbę uratowania niesprzeczności logiki pojęć Fregego podjął George Boolos (1986/87). Sformułował pewną wersję BLV (nazywa ją (New V)) wprowadzając w miejsce ekstensji pojęcia F tzw. *subtension* pojęcia, oznaczane $*F$. Zasada (New V) jest definicją *subtension* pojęć.[17]

(New V) $*F = *G$ wtw F jest *podobne* do G.

Pojęcie F jest *podobne do* pojęcia G zawsze i tylko wtedy, gdy jeśli chociaż jedno z nich jest *małe*, to są one koekstensywne tzn. zachodzi prawa strona BLV — $\forall x(Fx \equiv Gx)$. Pojęcie F nazywa się *małym*, gdy pojęcie '*być identycznym z samym sobą*'[18] nie jest równoliczne (*equinumerous*) z żadnym *podpojęciem* właściwym pojęcia F.[19] Z logiki drugiego rzędu z dołączonym (New V) da się uzyskać całą arytmetykę Peano. Z (New V) da się również uzyskać osłabioną wersję BLV: dla dowolnego pojęcia F; jeśli F jest *małe*, to dla dowolnego pojęcia G:

(BLV') $*F = *G$ wtw $\forall x(Fx \equiv Gx)$.

Subtensions odpowiadają wzajemnie-jednoznacznie klasom abstrakcji wyznaczonym przez relację (typu równoważności) *podobieństwa* pojęć. Jeśli prawa strona BLV' ma przybliżać identyczność pojęć, jak chciał Frege, to można przejść bezpiecznie od identyczności *subtensions* pojęć (odpowiednik ekstensji dla pojęć *małych*?) do identyczności pojęć. Pojęcie funkcji rekurencyjnej jest pojęciem *małym*, gdyż pojęcie '*być identycznym z samym sobą*' nie jest podpojęciem pojęcia '*funkcja rekurencyjna*' (każda funkcja, również nierekurencyjna jest identyczna sama ze sobą). Podobne przejście od identyczności klas do równoważności pojęć jest możliwe w opar-

[16] Formule $\exists F$ ($x= \varepsilon F \wedge \neg Fx$), na mocy Zasady komprehensji, odpowiada pojęcie, które nazwiemy P. Jego ekstensją jest εP. Podstawimy $\exists F$ ($\varepsilon P = \varepsilon F \wedge \neg F(\varepsilon P)$) i to postulowane pojęcie nazwiemy H. Mamy ($\varepsilon P = \varepsilon H \wedge \neg H(\varepsilon P)$). Stąd, na mocy newralgicznej implikacji BLV (z lewej na prawo), mamy $\forall x$ ($Px \equiv Hx$) oraz $\neg H(\varepsilon P)$, a stąd $\neg P(\varepsilon P)$. To z kolei daje $\neg\exists F$ ($\varepsilon P = \varepsilon F \wedge \neg F(\varepsilon P)$), skąd mamy $P(\varepsilon P)$ — czyli sprzeczność. Pominięto tutaj symboliczne rozróżnienie na formułę, pojęcie i jego nazwę. Por. Edward N. Zalta, „Frege's Logic, Theorem, and Foundations for Arithmetic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2004 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), <http://plato.stanford.edu/archives/fall2004/entries/frege-logic/>

[17] Nie tłumaczę słowa *subtension* na język polski i dlatego w odpowiednich kontekstach używam go w angielskiej liczbie mnogiej.

[18] Pojęcie odpowiada określeniu pomiędzy apostrofami.

[19] Pojęcie F jest *podpojęciem* pojęcia G, jeśli każdy obiekt podpadający pod pojęcie F podpada pod pojęcie G.

ciu o aksjomaty teorii mnogości Zermelo-Fraenkla, gdzie aksjomat komprehensji jest używany w sposób ograniczony.[20]

Wydaje się, że całe zamieszanie z BLV wywodzi się od Fregego, który koniecznie chciał uczynić rozważania na temat pojęć bardziej intersubiektywnymi (sprawdzalnymi) i dołączył do swego systemu to dziwne prawo. Nazywam je dziwnym, ponieważ ekstensje pojęć (ale nie ekstensje słów-pojęciowych (*Begriffsworte*)!) są właściwie zbiorami. Co za tym idzie, wpadamy na teoriomnogościową ścieżkę myślenia. Boolos ratuje Fregego jedynie od sprzeczności, ale nie ratuje koncepcji pojęć Fregego od zarzutu zbędności. Konsekwentnie można bowiem przestać mówić o pojęciach i zacząć mówić, jak to się zresztą dzisiaj dzieje w obrębie logiki, o predykatach i zbiorach. Ocena takiego posunięcia, z punktu widzenia filozofii, jest krytyczna. Nie ma niczego swoistego (ciekawego) w tak rozumianych pojęciach. Po drugie, czy rzeczywiście to, co dzisiaj nazywamy materialną równoważnością predykatów (prawą stronę BLV) można uznać za satysfakcjonujące przybliżenie identyczności pojęć? Wydaje się, że raczej nie, taka zaś równoważność (*coextensiveness*) jest jedynie konsekwencją identyczności pojęć. Właśnie wprowadzenie przez Fregego BLV strywializowało jego własne rozumienie pojęć i, na dodatek, prawą stronę BLV pozwoliło rozumieć jako zwykłą materialną równoważność. Wtedy również prawa strona (New V) może być tak samo interpretowana. Podstawowy zarzut jest wtedy taki, że obie zasady (BLV) i (New V) mogą być fałszywe. Nie można wykluczyć takiej sytuacji, gdzie dwa pojęcia będą materialnie równoważne i równocześnie różne.[21] Powracając do TC, przejście od identyczności dwóch zbiorów do identyczności dwóch pojęć nie ma wystarczającego uzasadnienia. Teoria zbiorów uzasadnia to przejście, ale jest to przejście do identyczności dwóch zbiorów (którymi są w istocie fregowskie pojęcia) od założenia o identyczności innych zbiorów.

TC, w przyjętej tutaj wersji, jest (być może) sformułowaniem w jakimś języku, który nie został jeszcze do końca rozpoznany. Nie może to, jak się zdaje, być język teorii zbiorów, gdyż wtedy *pojęcie* byłoby zbiorem. To jednak należy z góry wykluczyć.

3. ZAGADNIENIE III
JAK MOŻNA ROZUMIEĆ ZWROT ‘DOWÓD ZA POMOCĄ TC’?

Zwrot *dowód za pomocą TC* można rozumieć na co najmniej dwa sposoby:

A) Załóżmy, że chcemy dowieść, że pewna funkcja *f* jest rekurencyjna. Poprawną metodą *dowodu za pomocą TC* jest następująca metoda: podać nieformalny (ale ścisły) dowód, że dany, nieformalny algorytm jest rzeczywiście algorytmem obli-

---

[20] Zresztą Boolos, we wspomnianej pracy, wyprowadza pewną wersję teorii mnogości drugiego rzędu z aksjomatów logiki drugiego rzędu wraz z (New V) i odwrotnie. Wydaje się, ze można to interpretować jako równoważność tej wersji systemu Fregego z pewną wersją teorii zbiorów.

[21] Jest to zagadnienie na osobną pracę. W sztucznie dobranych uniwersach można to pokazać w miarę łatwo.

czającym daną funkcję *f*. Wtedy, przez odwołanie się do TC, wnosimy to, czego chcieliśmy dowieść, że *f* jest rekurencyjnie obliczalna.[22] Jest to pierwsze rozumienie zwrotu *dowód za pomocą TC*.[23] Takie rozumienie można czasem spotkać w literaturze przedmiotu i taki dowód jest stosowany w podręcznikach z zakresu teorii obliczalności, choć odwołanie do TC czasami nie występuje *explicite*. Interesujący jest następujący przykład funkcji *f*:

$f(n) = n$-ta liczba w dziesiętnym rozwinięciu liczby π.

Nieformalnie, do obliczenia wartości funkcji *f* (dla dowolnego *n*) można wykorzystać szereg Huttona.[24]

Inne rozumienie zwrotu *dowód za pomocą TC* znaczy tyle, co *dowód*, *którego jedną z przesłanek jest TC*. Pierwsze rozumienie wydawać się może szczególnym przypadkiem drugiego. Nie jest tak jednak do końca, gdyż w pierwszym przypadku użycie TC jest nieistotne. Można bowiem zrobić dowód tego samego twierdzenia, bardziej pracochłonny, w którym nie korzysta się z TC. Chcę argumentować za tym, że użycie TC w drugim rozumieniu jest istotne, bez TC twierdzenia dowieść się nie uda.

B) Dla przykładu, weźmy teraz cztery sformułowania tzw. *Problemu Stopu* [PS] (ang. *Halting Problem*).[25] Sam problem został sformułowany przez Alana Turinga w pracy *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* (1937) w postaci zbliżonej do wersji pierwszej z poniższych. Problem ten należy do problemów bazowych teorii rozstrzygalności (*resp.* nierozstrzygalności) w tym sensie, że nierozstrzygalność niektórych innych problemów da się zredukować do nierozstrzygalności *Problemu Stopu*. Znaczy to również, że podczas gdy nierozstrzygalność niektórych problemów jest dowodzona pośrednio (właśnie przez redukcję), to nierozstrzygalność *PS* jest dowodzona ‘bezpośrednio’.

- O dowolnej maszynie Turinga nie jest rozstrzygalne w sensie Turinga[26] to, że zatrzyma się, gdy na wejściu zadamy jej dowolną liczbę.
- O dowolnej maszynie Turinga nie jest efektywnie rozstrzygalne to, że zatrzyma się, gdy zadamy jej jakąś liczbę na wejściu.
- O dowolnym algorytmie nie jest rozstrzygalne w sensie Turinga to, że zatrzyma się, gdy zadamy mu na wejściu jakąś liczbę.

---

[22] Dla innej formalizacji oczywiście dowodzimy czegoś równoważnego.

[23] Por. [Cutland 1980, s. 68].

[24] Przykłady takich funkcji podaje m.in. Cutland w cytowanej pracy (s. 68-71), choć w jego podręczniku za podstawowe przyjęto pojęcie obliczalności w stylizacji tzw. *unlimited register machines*.

[25] Takie sformułowania podał Robin Adams podsumowując dyskusję na temat (postawiony przeze mnie) roli TC w dowodzie PS. Dyskusja odbyła się na internetowym forum FOM.

[26] Chodzi o rozstrzygalność w skończonym czasie, gdyż w nieskończonym czasie jest ten problem rozstrzygalny.

- O dowolnym algorytmie nie jest efektywnie rozstrzygalne to, że zatrzyma się, gdy zadamy mu na wejściu jakąś liczbę.

W niektórych z tych sformułowań występuje, kluczowy dla TC, intuicyjny termin *efektywnie rozstrzygalne* (obliczalne). Często przyjmuje się, że zdania sformułowane z użyciem tego zwrotu nie mają charakteru matematycznego i dlatego też sformułowania: drugie i czwarte nie posiadają takiego charakteru matematycznego (ścisłego).[27] Dla udowodnienia twierdzenia pierwszego i czwartego nie potrzebujemy powoływać się na TC. (Ciekawe, że twierdzenie czwarte można w ogóle udowodnić.[28]) Oto zarys argumentu dla twierdzenia czwartego. Załóżmy, że wszystkie, efektywnie obliczalne funkcje częściowe ułożymy na liście, i przyporządkujemy im obliczające je algorytmy. Załóżmy nie wprost, że istnieje efektywna procedura *E* (algorytm — efektywnie obliczalna funkcja), rozstrzygająca o dowolnym algorytmie (funkcji), czy algorytm ten zakończy pracę, gdy zadamy mu jakąś liczbę na wejściu. O *E* zakładamy tylko tyle, i nie wiemy, w jaki sposób analizuje on algorytmy. Dla dowolnego algorytmu A_n z listy algorytmów, który oblicza jakąś funkcję częściową, możemy ową funkcję uzupełnić do funkcji całkowitej, kładąc 0 w miejscach, gdzie była ona niezdefiniowana. Ponieważ *E* jest również na liście algorytmów, możemy zdiagonalizować ciąg funkcji w zwykły sposób, uzyskując sprzeczność.

Natomiast dla udowodnienia twierdzenia drugiego z powyższej listy potrzebujemy, jak się wydaje, TC. Jest tak z tego powodu, iż rzeczona funkcja nie musi znaleźć się na liście. W popularnym podręczniku Boolosa i Jeffreya pt. *Computability and Logic*, rola TC jest mocno podkreślana i występuje ona explicite w dowodzie problemu stopu.[29] Co ciekawe, twierdzenie drugie (bez przyjęcia TC) wydaje się nie być wcale twierdzeniem matematycznym. Jego sformułowanie w postaci pytania brzmiałoby następująco: *czy o dowolnej maszynie Turinga jest efektywnie rozstrzygalne to, że zatrzyma się, gdy zadamy jej jakąś liczbę na wejściu?* Dopiero przyjęcie TC daje w odpowiedzi NIE, a problem zyskuje charakter matematyczny. Bez przyjęcia TC odpowiedź na tak sformułowane pytanie mogłaby również brzmieć TAK. Paradoksem jest to, że przyjęcie niematematycznej przesłanki TC (podkreślam, że TC uchodzi za zdanie niematematyczne) daje w efekcie matematyczne twierdzenie, którego dowód znamy.

4. ZAGADNIENIE IV
CZY MOŻNA DOWIEŚĆ TC?

Niektórzy podają ‘dowód’ tego, że TC nie jest dowodliwa, argumentując następująco: aby móc dowieść TC trzeba ją najpierw dobrze sformułować, czyli ściśle określić, co znaczy *funkcja efektywnie obliczalna*. Lecz wtedy uzyskamy kolejną

[27] Nie zgadzam się z tym poglądem i próbuję to wykazać w artykule: [Olszewski 2005?].

[28] Jest to znowu pojęcie dowodu dalekie od standardu hilbertowskiego.

[29] [Boolos, Jeffrey 1999, s. 28].

formalizację tego pojęcia i dalej jesteśmy w punkcie wyjścia. W tym argumencie pojawia się wątek niemożliwości zbadania klasy wszystkich możliwych formalizacji pojęcia efektywnej obliczalności funkcji. Jak zobaczymy, jest on istotny.

Rozważając zagadnienie dowodu TC natychmiast przychodzi na myśl fakt, że w obrębie matematyki pojęcie dowodu nie jest w całej ogólności dobrze określone. Ciekawą argumentację za brakiem ogólnego pojęcia dowodu podaje Raymond Smullyan.[30] Weźmy następujące zdanie wypisane poniżej:

TEGO ZDANIA NIGDY NIE MOŻNA DOWIEŚĆ.

Jeśli to zdanie jest fałszywe, to znaczy, że można go dowieść. Jeśli można go dowieść, to musi być prawdziwe — sprzeczność. Zatem, ponieważ założenie fałszywości tego zdania prowadzi do sprzeczności, zdanie to musi być prawdziwe. Jeśli założymy, że ono jest prawdziwe[31], to jest tak, jak ono stwierdza, tzn. nie można go dowieść. Powyżej jednak zostało dowiedzione. Mamy tutaj do czynienia z pewnym paradoksem.

Od czasów Dawida Hilberta w obrębie określonego systemu formalnego pojęcie dowodu jest dobrze zdefiniowane. Taki dowód nazywamy *dowodem sformalizowanym*. Temu pojęciu dowodu przeciwstawia się pojęcie *dowodu treściowego*, w którym pojawiają się terminy już zinterpretowane. Główne typy takich dowodów to dowody intuicyjno-psychologiczne, dowody konstrukcyjne i eksperymenty myślowe.[32] Twierdzenia Gödla o niezupełności wskazują wyraźnie na różny status pojęć prawdy i dowodu w sensie hilbertowskim. Zdania prawdziwe, lecz niedowodliwe w danym systemie formalnym muszą jednak być jakoś dowodliwe, gdyż potrafimy wykazać, że są prawdziwe.[33] Dla wykazania prawdziwości tych zdań posługujemy się inną techniką dowodową, która jest zbliżona do dowodu treściowego. Czy zatem znaczyć to może, że twierdzenia Gödla wskazują na niezbywalność dowodu treściowego w obrębie matematyki?

---

[30] Por. [Smullyan 1993, s. 211].

[31] Tutaj wykorzystujemy założenie o adekwatnym podziale wszystkich zdań na prawdziwe i fałszywe.

[32] [Mrozek 2000, s. 21-33]. Jako przykład eksperymentu myślowego podaje autor argument Eulera za tym, że $S + W - K = 2$, tzn. w dowolnym wielościanie wypukłym suma liczby ścian S i liczby wierzchołków W jest o dwa większa od liczby jego krawędzi K.

[33] Uważa się na przykład, że dowód (w ogólnym sensie) jest po to, by wykazać prawdziwość twierdzenia. I jest to zasadniczo podstawowy cel podawania dowodu. Należy zauważyć, że jeśli w obrębie systemu formalnego F udowodniono twierdzenie A, to A uważane jest za prawdziwe w semantyce systemu. Natomiast zdanie: $\vdash_F A$ które czytamy: ‘formuła A jest dowodliwa w systemie F’, jest zdaniem prawdziwym matematyki jako takiej. Symbol $\vdash_F$ jest symbolem pragmatycznym. W pierwszym przypadku — chodzi o prawdziwość (relatywną względem klasy modeli) w sensie Tarskiego, zaś w drugim — o jakiś inny (niezdefiniowany) sens prawdziwości absolutnej. Dowód zdania $\vdash_F A$ jest ‘złożeniem’ dowodu nieformalnego z dowodem w sensie hilbertowskim.

Za tym, że na terenie matematyki pojęcie dowodliwości nie jest precyzyjne, przemawiają również wątpliwości dotyczące wykorzystania tzw. *komputerowej metody dowodzenia*.[34] Jarosław Mrozek przytacza pogląd Mieczysława Lubańskiego, że metoda komputerowa polega na tym, że *bez pomocy komputera nie potrafimy dowieść* pewnych twierdzeń. Jest tak z tego powodu, że w dowodzeniu liczba operacji jest zbyt duża lub z racji *sugestii poddawanych przez maszynę*.[35] Wydaje się również istotne to, że dowody niektórych twierdzeń wymagają stworzenia nowych działów matematyki o wątpliwej wartości, z punktu widzenia matematyki oficjalnej.[36]

Odnośnie dowodu TC, nie tylko brak precyzyjnego pojęcia *dowodu* sprawia tu trudność, drugim problemem jest termin *pojęcie*. Na obecnym etapie nauki nie jest jasne, czy logika poradzi sobie z wystarczającym opracowaniem jakiejś teorii *pojęć*, czy też — w ogólności — teorii *sensu*.[37] Główny powód tego stanu rzeczy upatruję w odmiennym rozumieniu pojęcia prawdy w obrębie logiki i nauk empirycznych. Zaznaczyło się to we wcześniejszych rozważaniach na temat TC jako definicji syntetycznej — typu definiowania charakterystycznego (między innymi) dla logiki. Typowym sposobem definiowania w naukach empirycznych jest definicja analityczna, która ma być prawdziwa na mocy zgodności z rzeczywistością, a nie na mocy umowy. Z tych powodów ‘dowód’ TC (jeśli w ogóle) powinien pojawić się w obrębie nauki innej niż logika.

Tym właśnie tropem poszedł Dawid Hilbert, który rozpatrywał naukę uprzednią względem matematyki i w swoich wykładach z 1905 roku: *Logische Prinzipien des mathematischen Denkens*[38] sformułował jeden z aksjomatów tej nauki.[39]

> […] Aksjomat Myślenia lub, jak mógłby ktoś powiedzieć, Aksjomat Istnienia Inteligencji, może być w przybliżeniu sformułowany jak następuje: Ja mam możność myśleć o rzeczach i oznaczać je poprzez proste znaki (a, b, …; X, Y, …) w tak pełny charakterystyczny sposób, że mogę je na powrót zawsze jednoznacznie rozpoznać. Moje myślenie operuje tymi rzeczami za pomocą ich oznaczeń (Bezeichnung) w pewien sposób, zgodny z określonymi prawami. Ja mogę się nauczyć tych praw poprzez samoobserwację i opisać je zupełnie.

> […] an Axiom of Thought or as one can say, an Axiom of the Existence of an Intelligence, which can be formulated approximately as follows: I have a capability to think things and to

---

[34] Por. [Mrozek 2000, s. 31].

[35] [Mrozek 2000, s. 31].

[36] Termin *matematyka oficjalna (tame mathematics)* pochodzi od G. Kreisela. Wspomniana sytuacja dotyczy na przykład udowodnienia hipotezy Goldbacha przez prof. H. Pogorzelskiego z USA. Innym klasycznym przykładem jest dowód Dedekinda istnienia zbioru nieskończonego.

[37] Oczywiście wykluczyć się tego całkowicie nie da. Czynione są w ostatnich latach wysiłki zmierzające w tym kierunku, np. E. Zalta, „Fregean Senses, Modes of Presentation and Concepts" dostępne w internecie na stronie: http://mally.stanford.edu/zalta.html. Wypada wspomnieć o wysiłkach w tym kierunku czynionych przez przedstawicieli filozofii umysłu, np. J. Fodora i R. Jackendoffa.

[38] Dostępne w archiwum w Getyndze w postaci notatek zrobionych przez Ernsta Hellingera i niezależnie Maxa Borna.

[39] Cytuję za: [Hallet 1994, s. 179].

denote them through simple signs (a, b, …; X, Y, …) in such a fully characteristic way that I can unequivocally recognise them again. My thinking operates with these things in this designation (Bezeichnung) in a certain way according to determinate laws, and I am capable of learning these laws through self-observation, and of describing them completely.

Aksjomat ten (AH) można rozłożyć na części:

AH.1 Ja myślę.
AH.1.1 Myślę o rzeczach (lub myślę rzeczy).
AH.2 Za pomocą prostych znaków mogę oznaczać pomyślane rzeczy.
AH.2.1 Mogę (ponownie) jednoznacznie rozpoznać przypisane rzeczom znaki.
AH3 Mam zdolność samoobserwacji (samorefleksji).
AH4 Mogę poznać prawa operowania rzeczami za pomocą znaków i opisać je kompletnie.

Próba formalizacji tego aksjomatu wydaje się sprawą beznadziejną. Po pierwsze, ma on charakter empiryczny, tzn. dotyczy kontyngentnych właściwości *Ja* jako podmiotu poznania. Przez to, jego prawdziwość lub fałszywość jest zrelatywizowana do świata rzeczywistego i do własności przysługujących gatunkowi *homo sapiens*. Po drugie, wyraża on coś, co w nawiązaniu do badań Kantowskich można nazwać *warunkami możliwości uprawiania matematyki*, przez co formalizacja, tak charakterystyczna dla logiki (i matematyki), jest tutaj również uwarunkowana.[40]

Church, w paragrafie siódmym pracy *An unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, podał dwa argumenty za prawdziwością TC (‘*Definicja ta* (tzn. TC) *ma być usprawiedliwiona za pomocą rozważań następujących poniżej, w takim stopniu, w jakim może być w ogóle podane przekonywające uzasadnienie wyboru formalnej definicji, która miałaby korespondować z pojęciem intuicyjnym*’[41]). Ta wypowiedź twórcy TC może budzić zdziwienie z dwóch powodów: TC nie jest przecież definicją wyrażającą jedynie ‘zwykłą’ korespondencję pojęć — intuicyjnego i formalnego, lecz mamy tu do czynienia z odpowiedniością doskonałą — identycznością (zresztą na tym polega wartość TC, w przeciwnym wypadku byłaby zupełnie nieinteresująca), po drugie niejasne jest to, jak rozumiał on sam termin *definicja*, gdyż mówi o *selection of a formal definition to correspond to an intuitive notion*. To może oznaczać, że TC — jako taka — nie jest definicją; definicją zaś byłaby formalna charakterystyka odnosząca się do intuicyjnego pojęcia funkcji rekurencyjnej.

Church, podobnie jak Turing, *efektywną obliczalność* rozumiał jako obliczalność przez człowieka (*human calculator*).

---

[40] Nie należy dać się zwieść pozornej ‘słabości’ (AH). Z warunku AH.2.1 da się wyprowadzić pojęcie obliczalności równoważne pojęciu funkcji rekurencyjnej, jak to pokazał A. Grzegorczyk w pracy „Decidability without Mathematics” dostępnej w sieci: http://www.calculemus.org.

[41] [Church 1936, s. 100]. Drugi argument dotyczył tego, że każda funkcja obliczalna przez algorytm jest efektywnie obliczalna. W istocie chodziło o reprezentację opisu algorytmu za pomocą numeracji gödlowskiej w rekurencyjnym systemie formalnym arytmetyki.

Drugi z argumentów Churcha za prawdziwością TC w literaturze nazywa się argumentem Churcha *step-by-step* [42] (Symbolami $\underline{x}$, $\underline{y}$ oznaczmy nazwy liczb x, y):

[C1] Funkcja całkowita f jest efektywnie obliczalna wtw istnieje taki system formalny logiki F, że f jest w nim słabo reprezentowalna.[43]

[C2] Kroki obliczeń dowodowych systemu F są rekurencyjne, tzn. relacja: *x jest dowodem y w F* jest (pierwotnie) rekurencyjna.

(1) Zakładamy dodatkowo, że dysponujemy numeracją gödlowską dla formuł języka systemu F.

(2) Zbiór twierdzeń systemu F – $\mathrm{Dow}_F = \{A: \vdash_F A\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny — z [C2].

(3) Niech funkcja f będzie słabo reprezentowalna w F przez formułę A, tzn. $f(x) = y$ wtw $\vdash_F A(\underline{x}, \underline{y})$, dla dowolnych x, y ze zbioru liczb naturalnych — [C1].

(4) Relacja $R = \{ \langle x, y\rangle : \vdash_F A(\underline{x}, \underline{y})\}$ jest rekurencyjnie przeliczalna — z (2).

(5) Relacja R spełnia warunek regularności: $\forall x \exists y\, R(x, y)$ — z [C1].

(6) Istnieje funkcja rekurencyjna g taka, że $\forall x\, R(x, g(x))$ — z twierdzenia o uniformizacji.[44]

(7) Funkcja f jest rekurencyjna — z (6), (4) i ogólnych własności relacji.

[C3] ZATEM: Każda efektywnie obliczalna funkcja jest rekurencyjna.

Co do [C1]: w liście do polskiego logika Józefa Pepisa Church zauważa, że, jeżeli o jakiejś funkcji efektywnie obliczalnej f nie przyjmie się warunku (słabej) reprezentowalności w systemie *Principia Mathematica*[45], to nie istnieje pole do wspólnej dyskusji na temat TC. Równocześnie zaznaczył, że odkrycie funkcji efektywnie obliczalnej lecz nierekurencyjnej, dawałoby w konsekwencji całkowicie nową zasadę logiki dotychczas nie stosowaną w matematyce, która sama musiałaby zostać starannie przeanalizowana.[46] Owa hipotetyczna funkcja (*resp.* nowa zasada logiki) byłaby tak dziwna i skomplikowana, że nie mogłaby być reprezentowalna w żadnym z rozszerzeń systemu *PM*.[47] [C2] stawia wymagania na taki system logiki, który ma być w ogóle przydatny do celów, dla których zazwyczaj buduje się takie systemy.[48] Są to: wymóg rekurencyjnej przeliczalności nałożony na zbiór aksjomatów i zbiór reguł inferencji, i wymóg rekurencyjności samych reguł wnioskowania. Spełnienie

[42] Por. [Sieg 1997] jak również [Shagrir 2002].

[43] System F musi być niesprzeczny, gdyż w systemie sprzecznym żadna funkcja nie jest słabo reprezentowalna.

[44] Por. [Odifreddi 1999, s 137]. Twierdzenie to (w części nas interesującej) stanowi: *Jeśli R jest rekurencyjnie przeliczalną i regularną relacją, to istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że* $\forall x\, R(x, f(x))$.

[45] Lub w jego niesprzecznym rozszerzeniu.

[46] Zob. [Sieg 1997, s. 175-176].

[47] Por. [Sieg 1997, s. 176].

[48] Por. [Church 1965, s. 101]. Church miał chyba tutaj na myśli to, że systemy logiki buduje się dla formalizacji pojęć.

tych wymogów ma się dokonać przez zakodowanie wspomnianych obiektów za pomocą numeracji Gödla.[49] Druga przesłanka argumentu Churcha jest istotnie słaba, o ile nawet nie powoduje błędnego koła. Jak słusznie zauważa Shagrir, przejście Churcha od tego, że trudno byłoby zrozumieć nową efektywną i nierekurencyjną zasadę logiczną, do tego, że taka zasada nie istnieje, wymaga uzasadnienia.[50] Ten sam autor twierdzi dalej, że analiza dokonana przez Turinga uzupełniła braki występujące w argumencie Churcha.[51]

Turing, we wspomnianym już artykule *On Computable Numbers,* podaje argumenty za TC. Wyraźnie stwierdza (podobnie jak Church), że każda taka argumentacja musi odwołać się do intuicji i przez to nie może być satysfakcjonująca matematycznie.[52] Swą analizę rozpoczyna od próby odpowiedzi na pytanie (nazywa je *real question*): *Jakie możliwe procesy są wykonywane podczas obliczania?*[53] Owocem tej analizy (w sformułowaniu Siega) są następujące warunki:[54]

[1] bezpośrednio rozpoznawalna konfiguracja symboli determinuje jednoznacznie następny krok obliczeniowy,
[2] istnieje ograniczenie na liczbę symbolicznych konfiguracji, które mogą być bezpośrednio rozpoznawalne,
[3] istnieje ograniczenie na liczbę 'stanów umysłu'[55], które trzeba wziąć pod uwagę,
[4] zmianie podlega tylko bezpośrednio rozpoznawalna konfiguracja symboliczna,
[5] nowo obserwowane konfiguracje znajdują się w ograniczonej odległości od konfiguracji obserwowanych bezpośrednio wcześniej.

Te warunki przekonywająco wyrażają ograniczenia na obliczenia dokonywane przez ludzki podmiot i jego aparat zmysłowo-poznawczy.

Ostatecznie, argument Turinga wygląda następująco:[56]

[T1] Założenie Turinga: Obliczający ludzki komputer musi spełniać warunki [1]-[5].

---

[49] Por. [Church 1965, s. 101].

[50] Por. [Shagrir 2002, s. 225].

[51] Podobnie uważał na przykład Gandy. Argument Turinga był również przekonywający dla Gödla.

[52] Por. [Turing 1936, s. 135].

[53] Por. [Turing 1936, s. 135]. Turing rozważał liczby 'obliczalne'.

[54] Por. [Sieg 1997, s. 171-172].

[55] Jest to założenie, dla którego Turing podał argument topologiczny. Gdyby było ich (nieprzeliczalnie) nieskończenie wiele, to niektóre nie byłyby rozróżnialne. To samo dotyczy skończonej liczby znaków, które maszyna może drukować.

[56] Por. [Shagrir 2002, s. 226].

[T2] Twierdzenie Turinga: Każda funkcja, która może zostać obliczona przez komputer spełniający warunki [1]-[5] jest obliczalna przez maszynę Turinga.

[T3] ZATEM: Każda funkcja, która może zostać obliczona przez ludzki komputer jest obliczalna w sensie Turinga.

Z tego, że implikacje odwrotne względem [C3] i [T3] są uznane za oczywiste, oraz z tego, że obliczalność w sensie Churcha i Turinga są ekstensjonalnie równoważne, wynika równoważność [C3] i [T3]. Czasami w literaturze przedmiotu [C3] nazywana jest Tezą Churcha–Turinga, zaś [T3] nazywana jest po angielsku *Human Version of CT*.[57]

Jeśli oba powyższe argumenty mają spełnić swą rolę (jako uzasadniające przyjęcie TC), należy zająć się odpowiednio przesłankami [C2] i [T1]. Można je rozumieć jako arbitralnie przyjęte założenia. Wtedy na ich podstawie TC jest dobrze uzasadniona. Moja jednak teza jest taka, że [C2] i [T1] mają charakter empiryczny.[58] Z tym że termin *empiryczny* rozumiem specyficznie. W metodologii nauki za prawo empiryczne uważa się takie, w którego sformułowaniu oprócz terminów logicznych występują terminy obserwacyjne lub które posiada obserwowalne konsekwencje. W tym przypadku trudno jednak mówić o takich terminach w zwykłym sensie, tzn. takich terminach, które dotyczą przedmiotów lub cech dających się bezpośrednio obserwować za pomocą zmysłów. Obserwacja jest raczej, w terminologii Hilberta, samoobserwacją,. Natomiast używany przeze mnie termin *empiryczne* lub inaczej *faktualne* podkreślić ma następującą cechę wspomnianych przesłanek: odnoszą się one do konkretnej rzeczywistości człowieka, a w szczególności do jego władz poznawczych i umysłu. *Ja*, jako podmiot poznania, *Ja* istniejący obecnie w uniwersum jestem obiektem doświadczenia. To uniwersum, w którym żyje człowiek, jest jedynym wśród wielu możliwych uniwersów, które rozważa kosmologia.[59] Jego własności i przymioty wyznaczone są uprzednio w stosunku do ich ujmowania pojęciowego.[60] Umysł, w przeciwieństwie do mózgu, nie podlega zwykłej empirycznej obserwacji. Przy badaniu umysłu pojawia się wiele wątków wątpliwych z punktu widzenia metodologii nauki.

[C2] i [T1] można rozumieć jako wypowiedzi odnoszące się do tego, co Kant nazywał apriorycznymi formami naoczności — przestrzeni i czasu. Każdy system

[57] Por. na przykład: [Shagrir 2002, s. 223].

[58] E. Mendelson pisze, że uzasadnienie dla TC ma być mieszanką intuicyjnych percepcji i standardowego logiczno-matematycznego rozumowania o nieempirycznym charakterze. Uważa również, że można znaleźć dowód dla TC. Zob. [Mendelson 1990, s. 225-233].

[59] Wspomnę tutaj tzw. *zasadę antropiczną*, dzięki której można wykluczyć niektóre klasy modeli kosmologicznych.

[60] Nawiązuję tutaj do rozróżnienia dokonanego przez Leibniza w *Nowych rozważaniach dotyczących rozumu ludzkiego*, gdzie dzieli on prawdy na *rozumowe* (są to w istocie identyczności) oraz *faktyczne*. Te drugie, są to *doświadczenia wewnętrzne bezpośrednie*, które mają charakter przypadkowy.

formalny, ze względu na swój intersubiektywny charakter, pojawić się musi w przedstawieniu (*in der Vorstellung*), czyli w owych formach naoczności, szczególnie w formie przestrzeni. Właściwie to chyba miał na myśli Hilbert w AH.

W przesłance [C2] kwantyfikator przebiega po **wszystkich** systemach formalnych dla których spełniony jest rzeczony warunek. Wiadomo, że istnieją systemy formalne, które nie spełniają tego warunku.[61] Pozostaje problemem otwartym, czy istnieją systemy formalne, w których relacja dowodliwości jest efektywnie obliczalna, choć nie jest rekurencyjna. Problem ten jest równoważny TC. Dla łatwiejszego uchwycenia empirycznego charakteru [C2] wystarczy rozważyć przypadek jej fałszywości. Fałszywość należy tutaj rozumieć jako niezgodność z rzeczywistością. Apriorycznie nie można wykluczyć istnienia systemu formalnego wyposażonego w efektywną, lecz nierekurencyjną regułę. Prawdziwość [C2] zależy od rzeczywistej zawartości zmysłowych form naoczności. Zbadanie ich zawartości byłoby ewentualnym uzasadnieniem dla [C2]. Jest to jednak zadanie dla nauki o umyśle, a nie dla logiki. Church, jak wspomniano, upatrywał prawdziwość tej przesłanki w odkryciu i zastosowaniu numeracji gödlowskiej.

Argumentacja za tym, że dowód TC (o ile jest prawdziwa) nie jest możliwy, wyklucza możliwość pełnego przebadania wszystkich systemów formalnych. To pesymistyczne przekonanie, dzielone przez niektórych logików, wywodzi się chyba z błędnego przekonania, że TC przynależy tylko do badań typu logicznego.

BIBLIOGRAFIA

Boolos G., Jeffrey R. (1999), *Computability and Logic*, Cambridge.

Boolos G. (1986/87), *Saving Frege from Contradiction*, ‘Proceedings of the Aristotelian Society’, 87, s. 131-151.

Borkowski L. (1990), *O definicjach syntetycznych i analitycznych*, [w:] Borkowski L., *Pisma logiczne*, KUL, Lublin, s. 8-63

Church A. (1936), *An unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, [w:] [Davies 1965, s. 89-107].

Cutland N. (1980), *Computability*, Cambridge.

Davis M. (1965), *The Undecidable*, Raven.

Hallet M. (1994), *Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought*, [w:] *Mathematics and Mind*, Oxford University Press, s. 158-200.

Kleene S. (1952), *Introduction to metamathematics*, North-Holland.

Mendelson E. (1990), *Second Thoughts about Church's Thesis and Mathematical Proofs*, ‘The Journal of Philosophy’, 85, s. 225-233.

Mrozek J. (2000), *Powstanie i perspektywy rozwoju dowodu matematycznego*, ‘Filozofia Nauki’, 1, s. 21-33.

Murawski R. (1990), *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, Poznań.

Odifreddi P. (1999), *Classical Recursion Theory*, t. 1., Elsevier.

---

[61] Na przykład systemy wyposażone w tzw. ω-regułę, która nie jest finitystyczna i w konsekwencji — nierekurencyjna.

Olszewski A. (2005?), *Kilka uwag o Tezie Churcha i Aksjomacie Hilberta*, artykuł złożony do: ‘Zagadnienia Filozoficzne w Nauce’.

Shagrir O. (2002), *Effective Computation by Humans and Machines*, ‘Minds and Machines’, 12, s. 221-240.

Sieg W. (1997), *Step by step: Church's analysis of effective calculability*, ‘The Bulletin of Symbolic Logic’, 3, s. 154 — 180.

Smullyan R. (1993), *Jaki jest tytuł tej książki?*, Warszawa, Książka i Wiedza.

Turing A. (1936), *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, [w:] [Davis 1965, s. 116-151].